La teoria di campo offre delle possibilità per la soluzione del problema dei quanti?[1]

A. Einstein

§1. Considerazioni generali

Il grande successo, che la teoria dei quanti ha mostrato nel suo sviluppo in meno di un quarto di secolo, non ci deve far dimenticare che per ora manca un fondamento logico di questa teoria. Sappiamo inoltre che tale fondamento cercato non può consistere semplicemente in un completamento della meccanica e dell'elettrodinamica classica; ciò perché le leggi dell'equipartizione dell'energia derivanti dalla meccanica classica e le leggi derivanti dall'elettrodinamica classica sulle proprietà energetiche della radiazione si trovano in una contraddizione insolubile con i fatti. Basti ricordare la degenerazione del calore specifico a basse temperature e i processi secondari, che si manifestano per l'assorbimento e per la diffusione (effetto Compton) di radiazione di corta lunghezza d'onda.

Davanti ai fatti riassunti dalle regole quantiche si può ben dubitare che con uno sviluppo ulteriore conseguente delle attuali teorie si possano risolvere le difficoltà. L'essenza dello sviluppo teorico attuale, che si riconosce nella meccanica del punto, nell'elettrodinamica di Maxwell-Lorentz, nella teoria della relatività, sta nel fatto che si lavora con equazioni differenziali, che fissano univocamente gli eventi in un continuo spaziotemporale a quattro dimensioni, una volta che essi siano noti su una sezione spaziale. Nella determinazione univoca dello sviluppo temporale degli eventi mediante equazioni differenziali alle derivate parziali consiste il metodo, mediante il quale si soddisfa la legge di causalità. Di fronte alle difficoltà esistenti si è dubitata la descrivibilità dei fatti osservati mediante equazioni differenziali. Si è messa in dubbio inoltre la possibilità della adozione senza eccezioni della legge di causalità sotto l'ipotesi del continuo spaziotemporale tetradimensionale. Tutti questi dubbi sono consentiti dal punto di vista della teoria della conoscenza, e assai comprensibili di fronte alle profonde difficoltà che ci stanno davanti. Ma, prima di tirare sul serio nell'ambito della discussione possibilità così remote, dobbiamo dimostrare che veramente dai tentativi attuali e dai fatti segue che è impossibile riuscire con equazioni differenziali alle derivate parziali. Di fronte alla meravigliosa precisione con la quale la teoria ondulatoria esprime i fenomeni geometricamente così complicati dell'interferenza e della diffrazione della luce, è difficile credere che l'equazione differenziale alle derivate parziali in ultima istanza sia inadatta a render conto dei fatti.

Se si considera criticamente le teoria di Maxwell-Lorentz, si riconosce che il suo fondamento consiste di due parti che formalmente sono poco dipendenti l'una dall'altra, ossia delle equazioni differenziali del campo elettromagnetico e delle equazioni di moto dell'elettrone (positivo e negativo). I fenomeni della diffrazione e dell'interferenza, così brillantemente confermati dall'esperienza, essenzialmente sono governati dal punto di vista formale dalle equazioni di campo, i processi di assorbimento, che la teoria non può riprodurre conformemente all'esperienza, sono invece principalmente determinati dalla legge di moto dell'elettrone. È quindi un pensiero naturale (frequentemente espresso) che si debbano mantenere le equazioni di

[1] Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems?, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **33**, 359-364 (1923).

campo, ma abbandonare le equazioni di moto dell'elettrone.[2] Ciò comporterà certamente che non si potrà mantenere la consueta teoria della localizzazione dell'energia nel campo. Questa possibilità teorica non si sviluppa oltre su terreno facile, perché finora non si è vista nessuna via percorribile per raggiungere delle leggi di moto diverse per l'elettrone. Il tentativo di Mie, di completare le equazioni di campo in modo che esse valgano anche all'interno dell'elettrone, non ha prodotto finora alcun risultato utile. Questi metodi potrebbero portare a una unificazione dei fondamenti, poiché essi renderebbero superflue leggi particolari di moto per l'elettrone. Perché anche questa strada non possa contribuire decisivamente alla soluzione del problema dei quanti risulterà dalle considerazioni che seguono, che a mio avviso ci portano al punto essenziale dell'intero problema.

Secondo le teorie attuali lo stato iniziale di un sistema può essere scelto liberamente; le equazioni differenziali danno poi l'evoluzione temporale. Secondo le nostre conoscenze sugli stati quantici, come esse si sono sviluppate in particolare negli ultimi dieci anni in connessione con la teoria di Bohr, la realtà non corrisponde a questa concatenazione della teoria. Lo stato iniziale di un elettrone che si muova attorno a un nucleo di idrogeno non può essere scelto liberamente, ma questa scelta deve corrispondere alle condizioni quantiche. In generale: non solo l'evoluzione temporale, ma anche lo stato iniziale obbedisce a leggi.

È possibile dar conto di questa conoscenza sui processi naturali, che dobbiamo ben ritenere di significato generale, in una teoria fondata su equazioni differenziali alle derivate parziali? Ma certo; dobbiamo solo "sovradeterminare" le variabili di campo mediante delle equazioni. Ciò significa che il numero delle equazioni differenziali deve essere più grande del numero delle variabili di campo da esse determinate. (Nel caso della relatività generale il numero delle equazioni indipendenti deve essere più grande solo del numero delle variabili di campo diminuito di 4 poiché in essa, a causa della libera scelta delle coordinate, le variabili di campo sono fissate dalle equazioni solo a meno di 4 tra esse.) La geometria di Riemann ci mostra un bell'esempio di sovradeterminazione, che appare anche in concreto rapporto con il nostro problema. Si assuma che tutte le componenti $R_{ik,lm}$ del tensore di curvatura di Riemann si annullino, di modo che il continuo sia euclideo, che quindi sia completamente determinato e soprattutto non consenta "condizioni iniziali". Nel continuo a 4 dimensioni si tratta allora di 20 equazioni algebricamente indipendenti l'una dall'altra, che i 10 coefficienti $g_{\mu\nu}$ della forma metrica quadratica devono soddisfare.

Analogamente cerchiamo di sovradeterminare gli eventi nel campo elettromagnetico e gravitazionale, ove le possibilità sono ristrette dalle seguenti condizioni:

1. Le equazioni devono essere generalmente covarianti, e in esse devono comparire solo le componenti $g_{\mu\nu}$ del campo metrico e $\phi_{\mu\nu}$ del campo elettrico.

2. Il sistema di equazioni cercato deve in ogni caso contenere quelle equazioni che secondo le teoria della gravitazione e la teoria di Maxwell sono soddisfatte, ossia il sistema di equazioni

$$R_{il} = -kT_{il}$$
$$T_{il} = -\phi_{i\alpha}\phi_l^{\alpha} + \frac{1}{4}g_{il}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta},$$

[2] I fondamenti della meccanica contraddicono da soli i fatti quantistici (fallimento del principio di equipartizione). Le equazioni del moto del punto materiale devono quindi essere abbandonate, totalmente a prescindere dalla questione, se si debba o meno mantenere la teoria di campo.

dove R_{il} indica il tensore di curvatura di rango due.

3. Il sistema di equazioni cercato, che sovradetermina il campo, deve sempre ammettere una soluzione statica sferosimmetrica, che secondo le equazioni anzidette descrive l'elettrone positivo ovvero negativo.

Qualora si riesca, con il soddisfacimento di queste tre condizioni, a sovradeterminare abbastanza con equazioni differenziali il campo totale, possiamo sperare che mediante queste equazioni sia determinato anche il comportamento meccanico dei punti singolari (elettroni) in modo tale che anche lo stato iniziale del campo e dei punti singolari soddisfi a condizioni restrittive.

Se è in generale possibile risolvere il problema dei quanti mediante equazioni differenziali, possiamo sperare di raggiungere la meta per questa via. Nel seguito mostrerò ciò che io ho tentato in questa direzione, senza poter sostenere che le equazioni da me presentate possiedano un significato fisico reale. Le mie proposte avranno raggiunto il loro scopo, se stimoleranno i matematici a collaborare e mostreranno che la via qui intrapresa è percorribile e va pensata senza riserve fino alla fine. Come sempre accade in relatività generale, anche in questo caso è difficile trarre dalle equazioni delle conclusioni circa le loro soluzioni, che possano essere confrontate con i risultati assodati dell'esperienza, qui in particolar modo della teoria dei quanti.

§2. Derivazione di un sistema di equazioni sovradeterminate

Partiamo dal sistema di equazioni sovradeterminate

$$R_{ik,lm} = \Psi_{ik,lm} \tag{1}$$

In questo sistema

$$R_{ik,lm} = g_{ij} R^{j}{}_{k,lm} = g_{ij} \left(\frac{\partial \Gamma^{j}_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^{j}_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^{j}_{\sigma l} \Gamma^{\sigma}_{km} + \Gamma^{j}_{\sigma m} \Gamma^{\sigma}_{kl} \right)$$

denota il tensore di curvatura di Riemann (con il segno cambiato, come al solito), e $\Psi_{ik,lm}$ un tensore, che è omogeneo e di secondo grado nelle componenti del campo elettrico $\phi_{\mu\nu} \left(= \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} \right)$, e che possiede le stesse proprietà di simmetria di $R_{ik,lm}$. Lo otteniamo se poniamo $\Psi_{ik,lm}$ uguale ad una combinazione lineare di tensori:

$$\Phi'_{ik,lm} = \phi_{ik}\phi_{lm} + \frac{1}{2} \left(\phi_{il}\phi_{km} - \phi_{im}\phi_{kl} \right)$$

$$\Phi''_{ik,lm} = g_{il}\Phi'_{km} + g_{km}\Phi'_{il} - g_{im}\Phi'_{kl} - g_{kl}\Phi'_{im} \tag{3}$$

$$\Phi'''_{ik,lm} = \left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl} \right) \Phi' \tag{4}$$

dove si è posto per abbreviazione nella (3)

$$g^{km}\Phi'_{ik,lm} = \Phi'_{il} \tag{5}$$

e nella (4)

$$g^{il}\Phi'_{il} = \Phi'. \tag{6}$$

Deve quindi essere

$$\Psi_{ik,lm} = A'\Phi'_{ik,lm} + A''\Phi''_{ik,lm} + A'''\Phi'''_{ik,lm}. \tag{7}$$

In base a considerazioni che saranno tra poco evidenti, attribuiamo alle costanti A', A'', A''' i valori

$$A' = -2,\ A'' = +\frac{2}{3},\ A''' = -\frac{1}{6}. \tag{7a}$$

Sulle proprietà del sistema (1) osserviamo quanto segue. Se lo si moltiplica per g^{il} e si somma sugli indici i ed l, si ottengono le equazioni

$$R_{km} = -\left(\frac{1}{4}g_{km}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_{k\alpha}\phi_m^{\ \alpha}\right). \tag{8}$$

Queste sono le note equazioni, che assieme alle equazioni di Maxwell contengono la relatività generale, quando oltre al campo di gravitazione esista solo il campo elettromagnetico. È noto che il sistema (8) ha la soluzione statica sferosimmetrica[3]

$$ds^2 = f^2dt^2 - \left[h^2dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta d\psi^2\right)\right],$$

$$f^2 = 1/h^2 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{(2r^2)},$$

$$\phi_{4\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\pm\varepsilon}{r}\right),$$

$$\phi_{23} = \phi_{31} = \phi_{12} = 0. \tag{9}$$

Questa soluzione, la quale presenta un punto singolare (o meglio una linea d'universo singolare), e che rappresenta l'elettrone negativo o positivo, noi la indicheremo simbolicamente mediante le costanti che in essa appaiono m (massa ponderabile) ed ε (massa elettrica) come

$$L\left(m, \varepsilon\right). \tag{10}$$

Il sistema da noi cercato di equazioni di campo sovradeterminate deve comunque contenere la soluzione $L\left(m,\varepsilon\right)$. Le equazioni (1) stesse non possono essere il sistema di equazioni da noi cercato. Secondo queste il campo metrico nel caso di campo elettrico nullo è necessariamente euclideo. Ciò significa che già la soluzione di Schwarzschild $l\left(m,0\right)$ non corrisponde al sistema di equazioni (1). D'altra parte ho mostrato con un calcolo che l'elettrone "privo di massa" rappresenta una soluzione delle (1), cioè $L\left(0,\varepsilon\right)$ soddisfa al sistema (1). In base a ciò mi pare che le equazioni cercate, che producano la sovradeterminazione dei campi, siano da ottenersi dalle (1) per

[3]vedi H. Weyl, "Raum, Zeit, Materie" §32.

generalizzazione. Si offre per questo una via più naturale. Mediante l'introduzione di un sistema di coordinate localmente "geodetico" si dimostra infatti facilmente che le derivate covarianti del tensore di Riemann $R_{ik,lm;n}$ soddisfano all'identità (trovata da Bianchi)

$$0 = R_{ik,lm;n} + R_{ik,mn;l} + R_{ik,nl;m}. \tag{11}$$

Da ciò segue che nelle (1) sono comprese le equazioni più generali

$$\Psi_{ik,lmn} = \Psi_{ik,lm;n} + \Psi_{ik,mn;l} + \Psi_{ik,nl;m} = 0. \tag{12}$$

Non ritengo per nulla improbabile che le equazioni (12) assieme alle equazioni (8) della attuale teoria della relatività generale che parimenti sono conseguenza delle (1) siano il sistema cercato di equazioni per la sovradeterminazione del campo totale.

La dimostrazione con il calcolo, che $L(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema di equazioni (12), non mi è possibile invero darla, a causa della grande complicazione. Ma appare assolutamente plausibile, poiché sia $L(0, \varepsilon)$ che $L(m, 0)$ soddisfano al sistema (12). Il secondo caso si verifica quando si annulla l'intensità del campo elettrico, ed il primo perché $L(0, \varepsilon)$ è una soluzione delle (1). Moltiplicando la (12) per $g^{il}g^{km}$ e sommando sugli indici $iklm$ si ottengono le equazioni di Maxwell.

Esiste quindi una certa probabilità che l'unione dei sistemi (12) e (8) provveda la cercata sovradeterminazione del campo totale. Si pongono le seguenti domande:

$L(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema di equazioni (12)?

Il doppio sistema (12), (8) determina il comportamento meccanico delle singolarità?

Il comportamento secondo le (12) e (8) corrisponde a quanto sappiamo dalla teoria dei quanti?

Le ultime due questioni pretendono assai dal matematico che le voglia risolvere; si devono trovare metodi di approssimazione per risolvere il problema del moto. Ma il fatto che in questo modo paia offrirsi una possibilità per un reale fondamento scientifico della teoria dei quanti giustifica grandi sforzi. Sia consentito sottolineare ancora una volta in conclusione, che per me in questa comunicazione l'idea della sovradeterminazione è la principale; concedo volentieri che la derivazione delle equazioni (12) non è così stringente come si potrebbe desiderare.

Nota aggiunta in correzione. La prima delle domande su proposte ha nel frattempo trovato risposta. Il Dr. Grommer ha dimostrato con un calcolo diretto che la soluzione $L(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema (12).