Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità[1]

A. Einstein

Il convincimento circa l'unità di essenza del campo di gravitazione e del campo elettromagnetico si può oggi ritenere saldo tra i fisici teorici che lavorano nel'ambito della teoria della relatività generale. Tuttavia mi pare che non sia stata finora raggiunta una formulazione convincente di questa connessione. Anche riguardo alla mia dissertazione apparsa in questi Rendiconti (XVII, p.137, 1923) che era fondata interamente su idee di Eddington, sono del parere che non dia la vera soluzione del problema. Dopo incessanti ricerche negli ultimi due anni credo ora d'aver trovato la vera soluzione. La comunico nel seguito.

Il metodo utilizzato si può delineare come segue. Ho cercato prima di tutto l'espressione formale più semplice per la legge del campo gravitazionale in assenza del campo elettromagnetico, e poi la generalizzazione più naturale di questa legge. Di essa si mostra che contiene in prima approssimazione la teoria di Maxwell. Nel seguito propongo lo schema della teoria generale (§1) e mostro in che senso siano contenute in esso la legge del campo gravitazionale puro (§2) e la teoria di Maxwell (§3).

§1. La teoria generale.

Sia data nel continuo a quattro dimensioni una connessione affine, cioè un campo $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, che definisca il trasporto infinitesimo di un vettore secondo la relazione

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{1}$$

Non si presupporrà la simmetria di $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ rispetto ad α e β. Da queste quantità Γ si possono poi costruire in modo noto i tensori (di Riemann)

$$R^{\alpha}_{\mu,\nu\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$$

e

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Indipendentemente da questa connessione affine introduciamo una densità tensoriale controvariante $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, le cui proprietà di simmetria ugualmente lasciamo libere. Da entrambe costruiamo la densità scalare

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3}$$

e postuliamo che le variazioni complete dell'integrale

$$\mathfrak{I} = \int \mathfrak{H} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

[1]Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 414-419 (1925).

rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ed a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ come variabili indipendenti (non variate al contorno) si annullino.

La variazione rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ produce le 16 equazioni

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

la variazione rispetto a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ le 64 equazioni

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\beta} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\right) - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Eseguiremo ora alcuni passaggi che ci permettono di sostituire le equazioni (5) con altre più semplici. Contraiamo il primo membro della (5) rispetto agli indici ν, α e rispettivamente μ, α; otteniamo le equazioni

$$3\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{7}$$

Introduciamo inoltre le quantità $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, che siano i minori normalizzati di $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, e quindi soddisfino le equazioni

$$\mathfrak{g}_{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

e moltiplichiamo la (5) per $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$; otteniamo un'equazione che con l'innalzamento di un indice possiamo scrivere come segue

$$2\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg\sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) + \delta^{\mu}_{\beta}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\right) = 0, \tag{8}$$

dove si indica con $\mathfrak{g}$ il determinante di $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. Scriviamo le equazioni (6) e (8) nella forma

$$\mathfrak{f}^{\mu} = \frac{1}{3}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) = -\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) = -\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg\sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right), \tag{9}$$

dove $\mathfrak{f}^{\mu}$ indica una certa densità tensoriale. È facile dimostrare che il sistema di equazioni (5) è equivalente al sistema di equazioni

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{f}^{\mu} = 0 \tag{10}$$

assieme alla (7). Per abbassamento degli indici superiori, tenendo conto delle relazioni

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathfrak{g}},$$

dove $g_{\mu\nu}$ indica un tensore covariante, si ottiene:

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} + g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}\phi_\alpha + g_{\mu\alpha}\phi_\nu = 0 \tag{10a}$$

dove ϕ_τ è un vettore covariante. Questo sistema assieme con i due dati precedentemente

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{7}$$

e

$$0 = R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

sono il risultato del procedimento di variazione nella forma più semplice. Sorprendente in questo risultato è la comparsa di un vettore ϕ_τ oltre al tensore $(g_{\mu\nu})$ e alle quantità $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Per ottenere accordo con le leggi note finora della gravitazione e dell'elettricità, secondo le quali la parte simmetrica di $g_{\mu\nu}$ va assunta come tensore metrico, e la parte antisimmetrica come campo elettromagnetico, si deve presupporre l'annullarsi di ϕ_τ, come faremo nel seguito. Si deve tuttavia tener presente per ulteriori ricerche (per esempio il problema dell'elettrone) che il principio di Hamilton non dà alcun sostegno all'annullarsi di ϕ_τ. Il porre a zero ϕ_τ porta ad una sovradeterminazione del campo, poiché per 16+64 variabili abbiamo 16+64+4 equazioni differenziali mutuamente indipendenti dal punto di vista algebrico.

§2. Il campo di gravitazione puro come caso particolare.

I $g_{\mu\nu}$ siano simmetrici. Le equazioni (7) sono soddisfatte identicamente. Per scambio di μ e ν nella (10a) e sottrazione si ottiene allora, con notazione trasparente:

$$\Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu,\alpha\mu} = 0. \tag{11}$$

Si indichi con Δ la componente di Γ antisimmetrica negli ultimi due indici, allora la (11) prende la forma

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} + \Delta_{\mu,\alpha\nu} = 0$$

ovvero

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} = \Delta_{\mu,\nu\alpha}. \tag{11a}$$

Questa proprietà di simmetria nei primi due indici è tuttavia incompatibile con l'antisimmetria negli ultimi due, come insegna la seguente serie di equazioni

$$\Delta_{\mu,\nu\alpha} = -\Delta_{\mu,\alpha\nu} = -\Delta_{\alpha,\mu\nu} = \Delta_{\alpha,\nu\mu} = \Delta_{\nu,\alpha\mu} = -\Delta_{\nu,\mu\alpha}.$$

Questa assieme alla (11a) richiede l'annullarsi di tutti i Δ. I Γ sono quindi simmetrici negli ultimi due indici come nella geometria riemanniana.

Le equazioni (10a) si possono allora risolvere in maniera nota, e si ottiene

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right). \tag{12}$$

L'equazione (12) assieme alla (4) è la nota legge della gravitazione. Se nel §1 avessimo presupposto dall'inizio la simmetria di $g_{\mu\nu}$ avremmo ottenuto direttamente la (12) e la (4). Mi pare che questa sia la derivazione più semplice e più compatta delle equazioni della gravitazione per il vuoto. Il tentativo di comprendere la legge dell'elettromagnetismo con la generalizzazione, proprio di questa trattazione, dev'essere pertanto considerato come assai naturale.

Se non avessimo presupposto l'annullarsi di ϕ_τ, dall'imposizione della simmetria di $g_{\mu\nu}$ non avremmo potuto derivare la nota legge del campo gravitazionale puro nel modo prima dato. Se avessimo invece presupposto la simmetria di $g_{\mu\nu}$ e di $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, l'annullarsi di ϕ_α sarebbe stato una conseguenza della (9) ovvero della (10a) e della (7); si sarebbe arrivati parimenti alla legge del campo gravitazionale puro.

§3. Relazione con la teoria di Maxwell.

Nel caso che vi sia un campo elettromagnetico, cioè che i $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ovvero i $g_{\mu\nu}$ contengano una componente antisimmetrica, non si raggiunge una soluzione dell'equazione (10a) rispetto alle quantità $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, cosa che rende significativamente più difficile la comprensione dell'intero sistema. La soluzione si raggiunge tuttavia quando ci restringiamo allo studio della prima approssimazione. Ci proponiamo di far questo, e di nuovo supponiamo l'annullarsi di ϕ_μ.

Facciamo quindi l'ipotesi che sia

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \tag{13}$$

dove i $\gamma_{\mu\nu}$ sono simmetrici, i $\phi_{\mu\nu}$ antisimmetrici. I $\gamma_{\mu\nu}$ e i $\phi_{\mu\nu}$ sono infinitamente piccoli del prim'ordine. Quantità del second'ordine e di ordine superiore saranno trascurate. Allora anche i $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sono infinitamente piccoli del prim'ordine.

In queste circostanze il sistema di equazioni (10a) assume la forma più semplice

$$+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0. \tag{10b}$$

Con permutazione ciclica doppia degli indici μ, ν, α si ottengono altre due equazioni. Dalle tre equazioni i Γ si possono calcolare in modo analogo al caso simmetrico. Si ottiene

$$-\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{14}$$

L'equazione (4) si riduce al primo e al terzo termine. Se si sostituisce in essa l'espressione per $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ data dalla (14) si ottiene

$$-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0. \tag{15}$$

Prima di trattare ulteriormente la (15), sviluppiamo l'equazione (7). Dalla (13) segue immediatamente che con l'approssimazione che ci interessa si ha

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} - \phi_{\mu\nu}. \tag{16}$$

Tenendo conto di questo la (7) diventa

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{17}$$

Ora sostituiamo nella (15) l'espressione data nella (13) e tenendo conto della (17) otteniamo

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0. \tag{19}$$

Le equazioni (18), che notoriamente si possono semplificare mediante una scelta opportuna delle coordinate, sono le stesse di quelle in assenza di un campo elettromagnetico. Parimenti le equazioni (17), (19) per il campo elettromagnetico non contengono le quantità $\gamma_{\mu\nu}$ relative al campo gravitazionale. I due campi sono quindi - in accordo con l'esperienza - in prima approssimazione mutuamente indipendenti.

Le equazioni (17), (19) sono quasi completamente equivalenti alle equazioni di Maxwell per lo spazio vuoto. La (17) costituisce un sistema di Maxwell. L'espressione

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu},$$

che secondo Maxwell deve annullarsi, per la (17) e la (19) non si annulla necessariamente, ma ciò accade per la sua divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}\right).$$

Le (17) e (19) sono pertanto essenzialmente identiche alle equazioni di Maxwell dello spazio vuoto.

Riguardo alla corrispondenza di $\phi_{\mu\nu}$ con i vettori elettrico e magnetico (rispettivamente $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{h}$) farò un'osservazione che pretende una validità indipendente dalla teoria qui esposta. Secondo la meccanica classica, che lavora con forze centrali, assieme ad ogni processo di moto V si dà il processo inverso $\bar{V}$, nel quale le stesse configurazioni vengono percorse con sequenza opposta. Questo processo di moto inverso $\bar{V}$ si ottiene anche formalmente dall'originario V se si esegue in quest'ultimo la sostituzione

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = -t.$$

Analogamente accade secondo la relatività generale nel caso di un campo di gravitazione puro. Per ottenere da una soluzione V la corrispondente soluzione $\bar{V}$ bisogna sostituire in tutte le funzioni di campo $t' = -t$ e oltre a ciò rovesciare il segno delle componenti di campo g_{14}, g_{24}, g_{34} e delle componenti dell'energia T_{14}, T_{24}, T_{34}. Il cambio di segno di g_{14}, g_{24}, g_{34} e di T_{14}, T_{24}, T_{34} avviene spontaneamente per la legge di trasformazione dei tensori.

Questa producibilità del processo inverso mediante trasformazione della coordinata temporale ($t' = -t$) la si deve considerare come una legge generale, la cui validità può essere richiesta anche per processi elettromagnetici. Per inversione del processo di moto degli elettroni cambia il segno delle componenti magnetiche, non di quelle elettriche. Si devono pertanto associare le componenti ϕ_{23}, ϕ_{31}, ϕ_{12}

all'intensità del campo elettrico, le componenti ϕ_{14}, ϕ_{24}, ϕ_{34} a quello magnetico. L'associazione invertita finora consueta dev'essere abbandonata. Si è finora evidentemente preferito, perché appare più comodo, esprimere la densità di corrente mediante un vettore (tensore di rango uno) piuttosto che con un tensore antisimmetrico di rango tre.

Nella teoria esposta qui la (7) ovvero la (17) è quindi l'espressione della legge dell'induzione magnetoelettrica. Ciò corrisponde anche al fatto che al secondo membro di questa equazione non compare alcuna espressione, che potrebbe essere interpretata come densità di corrente elettrica.

La prima domanda è ora se la teoria qui sviluppata lasci apparire in modo comprensibile l'esistenza di masse elettriche centrosimmetriche prive di singolarità. Ho affrontato questo problema assieme al Sig. Dr. J. Grommer, che in questi ultimi anni mi è stato fedelmente accanto in tutte le ricerche di calcolo nel campo della relatività generale. Egli e l'"International Education Board", che ha reso possibile la durevole collaborazione con il Sig. Grommer, sono qui sinceramente ringraziati.

(Comunicato il 4 settembre)