Teoria della relatività generale e legge del moto[1]

A. Einstein e J. Grommer

Introduzione

Se si considera la teoria di Newton della gravitazione come teoria di campo, si può scomporre il contenuto complessivo della teoria in due parti logicamente indipendenti: essa contiene infatti in primo luogo l'equazione di campo di Poisson (eventualmente estesa con un termine temporale), e in secondo luogo la legge del moto del punto materiale. La legge di Poisson prescrive il campo per un movimento dato della materia, l'equazione di moto di Newton il moto della materia sotto l'influenza di un campo dato.

Anche l'elettrodinamica di Maxwell-Lorentz riposa in modo analogo su due leggi fondamentali logicamente indipendenti l'una dall'altra, ossia in primo luogo sulle equazioni di campo di Maxwell-Lorentz, che determinano il campo a partire dal moto della materia elettricamente carica, e in secondo luogo sulla legge del moto per gli elettroni sotto l'influenza della forza di Lorentz del campo elettromagnetico.

Che le due leggi della teoria di Maxwell-Lorentz siano realmente indipendenti l'una dall'altra, può essere chiarito facilmente nel caso particolare di due elettroni a riposo. Il campo con il potenziale elettrostatico

$$\phi = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

soddisfa le equazioni di campo. Queste da sole non ci permettono di concludere che i due elettroni non possono stare in quiete (ma che sotto l'influenza della loro mutua interazione devono mettersi in moto).

Che le equazioni di campo di Maxwell-Lorentz non dicano nulla circa il moto degli elettroni, discende semplicemente dalla loro linearità. A un elettrone E_1 mosso a piacimento corrisponde infatti un campo generato da questi, determinato dalle equazioni di campo (f_1). Per un elettrone E_2 mosso parimenti in un qualsiasi altro modo, pure presente da solo, le equazioni di campo fissano il campo corrispondente (f_2). Se i due elettroni considerati sono presenti insieme e ad una distanza mutua finita, e se facciamo loro eseguire i moti considerati poc'anzi, essi determinano il campo ($f_1 + f_2$), che parimenti soddisfa le equazioni di campo. Quest'ultimo risultato discende dalla linearità delle equazioni di campo. Ma da qui scende pure che la legge del moto è logicamente indipendente dalle equazioni di campo.

Di questo dato di fatto del fondamento eterogeneo dell'elettrodinamica è particolarmente disturbante che, mentre il moto della particella carica è prescritto da un'equazione differenziale ordinaria, il comportamento del campo è descritto da un'equazione differenziale alle derivate parziali. Mie ha tentato di rimediare a questo difetto, cercando di costruire una teoria del continuo per la particella elettrica. In questa teoria le componenti della densità di corrente si dovrebbero trattare come funzioni continue che appartengono al "campo" come le componenti di campo elettromagnetiche, e mediante equazioni di campo aggiuntive si dovrebbe fissare anche il comportamento della densità di corrente in modo totalmente causale. Questo tentativo non ha portato finora ad alcun risultato, ma è rimasto un programma

[1] Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 2-13 (1927).

imperativo (Weyl, Eddington) nell'ambito puramente elettrodinamico. L'idea che ne sta alla base è da intendere in generale così. L'intera realtà fisica è descritta da un campo privo di singolarità, che descrive non solo lo "spazio vuoto", ma anche le particelle materiali, e questa regolarità è governata per intero da equazioni differenziali alle derivate parziali. In questo modo Mie cercava di superare il dualismo summenzionato, che disturba ogni spirito sistematico.

Come appare la teoria della relatività generale, quando la si consideri da questo punto di vista? Esiste anche in essa il dualismo legge di campo - legge di moto? La situazione non è qui così semplice. Distingueremo diversi approcci.

Il primo approccio è ricalcato sulla teoria di Newton. Si accettano parimenti nella teoria della gravitazione

1. la legge di campo dello spazio vuoto ($\mathfrak{R}_i^k = 0$),
2. la legge del moto del punto materiale (legge della linea geodetica).

Il secondo approccio integra la legge di campo con l'introduzione del tensore energetico $\mathfrak{T}_i^k$ della materia (e del campo elettromagnetico):

$$(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{R}) + \mathfrak{T}_i^k = 0.$$

Se si assume che non debba esistere alcuna singolarità, in questa equazione è contenuta una teoria che è l'analoga della teoria di Mie. La teoria richiede un completamento che non può essere ottenuto tramite il solo principio di relatività: occorre che i $\mathfrak{T}_i^k$ siano espressi mediante una qualche grandezza di campo (continua), e si dovranno enunciare le equazioni differenziali che determinano il comportamento di quest'ultima. Solo allora si avrebbe una teoria compiuta.

Ma anche senza quel completamento $\mathfrak{T}_i^k$ non è prescrivibile a piacere. Ciò deriva dal fatto che la divergenza (covariante) di $\mathfrak{R}_i^k - 1/2\delta_i^k \mathfrak{R}$ si annulla identicamente. $\mathfrak{T}_i^k$ deve quindi soddisfare alla condizione che la divergenza di questo tensore si annulli. Se si assume che la materia sia disposta entro "tubi d'universo" stretti, si ricava con una trattazione elementare il risultato che gli assi di tali "tubi d'universo" sono linee geodetiche (in assenza di campi elettromagnetici). Ciò significa: la legge del moto è conseguenza della legge di campo.

La cosa appare come se la teoria della relatività generale avesse già superato vittoriosamente quell'increscioso dualismo. Ciò sarebbe vero sia se noi avessimo già ottenuto la rappresentazione della materia con un campo continuo, o se per lo meno ci fossimo sincerati che si potrebbe ottenerla un giorno. Ma in proposito non si può proprio dir nulla. Tutti i tentativi dell'ultimo anno di rappresentare le particelle elementari della materia mediante campi continui sono falliti. Il sospetto che questa non sia affatto la strada giusta per la comprensione delle particelle materiali è divenuto in noi assai forte, dopo moltissimi tentativi inutili, dei quali non parlerò qui.

Ci si incammina così per la strada del considerare le particelle come punti singolari, ovvero come linee d'universo singolari. Ciò è suggerito anche dal fatto che tanto le equazioni del campo gravitazionale puro quanto le equazioni integrate dal campo elettromagnetico di Maxwell ($\mathfrak{T}_i^k$ =tensore dell'energia di Maxwell) possiedono semplici soluzioni a simmetria centrale, che contengono una singolarità.

Siamo condotti quindi ad un terzo approccio, che oltre al campo di gravitazione e al campo elettromagnetico non consente ulteriori variabili di campo (a prescindere forse dal "termine cosmologico") ma consente in cambio linee d'universo singolari.

Se accadesse che con questo approccio si dovessero prescrivere per le singolarità equazioni di moto apposite, indipendenti dalle equazioni di campo, come accade con la teoria di Maxwell-Lorentz, la strada si rivelerebbe poco attraente.

Invece è risultato verosimile che la legge del moto delle singolarità sia interamente fissata dalle equazioni di campo e dal carattere delle singolarità, senza che si debbano introdurre ulteriori ipotesi. Mostrar ciò è lo scopo della presente ricerca.

Alla possibilità che la legge del moto delle singolarità potesse esser contenuta nelle equazioni di campo della gravitazione avevamo pensato già da molto tempo. Ma il seguente argomento sembra opporsi e distoglierci. La legge di campo della gravitazione nei casi che capitano di fatto si lascia approssimare con grandissima accuratezza da una legge lineare. La legge lineare consente però, come quelle elettrodinamiche, singolarità in moto arbitrario. Appare naturale che si potrebbe procedere da tale soluzione approssimata mediante approssimazioni successive ad una soluzione esatta che differisse pochissimo da essa. Se ciò accadesse, sarebbe possibile un campo corrispondente alla soluzione esatta con un moto delle singolarità dato a piacere, e la legge del moto delle singolarità non sarebbe quindi contenuta nelle equazioni di campo. Che ciò tuttavia non possa accadere deriva da ricerche su campi di gravitazione statici a simmetria assiale, delle quali siamo debitori a Weyl, Levi Civita e Bach[2]. Questo si mostrerà subito, e subito dopo si tratterà il problema in generale. In questo lavoro ci limiteremo alla trattazione del campo gravitazionale puro, nonostante che l'introduzione del campo elettromagnetico non comporti nessuna difficoltà particolare.

§1. Singolarità in un campo (caso statico a simmetria assiale)

Secondo Weyl e Levi-Civita nel caso statico a simmetria assiale mediante l'introduzione delle "coordinate canoniche cilindriche" si può portare ds^2 nella forma

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \; f^2 d\sigma^2 = r^2 d\vartheta^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2), \tag{1}$$

dove f e γ dipendono solo da r e z, come pure la quantità ψ, legata ad f dall'equazione

$$f = e^{\psi}. \tag{2}$$

ψ soddisfa all'equazione del potenziale (di Poisson) in coordinate cilindriche

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}\right) = 0, \tag{3}$$

dove gli indici significano derivazione rispetto a z e ad r rispettivamente. Se ψ è nota, da essa si può determinare γ mediante l'equazione

$$d\gamma = 2r\psi_z\psi_r dz + r(\psi_r^2 - \psi_z^2)dr, \tag{4}$$

dove $d\gamma$ per la (3) è sempre un differenziale totale.

---

[2] H. Weyl, Ann. d. Physik **54** (1918), pp. 117-145; Ann. d. Physik **59** (1919), pp. 185-188. Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani VIII Note, Rend. Acc. dei Lincei, 1919. R. Bach, Math Zeitschr. Vol. 13, fascicolo 1-2, 1922.

Perché il campo in un punto fuori dall'asse z sia regolare, basta la regolarità di ψ. Perché il campo metrico sia regolare anche sull'asse z, occorre inoltre che sull'asse z sia $\gamma = 0$; se ciò non accadesse, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la lunghezza del diametro per un cerchio infinitamente piccolo tracciato attorno ad un punto dell'asse z e normale a tale asse si discosterebbe da π, e ciò significherebbe una singolarità della metrica. Questo si vede facilmente dalla (1).

Trattiamo ora la soluzione

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{5}$$

che soddisfa la (3). Come Weyl ha mostrato, questa soluzione non è rigorosamente a simmetria centrale; ma più m è piccolo, più essa approssima la simmetria centrale. L'uso della (4) dà

$$\gamma = -\frac{m^2}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^2}. \tag{6}$$

γ si annulla così sia sul semiasse positivo che sul semiasse negativo dell'asse z, come dev'essere. La metrica è euclidea all'infinito.

Trattiamo ora il caso in cui, oltre al campo che origina dalla singolarità ora considerata, sia presente anche un campo "esterno". Esprimiamo ciò ponendo

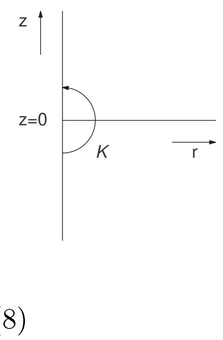
$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} + \overline{\psi}. \tag{5a}$$

$\overline{\psi}$ sia ugualmente funzione solo di r e di z, soddisfi all'equazione (3) e sia regolare nell'intorno di $r = z = 0$. A causa della simmetria assiale possiamo porre

$$\overline{\psi} = \alpha_0 + \alpha_1 z + G, \tag{7}$$

dove G raccoglie formalmente i termini di grado secondo e superiore in r e z. L'equazione (4) determina γ.

Risulta dalla (4) che γ è costante lungo l'asse z fintanto che ci si trova da un lato rispetto alla singolarità posta in $r = 0$. Possiamo pertanto porre $\gamma = 0$ sul semiasse z negativo, come è necessario secondo quanto detto prima. Perché la soluzione sia regolare eccetto che nel punto $r = z = 0$ occorre tuttavia che γ si annulli anche lungo il semiasse z positivo. Ciò accadrà se e solo se l'integrale $\int d\gamma$ esteso al semicerchio K ($r^2 + z^2$ =cost.) infinitamente piccolo mostrato nel disegno



qui accanto si annulla. Il calcolo conduce alla condizione[3]:

$$\alpha_1 = 0, \tag{8}$$

[3] Il valore di γ per z positivi è $4\alpha_1 m$. In ogni caso m e α_1 sono assai piccole rispetto all'unità. Se le consideriamo come quantità del primo "ordine", la grandezza che misura la violazione della regolarità della metrica che compare in generale è data da una quantità del second'ordine.

mentre per G non si dà alcuna restrizione.

Perché la metrica nell'intorno di un punto singolare rimanga regolare in presenza di un campo esterno occorre quindi che nel punto singolare l'intensità del campo esterno si annulli. In questo senso la condizione di equilibrio è contenuta nelle equazioni di campo. Sulla base di questo risultato si può ben giungere al convincimento che del tutto in generale la legge del moto delle singolarità sia contenuta nelle equazioni di campo. Lo si dimostrerà più in generale nel seguito.

§2. Una condizione di superficie equivalente alle equazioni di campo

L'idea generale, sulla quale si fondano i ragionamenti e i calcoli qui di seguito riportati, è la seguente. È ben noto che alle equazioni della gravitazione corrispondono equazioni differenziali lineari, le cui soluzioni differiscono assai poco, nei casi che si vengono di fatto a trattare, dalle soluzioni delle equazioni esatte. Ma d'altra parte abbiamo visto che non tutte le soluzioni delle equazioni approssimate corrispondono a soluzioni esatte. Per le equazioni approssimate esiste per esempio una soluzione, che descrive un punto materiale in quiete in un campo di gravitazione omogeneo; per le equazioni esatte una tale soluzione rigorosa non esiste, come abbiamo visto, almeno quando si richieda l'assenza di singolarità del campo metrico al di fuori del punto materiale. Dobbiamo cercare perciò condizioni aggiuntive che le soluzioni delle equazioni approssimate debbono soddisfare, perché siano approssimazioni di soluzioni esatte. Queste condizioni che derivano dalle equazioni di campo esatte devono riferirsi al campo nell'intorno immediato di una linea d'universo singolare. Perciò abbiamo bisogno di una condizione di superficie, analogamente a come già è stato proposto da Hilbert e Klein.

Consideriamo la funzione di Hamilton

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{9}$$

e deriviamone le equazioni di campo, variandola indipendentemente rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ e a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Le equazioni di campo si scrivono allora

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_\tau}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\right) = 0, \tag{11}$$

dove $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}$ indica la derivata $\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}/\partial x_\tau$. Se si moltiplica la (10) per $\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, la (11) per $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, si ottiene dopo una trasformazione semplice l'equazione

$$\delta\mathfrak{H} - \frac{\partial}{\partial x_\tau}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{12}$$

Questa equazione vale per una variazione arbitraria di $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ e di $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, quindi anche per una che si possa ottenere mediante una pura trasformazione infinitesima del sistema di coordinate (variazione per trasformazione). Per una tale variazione

$\delta\mathfrak{H}$ si annulla perché $\mathfrak{H}/\sqrt{-g}$ è un invariante, e perché per le equazioni di campo $\mathfrak{H}$ si annulla ovunque. Si ha inoltre

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\xi^\sigma_{,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\xi^\sigma_{,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi^\alpha_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma}\xi^\sigma - \xi^\alpha_{,\mu\nu}, \tag{13}$$

dove ξ^σ è un vettore infinitesimo (assieme alle derivate $\xi^\sigma_{,\alpha}$ eccetera). Per la (9) si ha

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\tau}} = -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta^\tau_\alpha + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{\mu\tau}\delta^\nu_\alpha + \mathfrak{g}^{\nu\tau}\delta^\mu_\alpha\right). \tag{14}$$

Tenendo conto delle (13) e (14) si ottiene dalla (12) l'equazione

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix} \left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu,\tau}\right)\xi^\tau \\ -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\Gamma^\alpha_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\tau}\xi^\tau_{,\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\xi^\alpha_{,\tau} - \xi^\alpha_{,\mu\nu}\right) \\ +\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(-\Gamma^\nu_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\tau}\xi^\tau_{,\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\xi^\nu_{,\tau} - \xi^\nu_{,\mu\nu}\right)\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Questa equazione, che è equivalente alle equazioni di campo e che costituisce la base delle nostre considerazioni successive, la trasformeremo un po' in un modo che sarà presto chiaro. Trasformeremo la parte che deriva dal primo dei tre termini della parentesi nella (15) estraendo la derivazione rispetto ad x_τ in modo tale che compaiano $\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}$ e $\Gamma^\nu_{\mu\nu,\alpha}$. Queste derivate dei Γ poi, con la relazione $\mathfrak{H} = 0$ valida a causa delle (9) e (10) le esprimeremo con le sole quantità Γ. La prima delle tre parti della (15) diventa quindi con trasformazioni semplici

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix} \xi^\sigma\left\{(-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma}) - \delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau})\right\} \\ +\xi^\alpha_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\nu}) - \xi^\sigma_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu})\end{bmatrix}. \tag{16}$$

La ragione di questa trasformazione sarà chiara al più presto.

Riassumiamo il nostro risultato nella forma seguente

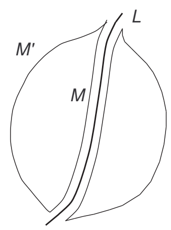
$$\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{15a}$$

$$\mathfrak{A}^\alpha = \mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma + \mathfrak{B}^\alpha, \tag{15b}$$

$$\text{dove } \mathfrak{t}^\alpha_\sigma = (-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma}) - \delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}) \tag{15c}$$

e $\mathfrak{B}^\alpha$ è una funzione lineare omogenea delle derivate prime e seconde di ξ^α rispetto alle coordinate, come segue dalle (15) e (16). $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma$ è noto come "pseudotensore dell'energia" del campo gravitazionale; la legge di conservazione dell'energia del campo gravitazionale si ottiene dalla (15a), ponendo ξ^α costante.

L'integrazione della (15a) estesa ad una regione priva di singolarità dà una condizione di superficie. L'integrale di superficie di $\mathfrak{A}^\alpha$ sopra una tale ipersuperficie (tridimensionale) si annulla sempre, comunque sia scelto il vettore ausiliario (ξ^α) (a meno delle condizioni di continuità evidenti dalla derivazione). Si può anche far sì che $\mathfrak{A}^\alpha$ sia diverso da zero solo in una parte scelta a piacimento della superficie; da qui deriva in primo luogo il significato della condizione per lo studio dei



campi nell'immediata vicinanza di una linea singolare. Sia infatti L una linea di singolarità. Pensiamo che un tratto finito di questa sia avvolto in un "mantello" M infinitamente stretto, e anche in un mantello M' di ampiezza finita, congiunti tra loro agli estremi in modo tale da costituire insieme l'involucro di uno spazio duplicemente connesso, sul quale integriamo la (15a). Scegliamo gli ξ^σ in modo tale che essi si annullino assieme alle loro derivate ovunque sulla superficie al di là di una distanza assai piccola da L. Allora l'integrale di $\mathfrak{A}^\alpha$ esteso ad M' si annulla, eccetto che per i contributi che forniscono gli estremi che raggiungono M. Con una tale scelta di ξ^σ si ottiene un'asserzione circa il campo immediatamente prossimo ad L, cioè un'asserzione circa il moto del punto materiale.

§3. Conseguenze della condizione integrale

La più semplice conseguenza che possiamo trarre dalla (15a) riguarda l'equilibrio del punto singolare in un campo di gravitazione stazionario. Scegliamo questa linea singolare come asse x_4, e il vettore ξ in modo tale che le sue derivate prime e seconde si annullino sul mantello interno. Allora si può facilmente far sì che l'integrale esteso ai tratti terminali del mantello esterno si annulli, perché i due estremi danno contributi uguali ed opposti. L'integrale sul mantello interno si annulla da solo, e con esso l'integrale esteso ad una sezione spaziale x_4 =cost. Se chiamiamo $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ la parentesi graffa nella (16), si annulla quindi l'integrale tridimensionale

$$\int \left(\mathfrak{t}_\sigma^1 ds^{23} + \mathfrak{t}_\sigma^2 ds^{31} + \mathfrak{t}_\sigma^3 ds^{12}\right) \tag{17}$$

per ciascun σ, esteso ad una sezione del mantello M. Questa è proprio la condizione di equilibrio che si ottiene quando si sostituisca al punto singolare una distribuzione continua di flusso di energia-materia, come si è fatto finora nella ricerca in relatività generale. La consueta condizione per l'equilibrio di un punto materiale in un campo di gravitazione resta così immutata, qualora si sostituisca il punto materiale con una singolarità. Con l'aggiunta del termine elettromagnetico si potrebbe mostrare facilmente che questa vale anche per un punto materiale che possieda una carica elettrica e si trovi sotto l'azione di un campo di gravitazione e di un campo elettrico. Basta solo aggiungere nella (17) ai $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ le componenti del tensore d'energia elettromagnetico.

Per ottenere l'azione della forza sul punto singolare espressa mediante massa e intensità del campo esterno, dobbiamo fare una considerazione che è d'importanza per l'intero problema. Soluzioni rigorose delle equazioni della gravitazione si possono ottenere solo assai di rado con i nostri mezzi odierni, mentre si ottengono facilmente soluzioni per la prima approssimazione, poiché le equazioni differenziali corrispondenti sono lineari. Tale approssimazione è caratterizzata dal fatto che si pone

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{18}$$

dove i $\gamma_{\mu\nu}$ sono piccoli rispetto ad 1 e i quadrati e i prodotti dei γ (e delle loro derivate) vengono trascurati; chiamiamo i $\gamma_{\mu\nu}$ quantità piccole del prim'ordine. Abbiamo ora visto che di certo non a tutte le soluzioni di quelle equazioni differenziali lineari corrispondono soluzioni esatte. Per esempio esiste una soluzione delle equazioni lineari che corrisponde ad una singolarità puntiforme a riposo in un campo di gravitazione omogeneo, mentre una soluzione rigorosa di questo tipo non esiste, perché le condizioni d'equilibrio derivanti dalle equazioni rigorose sono in questo caso violate. Davanti a questa situazione sorge la domanda: a quali condizioni aggiuntive deve soddisfare una soluzione approssimata, perché le corrisponda una soluzione esatta?

In ogni caso una tale condizione deve soddisfare al requisito che in essa la seconda approssimazione per le quantità $\gamma_{\mu\nu}$ e quelle più alte non intervengano, o comunque non intervengano allo stesso ordine che compete alla prima approssimazione di $\gamma_{\mu\nu}$. Qui sta la ragione del perché è stata fatta la trasformazione (16), ovvero del perché si deve fare, se si vuole arrivare ad una condizione di equilibrio utilizzabile. Siano infatti $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma}$ piccoli del prim'ordine, allora i $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ sono piccoli del second'ordine. Se si pensa di aggiungere ai $g_{\mu\nu}$ un termine del second'ordine, i $\mathfrak{t}^{\nu}_{\sigma}$ saranno modificati per un termine del terz'ordine, che possiamo trascurare. Sebbene le (15)-(16) riguardino quantità del second'ordine, è consentito nel caso particolare dell'equilibrio trascurare in $g_{\mu\nu}$ le quantità del second'ordine. Possiamo pertanto introdurre per $\gamma_{\mu\nu}$ nelle (18) soluzioni delle equazioni approssimazione lineare delle equazioni di campo (10). Nell'ambito di questa approssimazione è permesso costruire additivamente il campo ($\gamma_{\mu\nu}$) nell'intorno di una singolarità con una parte "interna" $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ ed una parte "esterna" $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$, regolare nel punto singolare. Per $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ si può introdurre la soluzione statica, che scriviamo nella forma:

$$\begin{gathered}\overline{\gamma_{11}} = \overline{\gamma_{22}} = \overline{\gamma_{33}} = -\overline{\gamma_{44}} = -\frac{2m}{r} \left(= -\frac{2m}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right), \\ \overline{\gamma_{\sigma\tau}} = 0 \quad (\text{per } \sigma \neq \tau). \end{gathered} \tag{19}$$

Per il calcolo della (17) si deve osservare inoltre che solo i prodotti di quantità del campo interno con quantità del campo esterno possono contribuire al risultato. I termini di secondo grado che riguardano solo il campo interno devono infatti cancellarsi per ragioni di simmetria; i termini che riguardano solo il campo esterno non danno alcun contributo all'integrale a causa della piccolezza della superficie d'integrazione.

Dal momento che abbiamo già adottato coordinate quasi euclidee, è conveniente scegliere come superficie d'integrazione una sfera ($r =$ cost.), di modo che la (17) prende la forma

$$\int \left(\mathfrak{t}^1_\sigma \frac{x_1}{r} + \mathfrak{t}^2_\sigma \frac{x_2}{r} + \mathfrak{t}^3_\sigma \frac{x_3}{r} \right) dS. \tag{17a}$$

Il calcolo dà $-8\pi m \frac{\partial \overline{\overline{\gamma_{44}}}}{\partial x_\sigma}$. Quindi come condizione di equilibrio del punto singolare si ha

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma_{44}}}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{20}$$

È facile mostrare che l'equazione della linea geodetica nel caso dell'equilibrio in un campo stazionario porta, nell'approssimazione da noi considerata, alla stessa condizione.

Passiamo ora al caso che il punto singolare si trovi in un campo non stazionario. Anche in questo caso valgono l'equazione (15a) e la corrispondente condizione integrale. Trasformiamo a riposo il punto singolare, cosicché l'asse x_4 sia di nuovo la singolarità in quattro dimensioni. Scegliamo inoltre gli ξ^α in modo che siano diversi da zero lungo un tratto del mantello M, ma si annullino ovunque su M'. Siano inoltre gli ξ^α continui nell'intorno dell'asse x_4.

Poiché gli ξ^α devono annullarsi agli estremi temporali dell'integrale, non possiamo più sceglierli costanti. Pertanto $\mathfrak{B}^\alpha$ nella (15b) non si annulla. Si ha da qui una difficoltà particolare. Mentre infatti per $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ la seconda approssimazione nei $g_{\mu\nu}$, come abbiamo visto, non ha importanza, quando ci si limiti nei $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ a termini del second'ordine, ciò non accade per $\mathfrak{B}^\alpha$. Per esempio, per valutare correttamente il termine $\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\tau\nu}^\alpha\xi_{,\mu}^\tau$ fino a quantità del second'ordine, poiché $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ contiene un termine d'ordine zero ($\delta_{\mu\tau}$), occorre che $\Gamma_{\tau\nu}^\alpha$ sia noto esattamente fino a termini del second'ordine, e quindi anche i $g_{\mu\nu}$ devono esser noti fino al second'ordine. Non ci si potrebbe quindi accontentare di soluzioni delle equazioni di campo nell'approssimazione lineare.

Risulta tuttavia che questa difficoltà si può risolvere nel modo seguente. Si ponga

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \overline{\gamma_{\mu\nu}} + \overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}} + \epsilon_{\mu\nu}. \tag{18a}$$

I $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ sono ancora dati dalla (19), mentre i $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$ si riferiscono al campo esterno e sono continui nell'intorno della singolarità. $\epsilon_{\mu\nu}$ è una quantità del second'ordine, proporzionale alla "massa" m e al campo esterno. Appare ora che con una tale ipotesi le equazioni di campo possano essere corrette in seconda approssimazione, trascurando termini proporzionali a m^2 e trascurando termini quadratici nell'intensità del campo esterno ($\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$), essendo la dipendenza degli $\epsilon_{\mu\nu}$ da r non del tipo r^{-1} (come accade per $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$, ma del tipo r^0. Da ciò segue allora che il termine del second'ordine $\epsilon_{\mu\nu}$ non ha alcuna influenza sull'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso al mantello M infinitamente stretto.

Si può inoltre dimostrare facilmente che l'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso al mantello M si annulla con una scelta opportuna delle coordinate. Queste ultime possono infatti essere scelte chiaramente in modo tale che ($\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$) si annulli sulla linea singolare (asse x_4) (assi x_1, x_2, x_3 perpendicolari alla linea singolare e unità delle coordinata uguale all'unità di lunghezza su tutti e quattro gli assi). Si assuma inoltre che per un tale sistema di coordinate (indistorto) la singolarità sia a simmetria centrale, cioè che il campo sia calcolabile con la (19). Questa non è propriamente affatto un'ipotesi necessaria. Ma così semplifichiamo molto il calcolo, e l'ipotesi è convalidata dal fatto che essa porta all'annullarsi dell'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso ad M per ogni scelta di ξ^α.

Si mostrerà lo sviluppo del conto per il primo termine di $\mathfrak{B}^\alpha$

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\tau\nu}^\alpha\xi_{,\mu}^\tau.$$

Sia $g_{\mu\nu}$ che $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ si comportano nell'intorno della singolarità, a prescindere da termini che rimangono finiti, come r^{-1}, e i Γ come r^{-2}. Solo la parte dei Γ proporzionale a r^{-2} può contribuire qualcosa al nostro integrale. Poiché inoltre i termini proporzionali ad m^2 e i termini quadratici in $\overline{\overline{\gamma}}$ non ci interessano, il termine di $\mathfrak{B}^\alpha$ di cui sopra può essere sostituito da

$$\overline{\overline{\mathfrak{g}^{\mu\nu}}}\,\overline{\overline{g^{\alpha\beta}}}\,\overline{\begin{bmatrix}\tau\nu\\ \beta\end{bmatrix}}\xi^\tau_{,\mu}.$$

Dobbiamo ritenere solo quei termini che per integrazione su una sfera infinitamente piccola diano qualcosa di finito.

Con la scelta delle coordinate di cui sopra, quest'espressione si può sostituire con

$$\overline{\begin{bmatrix}\tau\mu\\ \alpha\end{bmatrix}}\xi^\tau_{,\mu}$$

ovvero ulteriormente con

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{\gamma_{\tau\alpha}}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\overline{\gamma_{\mu\alpha}}}{\partial x_\tau}-\frac{\partial\overline{\gamma_{\tau\mu}}}{\partial x_\alpha}\right)\xi^\tau_{,\mu}.$$

Questo va moltiplicato per x_α/r e integrato sulla superficie sferica. Il primo termine dà qualcosa di finito solo per $\alpha=\tau$, $\mu=\alpha$; il secondo per $\mu=\alpha$, $\tau=\alpha$; il terzo per $\tau=\mu$. Il risultato di questa integrazione è

$$\frac{8\pi m}{3}\xi^\alpha_{,\alpha}-4\pi m(\xi^\alpha_{,\alpha}-\xi^4_{,4}),$$

dove α va sommato da 1 a 3.

Se si esegue questo calcolo per tutti i termini di $\mathfrak{B}^\alpha$, si ottiene

$$\int\mathfrak{B}^\alpha\frac{x_\alpha}{r}dS=16\pi m\xi^4_{,4}.$$

Se si integra questa espressione su x_4 tra due estremi, ai quali ξ^α s'annulli, anche l'integrale si annulla completamente[4]. L'integrale sul mantello interno si riduce pertanto all'integrale su $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma$, come nel caso stazionario. Da qui si conclude esattamente come prima che il moto del punto singolare è caratterizzato dalla linea geodetica determinata rispetto al campo "esterno" $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$.

Riepilogo

Se nel campo di gravitazione si assumono le masse come singolarità, la legge del moto è completamente determinata dalle equazioni di campo[5]. Se si approssima il campo totale con le soluzioni di equazioni lineari la legge del moto è quella della linea geodetica. In un lavoro successivo sarà dedotta dalle equazioni di campo la legge del moto per gli elettroni trattati come punti singolari.

È d'altra parte ben noto che in natura non si presentano masse atomiche elettricamente neutre, e quindi all'oggetto di questo lavoro non corrisponde direttamente un oggetto in natura. Il progresso qui conseguito sta nel fatto che si è dimostrato per la prima volta che una teoria di campo può contenere in sé una teoria del comportamento meccanico di discontinuità. Ciò può essere d'importanza per la teoria della materia, ovvero per la teoria dei quanti.

[4] Per il calcolo va notato solo che gli ultimi termini della riga 2 e della riga 3 della parentesi della (15) si annullano perché non danno alcun contributo del tipo r^{-2} all'integrando.

[5] Nel presente lavoro ciò è dimostrato completamente solo per il caso dell'equilibrio.