Sull'elettrodinamica di Minkowski dei corpi in movimento[1]

M. v. Laue

(Ricevuto il 19 luglio 1950)

In questa elettrodinamica non si è pervenuti finora a una scelta tra il tensore di Minkowski e altre ipotesi. Il primo è non simmetrico e pertanto contraddice la formulazione di Planck per la legge dell'inerzia dell'energia: densità d'impulso uguale corrente d'energia divisa per il quadrato della velocità della luce. Le altre ipotesi rispettano per l'appunto la simmetria del tensore, e quindi quella formulazione della legge d'inerzia. Questo lavoro dimostra che l'ipotesi di Minkowski è quella giusta.

§1. Poiché nelle nostre argomentazioni dobbiamo prendere le mosse dai fondamenti dati da Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi, ne riassumiamo in primo luogo l'essenziale.

Descrivono il campo elettromagnetico due esavettori, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$; essi e gli esavettori ad essi duali $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}^*$ sono posti in corrispondenza alle intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, allo spostamento elettrico $\mathfrak{D}$ e all'induzione magnetica $\mathfrak{B}$ mediante le equazioni:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}_{10}=\mathbf{M}^*_{23}=-i\mathfrak{E}_1,\ \mathbf{M}_{20}=\mathbf{M}^*_{31}=-i\mathfrak{E}_2,\ \mathbf{M}_{30}=\mathbf{M}^*_{12}=-i\mathfrak{E}_3,\\
\mathbf{M}_{23}=\mathbf{M}^*_{10}=\mathfrak{B}_1,\ \mathbf{M}_{31}=\mathbf{M}^*_{20}=\mathfrak{B}_2,\ \mathbf{M}_{12}=\mathbf{M}^*_{30}=\mathfrak{B}_3,\\
\mathbf{B}_{10}=\mathbf{B}^*_{23}=-i\mathfrak{D}_1,\ \mathbf{B}_{20}=\mathbf{B}^*_{31}=-i\mathfrak{D}_2,\ \mathbf{B}_{30}=\mathbf{B}^*_{12}=-i\mathfrak{D}_3,\\
\mathbf{B}_{23}=\mathbf{B}^*_{10}=\mathfrak{H}_1,\ \mathbf{B}_{31}=\mathbf{B}^*_{20}=\mathfrak{H}_2,\ \mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}^*_{30}=\mathfrak{H}_3.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Allora valgono le equazioni, scritte in forma tetradimensionale, ma altrimenti immutate rispetto a quelle introdotte da Maxwell

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Div}\mathbf{M}^*=0,\ \text{cioè}\ \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathbf{M}^*_{\alpha\beta}=0,\\
\mathrm{Div}\mathbf{B}=P,\ \text{cioè}\ \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathbf{B}_{\alpha\beta}=P_\alpha,\\
(\alpha=1,2,3,0)
\end{gathered}
\tag{2}
$$

nelle quali P indica il tetravettore della corrente elettrica. Oltre a queste equazioni appaiono le equazioni materiali che introducono la costante dielettrica ε e la permeabilità μ. Esse contengono la tetravelocità Y del corpo e si scrivono:

$$
[Y\mathbf{B}]=\varepsilon\,[Y\mathbf{M}]\,,\ [Y\mathbf{M}^*]=\mu\,[Y\mathbf{B}^*]\,.
\tag{3}
$$

Il prodotto vettoriale che qui appare fra un tetravettore A ed un esavettore $\mathbf{F}$ è definito dalle equazioni:

$$
[A\mathbf{F}]_\alpha=\sum_\beta A_\beta\mathbf{F}_{\alpha\beta}\ \ (\alpha=1,2,3,0)\,.
\tag{4}
$$

[1] Zur Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper, Zeitschr. f. Phys. **128**, 387-394 (1950).

Il tensore d'universo T ha per qualsiasi ipotesi le componenti che risultano dallo schema seguente:

$$T = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & ic\mathfrak{g}_1 \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & ic\mathfrak{g}_2 \\ \mathbf{p}_{31} & \mathbf{p}_{32} & \mathbf{p}_{33} & ic\mathfrak{g}_3 \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_1 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_2 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_3 & -W \end{array} \right\}; \tag{5}$$

$\mathbf{p}$ è il tensore degli sforzi di Maxwell, $\mathfrak{g}$ la densità d'impulso, $\mathfrak{S}$ la densità della corrente d'energia, W la densità d'energia del campo elettromagnetico. L'equazione

$$-\,\mathrm{DivT} = F \text{ ovvero } -\sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0) \tag{6}$$

contiene la tetraforza F e formula, quando la si traduca in tre dimensioni, le leggi dell'impulso e dell'energia. La forza $\mathfrak{F}$ che agisce sul volume unitario del corpo, le componenti della quale coincidono con le componenti di F di egual indice, ha quindi il valore:

$$\mathfrak{F} = -\,\mathrm{div}\mathbf{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \rho \mathfrak{E}^* + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{J}\mathfrak{B}\right], \tag{7}$$

dove ρ indica la densità di carica, $\mathfrak{J}$ la corrente di conduzione e

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{q}\mathfrak{B}\right] \tag{8}$$

indica la "forza elettromotrice", purché seguendo Minkowski si estenda ai corpi in movimento dai corpi a riposo, per i quali Maxwell la introdusse, l'ipotesi di Maxwell su $\mathbf{p}$. Esso si scrive:

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta} = -\mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{D}_\beta - \mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{B}_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Esso è simmetrico per i corpi isotropi a riposo, per i quali $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ hanno la stessa direzione, ma non per i cristalli (non cubici) nè in generale per corpi in moto, per i quali i vettori $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ hanno direzioni diverse. Già H. Hertz[2] ha cercato di sostituirlo mediante la parte simmetrica $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_{\beta\alpha})$. Ciò è contraddetto però dalle numerose esperienze sulla coppia esercitata da un campo magnetico omogeneo su sfere cristalline[3]: il momento torcente deriva dalla parte antisimmetrica $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\beta\alpha})$. Ma inoltre si ha un criterio per il tensore d'universo, che è soddisfatto dall'ipotesi di Minkowski, e da nessuna delle altre: la *velocità di radiazione* $\mathfrak{w} = \mathfrak{S}/W$ *di un'onda piana deve soddisfare il teorema di Einstein di addizione delle*

[2] Hertz, H.: Wiedemanns Ann. **41**, 369 (1890). Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, p. 282. Hertz rimanda anche a H. v. Helmoltz, Wiedemanns Ann. **13**, 400 (1881).

[3] Voigt, W.: Manuale di fisica dei cristalli, p. 487. Con le condizioni attuali delle biblioteche non è stato possibile procurarsi i lavori originali citati da Voigt.

velocità. Se infatti un punto materiale si muove entro un'onda piana limitata ($\mathfrak{w}$ è una velocità inferiore a quella della luce), esso resta permanentemente "in luce", e questo fatto non può essere eliminato per trasformazione passando ad un altro sistema di riferimento[4].

L'ipotesi di Minkowski riconduce il tensore T agli esavettori $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ mediante l'equazione:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}\mathbf{B}_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\,(\mathbf{MB})\,. \tag{10}$$

Ciò significa secondo la (5) che per tutti i sistemi di riferimento si ha:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\,,\ \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\,,\ W = \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\}. \tag{11}$$

Essa è inoltre in accordo con la (9). Un'onda piana ha quindi la velocità di radiazione:

$$\mathfrak{w} = \frac{c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\}}. \tag{12}$$

Al numeratore come al denominatore è presente il quadrato del seno che appare nella (13). Ma $\mathfrak{w}$ è per conto suo indipendente dalle quattro coordinate d'universo.

§2. Si rappresenta l'onda piana monocromatica polarizzata linearmente quando poniamo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ proporzionali a

$$\sin\left(2\pi\sum_{\alpha} A_\alpha x_\alpha\right) \tag{13}$$

con ciascuno un esavettore costante per fattore di proporzionalità. L'argomento del seno è Lorentz-invariante; di conseguenza le A_α costituiscono un tetravettore, che chiamiamo *"vettore impulso"*. Dalle equazioni di Maxwell (2) con $P = 0$ discende quindi secondo la (4)

$$[A\mathbf{M}^*] = 0,\ [A\mathbf{B}] = 0. \tag{14}$$

Un esavettore è rappresentato in generale mediante due elementi di superficie piana con senso di rotazione, mutuamente ortogonali. Per la (14) $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ sono tuttavia dati da un solo siffatto elemento di superficie; il carattere algebrico per tali esavettori si scrive:

$$\begin{aligned}(\mathbf{MM}^*) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{M}^*_{\alpha\beta} = 0,\\ (\mathbf{BB}^*) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{B}^*_{\alpha\beta} = 0.\end{aligned} \tag{14a}$$

[4] Sulla base di quest'idea l'autore [Ann. Phys. **23**, 989 (1907)] ha fondato la trasformazione della velocità di radiazione e la teoria dei coefficienti di trasporto di Fresnel, ma senza riferimento ad un tensore d'universo. A. Scheye [Ann. Phys. **30**, 805 (1909)] afferma che solo il tensore di Minkowski soddisfa questo criterio; tuttavia il suo può essere considerato solo un abbozzo della prova più circostanziata che vien data qui.

Se scegliamo il sistema di coordinate in modo tale che delle sei componenti di $\mathbf{M}^*$ siano diverse da zero solo $\mathbf{M}^*_{23}$ e $\mathbf{M}^*_{10}$, la (14) afferma:

$$[A\mathbf{M}^*]_1 = A_0\mathbf{M}^*_{10} = 0,\ [A\mathbf{M}^*]_2 = A_3\mathbf{M}^*_{23} = 0,$$
$$[A\mathbf{M}^*]_0 = A_1\mathbf{M}^*_{01} = 0,\ [A\mathbf{M}^*]_3 = A_2\mathbf{M}^*_{32} = 0.$$

Queste equazioni consentono solo due possibilità. O si ha

$$\mathbf{M}^*_{10} = 0 \text{ e } A_2 = A_3 = 0$$

ovvero

$$\mathbf{M}^*_{23} = 0 \text{ e } A_1 = A_0 = 0.$$

In entrambi i casi la nostra asserzione è provata. Si vede inoltre che il tetravettore A è ortogonale ad $\mathbf{M}^*$. Poiché lo stesso vale per $\mathbf{B}$, A è la perpendicolare comune alle superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$, e quindi esse giacciono entrambe nello spazio tridimensionale perpendicolare ad A, e di conseguenza hanno una *linea* d'intersezione, che di per sè determina a meno di un fattore scalare un tetravettore A^*. Previa opportuna normalizzazione lo chiamiamo il *vettore del raggio* dell'onda piana. Si ha

$$(15)\qquad [A^*\mathbf{M}] = 0,\ [A^*\mathbf{B}^*] = 0,\ (AA^*) = 0.$$

La linea d'intersezione delle superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ è la perpendicolare comune alle superfici che rappresentano $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}^*$ e appartiene allo spazio tridimensionale perpendicolare ad A.

Ma dalla (14) segue inoltre l'annullarsi del prodotto scalare

$$(16)\qquad (\mathbf{MB}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{B}_{\alpha\beta}.$$

Se A ha la direzione di x_3, le superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ giacciono nello spazio $x_0x_1x_2$, di modo che delle componenti di questi si annullano tutte quelle negli indici delle quali compare il 3. Nel suddetto spazio possiamo poi ruotare il sistema di coordinate in modo che delle componenti di $\mathbf{B}$ sia diversa da zero soltanto $\mathbf{B}_{12}$. Sarà quindi

$$(17)\qquad (\mathbf{MB}) = \mathbf{M}_{12}\mathbf{B}_{12} = \mathbf{M}^*_{30}\mathbf{B}_{12} = 0,$$

poiché $\mathbf{M}^*_{30}$ è nulla. Per la (1) e la (11) quest'equazione significa

$$(18)\qquad (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = W.$$

Nella (11) la densità d'energia W è suddivisa in una parte elettrica $(\mathfrak{E}\mathfrak{D})/2$ ed in una parte magnetica $(\mathfrak{H}\mathfrak{B})/2$. Le due sono tra loro uguali per l'onda piana. Dalla (14a) segue tenendo conto della (1)

$$(18a)\qquad (\mathfrak{E}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) = 0.$$

§3. *Il vettore impulso A è necessariamente di tipo spaziale.* Se rappresentiamo l'onda piana in tre dimensioni mediante

$$\sin\left(2\pi\left\{\nu t-\frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{3}\mathfrak{e}_\alpha x_\alpha\right\}\right) \tag{19}$$

(ν frequenza, λ lunghezza d'onda, $\mathfrak{e}$ vettore unitario nella direzione della normale all'onda), il confronto con la (13) mostra che:

$$A_\alpha=-\frac{\mathfrak{e}_\alpha}{\lambda}\ (\alpha=1,2,3)\,,\ A_0=-\frac{-i\nu}{c}. \tag{20}$$

Inoltre il quadrato del valore assoluto di A è

$$A^2=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\nu^2}{c^2} \tag{21}$$

e nel sistema a riposo K^0 del corpo, nel quale secondo Maxwell si ha $\left(\nu^0\lambda^0/c\right)^2=1/\left(\varepsilon\mu\right)<1$,

$$A^2=\frac{1}{\lambda^{02}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)>0. \tag{22}$$

Il vettore del raggio A^* è invece necessariamente di tipo temporale. Ciò risulta dalle equazioni materiali (3).

Per la dimostrazione scegliamo il sistema di riferimento K^r, nel quale A ha la direzione x_3 e inoltre x_1 e x_2 sono ortogonali alla tetravelocità Y del corpo. In esso i vettori di campo $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ hanno sicuramente solo le componenti seguenti:

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^*_{10}=\mathbf{M}_{23},\ \mathbf{M}^*_{20}=\mathbf{M}_{31},\ \mathbf{M}^*_{12}=\mathbf{M}_{30},\\ \mathbf{B}_{10}=\mathbf{B}^*_{23},\ \mathbf{B}_{20}=\mathbf{B}^*_{31},\ \mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}^*_{30}.\end{gathered}$$

Come intersezione delle superfici che li rappresentano A^* deve anche soddisfare alle seguenti equazioni derivanti dalle (15):

$$\begin{aligned}A^*_1\mathbf{M}^*_{20}+A^*_2\mathbf{M}^*_{01}+A^*_0\mathbf{M}^*_{12}&=0,\\ A^*_1\mathbf{B}_{20}+A^*_2\mathbf{B}_{01}+A^*_0\mathbf{B}_{12}&=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Ma per questo caso le equazioni materiali (3) ora dicono:

$$\begin{gathered}Y_0\mathbf{B}_{10}=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{13},\ Y_0\mathbf{B}_{20}=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{23},\ 0=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{30},\\ Y_0\mathbf{M}_{31}=\mu Y_3\mathbf{B}_{10},\ Y_0\mathbf{M}_{32}=\mu Y_3\mathbf{B}_{20},\ 0=\mu Y_3\mathbf{B}_{12}.\end{gathered}$$

Da esse, oltre a $\varepsilon\mu Y_3^2=-Y_0^2$, segue l'annullarsi di $\mathbf{B}_{12}$ e di $\mathbf{M}_{30}=\mathbf{M}^*_{12}$; secondo le (23) è quindi $A^*_1=A^*_2=0$; secondo l'ultima delle (15) risulta inoltre $A^*_3=0$, quindi solo la componente A^*_0 è diversa da zero. Il suo valore resta qui ancora indeterminato.

Poiché il vettore A^* è di tipo temporale, lo si può per ogni sistema di riferimento ricondurre ad un vettore $\mathfrak{s}$ dello spazio mediante le equazioni:

$$A^*_\alpha = \frac{\nu\lambda\mathfrak{s}_\alpha}{\sqrt{c^2-(\nu\lambda\mathfrak{s})^2}} \ (\alpha = 1,2,3)\,,\ A^*_0 = \frac{ic}{\sqrt{c^2-(\nu\lambda\mathfrak{s})^2}}, \tag{24}$$

nella quale assumiamo la radice come positiva; di conseguenza

$$A^{*2} = -1, \tag{25}$$

quindi negativo. Con ciò per A^* risulta fissato anche il fattore finora indeterminato. Dalle (20) e dall'ultima delle (15) si ottiene sotto queste circostanze:

$$(\mathfrak{e}\mathfrak{s}) = 1. \tag{25a}$$

§4. Per mezzo delle (1) e delle (20) segue dalle (14):

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{E}]\,,\ \mathfrak{D} = -\frac{c}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{H}]\,. \tag{26}$$

Parimenti per le (1) e (24) discende dalle prime due delle (15):

$$\mathfrak{E} = -\frac{\lambda\nu}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{B}]\,,\ \mathfrak{H} = \frac{\lambda\nu}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{D}]\,. \tag{27}$$

Secondo l'ipotesi di Minkowski [Eq. (10)] e secondo la (18) la densità d'impulso e la corrente d'energia saranno di conseguenza

$$\begin{gathered}\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{1}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{D}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{E}]] = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda\nu}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda\nu}W,\\ \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \lambda\nu\,[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{D}]] = \lambda\nu\mathfrak{s}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \lambda\nu\mathfrak{s}W,\end{gathered} \tag{28}$$

e quindi la velocità di radiazione sarà

$$\mathfrak{w} = \lambda\nu\mathfrak{s}. \tag{29}$$

Per la (24) essa è in rapporto con il vettore del raggio A^* secondo le relazioni

$$A^*_\alpha = \frac{\mathfrak{w}_\alpha}{\sqrt{c^2-\mathfrak{w}^2}} \ (\alpha = 1,2,3)\,, A^*_0 = \frac{ic}{\sqrt{c^2-\mathfrak{w}^2}}, \tag{30}$$

che hanno esattamente la stessa forma delle relazioni tra la velocità tridimensionale $\mathfrak{q}$ di un punto materiale e la sua tetravelocità Y. È perciò dimostrato che con l'ipotesi di Minkowski per il tensore d'universo T vale per $\mathfrak{w}$ il teorema di Einstein di addizione delle velocità.

Ma l'equazione (28) mostra inoltre: *L'impulso dell'onda piana ha in ogni sistema di riferimento la direzione della normale d'onda $\mathfrak{e}$. Questa d'altra parte è legata secondo la (20) al tetravettore A, al quale perciò abbiamo dato il nome di vettore impulso. Gli esavettori $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ rappresentabili mediante una qualsiasi superficie individuano tra tutte le direzioni del mondo tetradimensionale la loro perpendicolare comune, cioè la direzione di A, e la loro linea d'intersezione, cioè la direzione di A^*.*

A questi due tetravettori corrispondono in ogni sistema di riferimento le direzioni spaziali caratteristiche dell'onda piana, quella dell'impulso e quella del raggio.

Il ragionamento precedente è fino all'equazione (27) inclusa indipendente da ogni ipotesi su T. Per la nostra dimostrazione l'equazione (29) è non solo sufficiente, ma anche necessaria, perché proprio il vettore $\mathfrak{s}$ è in relazione con A^* [Eq. (24)]. Dalla (27) segue che $\mathfrak{s}$ è ortogonale ad $\mathfrak{E}$ e ad $\mathfrak{H}$. Questa proprietà si estende per la (29) ai vettori $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{S}$, e porta quindi, a meno di un fattore di proporzionalità c, all'ipotesi di Minkowski per $\mathfrak{S}$. Di contro secondo l'ipotesi di Abraham[5],

$$\mathfrak{S} = c^2\mathfrak{g} = c\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}])}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\right\},$$

$\mathfrak{S}$ ha in generale un'altra direzione; essa quindi non porta al teorema di addizione delle velocità per la velocità di radiazione $\mathfrak{w}$. Nel caso di un'onda piana nello spazio vuoto si ha un solo vettore caratteristico; esso è singolare ed è perpendicolare a se stesso. Nel nostro caso esso si separa nel vettore di tipo spaziale A e nel vettore di tipo temporale A^*, che per la (15) sono tra loro ortogonali.

§5. Trattiamo l'onda piana ancora una volta nel sistema di coordinate K^r utilizzato precedentemente. Secondo il §3 in esso sono diverse da zero solo le due componenti di $\mathbf{M}^*$ e di $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M}^*_{10} = \mathfrak{B}_1,\ \mathbf{M}^*_{20} = \mathfrak{B}_2,$$
$$\mathbf{B}_{10} = -i\mathfrak{D}_1,\ \mathbf{B}_{20} = -i\mathfrak{D}_2.$$

Le intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, ma anche le componenti x_3 di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$, sono nulle. La normale d'onda ha la direzione x_3, poiché ciò vale per A. Invece la corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e la velocità di radiazione $\mathfrak{w}$ sono nulle, poiché tutte le componenti spaziali di A^* in questo sistema di riferimento si annullano. Inoltre la densità d'energia W a causa dell'annullarsi delle intensità di campo è zero. Per la tetravelocità del corpo vale, come su accennato:

$$Y_1 = Y_2 = 0,\ Y_3^2 = -\frac{1}{\varepsilon\mu}Y_0^2,$$

cioè per la sua velocità spaziale

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 = 0,\ \mathfrak{q}_3^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}.$$

Ma $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità di radiazione nel corpo a riposo. In K^r il corpo si muove quindi con questa velocità in direzione opposta alla normale d'onda. Infine segue da $A_0 = 0$ secondo la (20) l'annullarsi della frequenza ν, mentre la lunghezza d'onda λ secondo la (21) assume il valore finito A_3^{-1}.

In K^r esiste quindi un'onda sinusoidale stazionaria con le intensità di campo nulle e con spostamento $\mathfrak{D}$ e induzione $\mathfrak{B}$ costanti nel tempo. La sua energia è zero.

[5] Abraham, M.: Rendiconti Palermo **28** (1909); **30**, 33 (1910). - Phys. Z. **10**, 737 (1909). - Ann. Phys. **44**, 537 (1914). - Grammel, R.: Ann. Phys. **41**, 517 (1913). - Kafka, H.: Ann. Phys. **58**, 1 (1919).

Entro essa il corpo scorre con la velocità $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ opposta a quella della normale d' onda.

Se accresciamo $\mathfrak{q}$ oltre questo valore mantenendo la sua direzione opposta ad $\mathfrak{e}$, la sola componente della velocità di radiazione non nulla per simmetria, ossia $\mathfrak{w}_3$, sarà negativa. Poiché nè la lunghezza d'onda λ nè [secondo la (25a)] la componente $\mathfrak{s}_3$ del vettore $\mathfrak{s}$ parallela ad $\mathfrak{e}$ possono cambiar segno, per la (20) la frequenza sarà quindi $\nu < 0$, cosa che significa che la fase ora cresce in senso opposto alla normale d'onda $\mathfrak{e}$. Per la (27) questo cambio di segno si trasmette ad $\mathfrak{E}$ e ad $\mathfrak{H}$, ma non ai vettori $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$, che non si annullano in K^r. Quindi per la (18) W sarà ora negativa. Il vettore di Poynting $\mathfrak{S}$ mantiene invece la sua direzione [secondo la (11)]. Il cambio di segno di $\mathfrak{w}_3$ deriva dal cambio di segno del denominatore W che compare nella (12).

Riepilogo

Poiché il tensore d'universo di Minkowski non simmetrico T è il solo possibile per l'elettrodinamica della materia, non si può ritenere valida in generale la formulazione $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ della legge dell'inerzia dell'energia. Ciò si accorda con la dimostrazione, che G.U. Schubert[6] ha dato, che il tensore d'universo associato alla supercorrente è nonsimmetrico, e quindi parimenti contraddice quella forma della legge d'inerzia.

[6]Schubert, G.U.: Ann. Phys. **6**, 163 (1949).