## Il tensore d'energia-impulso della radiazione nei dielettrici[1]

G. Marx e K. Nagy
Istituto di Fisica dell'Università Roland Eötvös, Budapest
(presentato da K.F. Novobátzky - ricevuto il 29-6-1954)

La radiazione elettromagnetica in mezzi completamente trasparenti è di per sé in una continua interazione con la materia polarizzabile: il campo elettromagnetico provoca una polarizzazione elettrica e magnetica alternante, mentre la radiazione dei dipoli presenti altera le proprietà della radiazione primaria incidente. Ne segue che l'energia della radiazione che incide dal vuoto, anche in mezzi che non assorbono energia permanentemente, ad un dato momento solo in parte è presente sotto forma di energia elettromagnetica, mentre essa appare in parte come l'energia cinetica e potenziale delle molecole polarizzate (deformate), quindi dal punto di vista macroscopico come energia meccanica. Vari ricercatori suggeriscono in proposito che il tensore d'energia impulso completo della radiazione $S_{ik}$, che soddisfa le leggi di conservazione, proprio tenendo conto delle osservazioni precedenti, all'interno della materia polarizzabile vada distinto dal tensore d'energia-impulso $T_{ik}$ del campo elettromagnetico: a $T_{ik}$ si deve infatti aggiungere quella parte $t_{ik}$ del tensore d'energia-impulso meccanico che descrive gli sforzi suscitati dal campo elettromagnetico. Lo scopo del presente lavoro è la derivazione della forma covariante di questo tensore espressa mediante le intensità di campo. Della determinazione del tensore completo della radiazione $S_{ik}$ si sono occupati già vari ricercatori. *H. Ott* [1] e *F. Beck* [2] hanno costruito il tensore della radiazione $S_{ik}$ a partire dal tensore d'energia-impulso di Minkowski (per rimuovere la sua asimmetria), mentre *G. Marx* e *G. Györgyi* [3] sono partiti dal tensore d'energia-impulso di Abraham e in base alla forza ponderomotrice sono giunti alla forma di $S_{ik}$ ristretta a mezzi a riposo e ad onde piane. *K. Nagy* [4] ha generalizzato poi questa forma con una trasformazione di Lorentz anche al caso di dielettrici in moto. Le ricerche di *Beck* e *Marx* hanno portato, malgrado i diversi punti di partenza, ad un risultato sostanzialmente uguale, cosa che parla a favore della giustezza delle loro trattazioni.

Nella derivazione del tensore d'energia-impulso completo della radiazione si deve partire dal tensore d'energia-impulso di Abraham, che tiene conto anche delle forze di Lorentz che agiscono sulle correnti di polarizzazione presenti nel dielettrico. La sua forma è

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs} - \frac{n^2-1}{\mu}\left(F_{ir}F_r - F_rF_ru_i\right)u_k\right]. \tag{1}$$

Si sono utilizzate Le notazioni consuete: $F_{ik}$ sta per il tensore costruito con i vettori $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$, $G_{ik}$ per quello costruito con i vettori $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{H}$, $u_i$ è la tetravelocità costante del dielettrico misurata in unità di velocità della luce, $n$ l'indice di rifrazione del mezzo, $\mu la$ permeabilità magnetica del mezzo, $s_i$ la densità della tetracorrente e $F_i = F_{ik}u_k$. Le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 4\pi s_i, \tag{2}$$

[1] Der Energie-Impuls Tensor der Strahlung in Dielektrika, Acta Physica Hungarica **4**, 297-300 (1955).

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Le equazioni materiali che accoppiano tra loro le quantità di campo sono:

$$G_{ik} = \frac{1}{\mu}\left[F_{ik} + \left(n^2 - 1\right)\left(u_i F_k - u_k F_i\right)\right]. \tag{4}$$

Le considerazioni che seguono si limiteranno all'inizio ai dielettrici a riposo. Si indichino con $\mathfrak{T}$ gli sforzi di Maxwell costituiti dalle componenti spaziali del tensore $-T_{ik}$; è noto che allora in un mezzo omogeneo, privo di cariche e di correnti (quindi trasparente) si arriva a

$$Div\mathfrak{T} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right). \tag{5}$$

Si ottiene la densità di forza quando si tien conto anche della densità d'impulso del campo

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}$$

formata dalle componenti di $T_{i4}$:

$$\mathfrak{f} = Div\mathfrak{T} - \frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi c}{n^2-1}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right).$$

Questa forza sarà esercitata dal campo sul dielettrico polarizzato. Se il dielettrico è fisso, la forza ponderomotrice non può nè aumentare l'impulso del dielettrico nè compiere un lavoro su di esso. In questo caso lo sforzo meccanico $\mathfrak{t}$ provocato nel dielettrico deve perciò compensare l'azione delle forze elettromagnetiche secondo la relazione

$$-\ Div\mathfrak{t} = \mathfrak{f} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right). \tag{6}$$

Il tensore meccanico degli sforzi $\mathfrak{t}$ deve quindi da un lato soddisfare l'equazione (6) e dall'altro naturalmente essere simmetrico. Se si tien conto di ciò, si può assai facilmente, con un confronto delle equazioni (5) e (6), esprimere il tensore degli sforzi mediante le intensità di campo:

$$\mathfrak{t} = -\frac{n^2-1}{n^2}\mathfrak{T}. \tag{7}$$

Le componenti di $\mathfrak{t}$ costituiscono le componenti spaziali di $-t_{ik}$. Le componenti restanti, secondo le osservazioni precedenti, devono annullarsi in un dielettrico fissato rigidamente. Se si tien conto della relazione fra $\mathfrak{T}$ e $T_{ik}$, come pure di quella fra $\mathfrak{t}$ e $t_{ik}$, si può scrivere:

$$t_{ik} = -\frac{n^2-1}{n^2}T_{ik},\ \ se\ i,k = 1,2,3;\ \ t_{i4} = t_{4i} = 0.$$

Questa relazione valida per un dielettrico a riposo si può scrivere complessivamente anche nel modo seguente:

$$t_{ik} = -\frac{n^2-1}{n^2}\left(\delta_{ir}+u_i u_r\right)\left(\delta_{ks}+u_k u_s\right)T_{rs}. \tag{8}$$

La relazione ora ottenuta è quindi valida per mezzi a riposo, ma esprime pur anche una relazione tensoriale, di modo che deve avere validità in ogni sistema inerziale. Con l'Eq. (8) s'ottiene quindi la forma covariante di $t_{ik}$ di validità generale. Da questa, introducendo

$$S_{ik} = T_{ik} + t_{ik} \tag{9}$$

si può ottenere anche il tensore d'energia-impulso della radiazione completo, e precisamente sia per il caso di una radiazione elettromagnetica qualsiasi che per il caso di un dielettrico che si sposti con velocità arbitraria.

Adoperando Le equazioni (1), (8) e (9) si può anche esprimere $S_{ik}$ in funzione delle intensità di campo. Mediante una semplice sostituzione risulta

$$S_{ik} = \frac{1}{4\pi n^2}\left(F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right) +$$

$$\frac{1}{4\pi\mu}\left(1-1/n^2\right)\left\{u_i F_{kr}F_r + \frac{1}{2}u_i u_k\left[\left(n^2-1\right)F_r F_r + \frac{1}{2}F_{rs}F_{rs}\right]\right\}. \tag{10}$$

(Passando alla notazione tridimensionale si può confermare che questa relazione coincide con la forma utilizzata in [4]). la traccia del tensore - a differenza di quella di $T_{ik}$ - ora non vale più zero, con la qual cosa s'esprime il fatto che una parte dell'energia della radiazione già è presente come energia di una materia dotata di massa a riposo:

$$\mathfrak{u}_0 = -S_{ii} = \frac{n^2-1}{4\pi\mu n^2}\left[\frac{1}{4}F_{rs}F_{rs} + \frac{n^2+1}{2}F_r F_r\right] > 0.$$

Utilizzando l'equazione (10) e le equazioni di campo (2) e (3) si può anche dimostrare immediatamente per derivazione che $S_{ik}$ in un mezzo trasparente e omogeneo è a divergenza nulla. In posti del dielettrico disomogenei e conduttori ($n \neq \, cost., \mu \neq \, cost., s_i \neq 0$) l'energia e l'impulso della radiazione presentano delle perdite:

$$-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{n^2}\left[F_{ir} + \left(n^2-1\right)u_i F_r\right]s_r$$
$$-\frac{1}{8\pi n^2}F_r F_r\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \frac{1}{8\pi n^2\mu^2}\left(\frac{1}{2}F_{rs}F_{rs} + F_r F_r\right)\frac{\partial \mu}{\partial x_i}.$$

In questo caso però la separazione di $t_{ik}$ dal tensore d'energia-impulso meccanico e di conseguenza anche il tensore della radiazione $S_{ik}$ hanno già perso il loro significato. Tuttavia dove l'energia non viene assorbita in modo permanente, ma oscilla soltanto tra il campo e la materia polarizzata, $S_{ik}$ può essere utilizzato per la descrizione delle proprietà dinamiche della radiazione che attraversa il dielettrico (per esempio del fotone che si muove nel dielettrico [4]).

## Bibliografia

1. H. Ott: Ann. d. Phys. (6), **11**, 33, 1953.
2. F. Beck: Z. Phys. **134**, 136, 1953.
3. G. Marx, G. Györgyi, Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
4. K. Nagy, (*Die Quantentheorie der elektromagnetischen Strahlung in Dielektrika*) Dissertation 1954.