Alcune domande esplorative che riguardano la meccanica quantistica[1]

W. Pauli a Zurigo

(ricevuto il 17 dicembre 1932)

§1. Sul ruolo dell'unità immaginaria e sul concetto di densità di probabilità spaziale di una particella nella meccanica ondulatoria. §2. L'analogia tra fotoni ed elettroni ed i suoi limiti. §3. La domanda sulla formulabilità della meccanica quantistica come teoria di azione per contatto.

Sotto il titolo suddetto P. Ehrenfest[2] ha posto in discussione più domande distinte. Poiché in occasione della redazione di un articolo di rassegna mi sono in parte scontrato con domande del tutto analoghe, mi sia concesso di pubblicare qui alcune osservazioni in proposito. Queste non pretendono né di essere nuove, né di rappresentare risposte definitive alle domande poste. Esse possono servire solo a ricacciar via l'immagine, introdotta da Ehrenfest, di un "bon ton" che pretende di porre da parte queste domande come "prive di senso", e parimenti di accennare alla connessione di queste domande con i problemi ancora irrisolti della teoria quantistica relativistica (stati d'energia negativa, energia propria dell'elettrone). Mi limito qui alle questioni sollevate nelle sezioni A e B della nota di Ehrenfest ed alle osservazioni che ne derivano, mentre le domande più matematiche e di teoria dei gruppi contenute nella sezione C di quella non le considero, poiché non mi sento competente per la loro discussione.

§1. Sul ruolo dell'unità immaginaria e sul concetto di densità di probabilità spaziale di una particella nella meccanica ondulatoria.

Per il caso di una particella, per ora in assenza di campi di forze esterni, a partire dal concetto (simbolico, cioè di per sé non direttamente osservabile) di onde nel continuo spaziotemporale tetradimensionale, cominciamo a formulare tentativamente una sequenza d'ipotesi, delle quali ciascuna vada sempre più in là della precedente. Con ciò non si ha tuttavia l'intenzione di ottenere un'assiomatica completa della meccanica ondulatoria, ma solo principalmente di sottolineare il ruolo particolare del concetto di densità di probabilità spaziale, la cui esistenza secondo me a torto viene di solito assunta come ovvia. Questo concetto è decisivo per la domanda che si porrà nel seguente §2 sull'analogia tra luce e materia e sui suoi limiti, e consente anche di riconoscere al meglio la ragione per la comparsa dell'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger[3].

I. 1. Si dia un campo d'onde con principio di sovrapposizione, descritto con un numero per ora indeterminato di componenti $\psi_1, \psi_2, \dots$ Se $\psi_\rho^{(1)}(\vec{x}, t)$, $\psi_\rho^{(2)}(\vec{x}, t)$ sono campi possibili, è un campo possibile anche $c_1\psi_\rho^{(1)}(\vec{x}, t) + c_2\psi_\rho^{(2)}(\vec{x}, t)$, con costanti arbitrarie c_1 e c_2 (non contenenti l'indice ρ).

---

[1]Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen, Zeitschr. f. Phys. **80**, 573-586 (1933).

[2]P. Ehrenfest, Zeitschr. f. Phys. **78**, 555, 1932.

[3]Nella meccanica delle matrici di Heisenberg, Born e Jordan la ragione *formale* per la sua comparsa era la legge di *moltiplicazione delle matrici* assieme al principio di combinazione per le frequenze spettrali della luce emessa.

I. 2. In seguito a scomposizione di Fourier di $\psi_\rho(\vec{x},t)$ (in integrale o somma) risulta

$$\text{(I)} \qquad \psi_\rho(\vec{x},t) = \sum_k \left\{ a_\rho(\vec{k}) \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)\right] + b_\rho(\vec{k}) \exp\left[-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)\right]\right\}$$

(ovvero $\int dk$ al posto di $\sum_k$), dove la quantità positiva ν è una funzione di $|k|$; le quantità ν e $\vec{k}$ sono legate alle quantità meccaniche energia-impulso secondo la relazione fondamentale

$$E = h\nu, \ \vec{p} = h\vec{k},$$

(h = quanto d'azione diviso per 2π, ν frequenza angolare). Perciò soddisfano le relazioni

$$\nu = \frac{h}{2m}|k|^2 \text{ per il punto materiale non relativistico,}$$

$$\frac{\nu^2}{e^2} = \frac{m^2c^2}{h^2} + |k|^2 \ \text{ per il punto materiale relativistico,}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = |k|^2 \text{ per il fotone.}$$

Per ogni $\vec{k}$ dev'esserci realmente un'onda piana. Ma qui non si assumerà ancora nulla riguardo a *quali relazioni di dipendenza tra gli* $a_\rho(\vec{k}), b_\rho(\vec{k})$ (in generale complessi) *corrispondano all'onda più generale possibile appartenente ad un dato* $\vec{k}$. Potrebbe per esempio darsi che debba essere $b_\rho(\vec{k}) = 0$, o anche $b_\rho(\vec{k}) = a^*_\rho(\vec{k})$, cioè ψ_ρ reale.

I. 3. I valori assoluti $|a_\rho(\vec{k})|$, $|b_\rho(\vec{k})|$ di a_ρ e b_ρ devono essere quantità misurabili, e a meno di un fattore di normalizzazione eventualmente dipendente da $|k|$, $|a_\rho(\vec{k})|^2 + |b_\rho(\vec{k})|^2$ dev'essere proporzionale alla probabilità che l'impulso della particella (diviso per h) si trovi nella regione $\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}$.

Da qui discende già qualcosa, e in particolare la possibilità del passaggio al limite dell'ottica geometrica (meccanica classica), dove si può prescindere dallo sparpagliamento del pacchetto. Ciò è infatti ammesso per dimensioni lineari del pacchetto che siano grandi rispetto al reciproco del $|\vec{k}|$ "medio". Discende inoltre il fatto che

$$\vec{v} = \frac{\partial \nu}{\partial \vec{k}}$$

è la velocità di gruppo. Infine le relazioni di indeterminazione

$$\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{k} \sim 1, \ \Delta t \cdot \Delta\nu \sim 1,$$

quindi

$$\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{p} \sim h, \ \Delta t \cdot \Delta E \sim h,$$

come relazioni giuste quanto a ordine di grandezza. (L'estensione del pacchetto è qui ancora non definibile *quantitativamente*, ma ciò non importa.)

Fin qui il campo di Maxwell e il campo dell'onda materiale sono analoghi; anche il campo di un solo scalare reale sarebbe ancora compatibile con le ipotesi introdotte. Ora viene un *nuovo* gruppo d'ipotesi:

II. 1. La probabilità $W(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3$ di trovare la particella al tempo esatto t nell'elemento di volume infinitesimo $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$ è sempre un concetto significativo. Allora in primo luogo $W(\vec{x})$ dev'essere essenzialmente positiva:

$$W(\vec{x},t) \geq 0. \tag{1}$$

In secondo luogo dev'essere

$$\int W(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 = 1, \tag{2}$$

quindi sempre indipendente da t.

Si deve qui sottolineare con particolare vigore che quest'ipotesi, che $W(\vec{x},t)$ sia sempre un concetto significativo, non è né evidente di per sé , né può essere fatta derivare dal punto di vista della complementarità (gruppo d'ipotesi I) che viene espresso nelle relazioni di indeterminazione. Infatti si tratta della determinazione della posizione della particella anche al *di là della validità della meccanica classica*, cioè in regioni dello spazio e del tempo le cui dimensioni siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda media ovvero rispetto al periodo d'oscillazione medio del pacchetto d'onda considerato. L'esistenza di $W(\vec{x},t)$ è altresì evidente, se si può dimostrare:

II. $1'$. Esistono sempre esperimenti dal risultato dei quali si può concludere con certezza se la particella al tempo t si trovi o no nell'elemento di volume $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$ (in modo tale che nel primo caso sia esclusa la contemporanea azione diretta della particella in un altro punto). Se esperimenti del genere non esistono sempre si può essere in dubbio sull'esistenza di una $W(\vec{x},t)$. Ritornerò su questo dubbio in seguito.

Vengo ora alla domanda posta all'inizio sulla necessità di almeno *due* scalari reali per le onde di de Broglie-Schrödinger. Sostengo che questa necessità e quindi anche l'unità immaginaria intervengono *perché si cerca un'espressione per la densità di probabilità W che soddisfi i requisiti (1) e (2), e che non contenga le derivate temporali di ψ.* L'ultimo requisito è necessario per rendere chiaro il concetto "numero degli scalari utilizzati". Un *singolo* scalare reale che soddisfi un'equazione differenziale del second'ordine in t è esattamente equivalente all'uso di *due* scalari reali che soddisfino equazioni differenziali del prim'ordine in t (si ponga allora $\partial\psi_1/\partial t = \psi_2$). Vale anche l'inverso, come sarà immediatamente spiegato. Enunciamo quindi l'assioma.

II. 2. Se le $\psi_\rho(\vec{x},t)$ per un determinato t_0 sono note come funzioni di $\vec{x}$, W dev'essere determinata a questo tempo t_0 solo mediante le $\psi_\rho(\vec{x},t)$, e in particolare, come possibilità più semplice, W deve dipendere quadraticamente (ovvero bilinearmente) dall'andamento funzionale delle $\psi_\rho(\vec{x},t)$.

Nota esplicativa. Un operatore bilineare $W(\vec{x},t)$ associa a due leggi funzionali $\psi_\rho^{(1)}(\vec{x})$ e $\psi_\rho^{(2)}(\vec{x})$ una funzione di $\vec{x},t$ in modo tale che

$$\begin{aligned} &W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'),\ c_1 g_\rho^{(1)}(\vec{x}'') + c_2 g_\rho^{(2)}(\vec{x}'')\right\} \\ &= c_1 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'), g_\rho^{(1)}(\vec{x}'')\right\} + c_2 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'), g_\rho^{(2)}(\vec{x}'')\right\} \end{aligned}$$

e

$$W(\vec{x},t)\left\{c_1 f_\rho^{(1)}(\vec{x}')+c_2 f_\rho^{(2)}(\vec{x}'),g_\rho(\vec{x}'')\right\}$$
$$=c_1 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho^{(1)}(\vec{x}'),g_\rho(\vec{x}'')\right\}+c_2 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho^{(2)}(\vec{x}'),g_\rho(\vec{x}'')\right\}.$$

Se l'operatore è locale, esso è una forma quadratica delle ψ_ρ e di un numero finito di derivate spaziali; se non è locale, può essere della forma

$$\sum_{\rho,\sigma}\int\int a_{\rho\sigma}(\vec{x},\vec{x}',\vec{x}'')\psi_\rho(\vec{x}',t)\psi_\sigma(\vec{x}'',t)d\vec{x}'d\vec{x}''.$$

Sarebbe naturalmente possibile a priori che si debba giungere a forme di ordine quarto o più alto, ma l'esperienza mostra che sono sufficienti forme quadratiche.

Ora la discussione è diversa nel caso relativistico e nel *caso non relativistico.* Trattiamo prima quest'ultimo. Nel caso di assenza di forze si vede immediatamente: per un determinato $\vec{k}$ non si può ottenere dalla parte reale di una sola onda della forma (I) e dalle sue derivate spaziali *nessuna* espressione quadratica nelle ampiezze, che abbia un integrale di volume costante nel tempo, poiché il termine temporale spurio dell'espressione quadratica nell'integrando ha un valore prescrivibile a piacere.

Se ora ψ è in particolare la parte di (I) che contiene solo a_ρ, ψ^* la parte di (I) che contiene solo b_ρ, allora

$$\int\psi^2 dV \quad \text{e} \quad \int{\psi^*}^2 dV$$

sono dipendenti dal tempo, solo

$$\int\psi\psi^* dV$$

è costante e le ψ e ψ^* così specializzate soddisfano alle equazioni differenziali del prim'ordine[4]

$$-\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathbf{H}\psi,\ \frac{h}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=(\mathbf{H}\psi)^*,\ \mathbf{H}=E_0-\frac{h^2}{2m}\Delta,$$

quindi

(II) $$W(\vec{x},t)=\psi^*\psi.$$

L'altra possibilità, introdurre un solo scalare reale U che soddisfi un'equazione differenziale del second'ordine in t, quindi esprimere ψ e ψ^* mediante un solo "potenziale" *reale* e la sua derivata prima $\partial U/\partial t$ (assumibile a piacere per t fissato) è di fatto disponibile, e non solo nel caso d'assenza di forze, ma in generale, quando H non contiene esplicitamente il tempo ed è reale. Si ponga

(3) $$\psi=\left(-\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{H}\right)U,\quad \text{quindi}\quad \psi^*=\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{H}\right)U$$

[4] $E_0=m_0c^2$ può essere a piacimento incluso o tralasciato.

e per U reale l'equazione differenziale

$$\text{(III)} \qquad \left(-h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\mathbf{H})^2\right) U = 0,$$

quindi nel caso di assenza di forze

$$-h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left[E_0^2 - 2E_0 \frac{h^2}{2m}\Delta + \left(\frac{h^2}{2m}\right)^2 \Delta\Delta\right] U = 0.$$

Dalla più generale soluzione reale della (III) si ottiene la più generale soluzione complessa della (II). La densità W sarà

$$\text{(4)} \qquad W(\vec{x}, t) = h^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + (\mathbf{H}U)^2,$$

la costanza temporale della quale discende anche direttamente dalla (III), sempre che $\mathbf{H}$ sia reale autoaggiunto e non contenga esplicitamente il tempo. Se $\mathbf{H}$ è hermitiano, ma non reale, anche U non è reale. Per quanto concerne il contenuto fisico della teoria con l'introduzione di U non cambia nulla, solo le formule risultano più complicate. Ciò si manifesta non solo nella teoria delle trasformazioni, ma anche nella composizione di due sistemi indipendenti in un sistema complessivo. In luogo della semplice forma prodotto $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$ appare con U qualcosa di sostanzialmente più complicato.

Nel *caso relativistico* si deve prescrivere inoltre:

II. 3. Oltre a W esiste un vettore corrente $\vec{J}$, di modo che valga l'equazione di continuità

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

e $(\vec{J}/c,\ iW)$ costituisca un tetravettore. Allora in assenza di forze s'ottiene l'equazione di Dirac come (essenzialmente) la sola possibilità. In particolare l'introduzione di quantità con rappresentazioni *doppie* del gruppo di Lorentz sarà indispensabile, se accanto alla II. 3. si vuole adempiere al requisito (1), che W sia definita positiva. Ciò risulta nel modo più semplice dall'argomentazione originaria di Dirac e perciò non la si riporterà ulteriormente qui.

§2. *Le questioni dell'analogia tra fotoni ed elettroni e dei limiti di questa.*

Si deve qui eseguire subito per l'esattezza una distinzione, non introdotta nella nota di Ehrenfest, tra due tipi diversi di campi. Chiamiamo *campi grandi* quelli che descrivono un *numero grande* e in certe circostanze *indeterminato* di particelle (indicati per la materia con Ψ_ρ, per i fotoni con $\vec{E}, \vec{H}$); chiamiamo invece campi *piccoli* quelli associati a una *singola* particella (indicati per la materia con ψ_ρ, per i fotoni con $\vec{e}, \vec{h}$). I campi piccoli non sono in linea di principio direttamente osservabili, ma ciò succede al più per le densità di probabilità costruite quadraticamente da essi o dalle loro componenti di Fourier. Nella teoria quantistica i campi grandi sono q-numeri (operatori o matrici); introdotti per la materia da Klein, Jordan e Wigner, per i fotoni sono da intendere come le intensità di campo elettromagnetiche misurabili classicamente con una certa precisione finita, limitata dalla finitezza del quanto d'azione. Ora si possono considerare analoghi i campi piccoli tra loro e i campi grandi tra loro [sebbene sia il campo piccolo $(\vec{e}, \vec{h})$ che il campo grande $(\vec{E}, \vec{H})$ nel caso di assenza di cariche soddisfino *entrambi* le equazioni di Maxwell[5]]. Ma anche queste due analogie di per sé giuste hanno i loro limiti, che saranno ora discussi.

1. Limiti dell'analogia tra i campi $(\vec{e}, \vec{h})$ e ψ_ρ. Consideriamo da un lato le equazioni di Maxwell per il vuoto (assenza di cariche) per il campo $(\vec{e}, \vec{h})$ di un fotone, dall'altro l'equazione di Dirac per una particella materiale in assenza di forze. Gli $(\vec{e}, \vec{h})$ sono reali, le ψ_ρ possono, se si vuole, essere anche scelte reali[6]. Appare allora la differenza già rilevata da Ehrenfest:

a) Per il fotone non esiste alcun vettore tetracorrente che soddisfi l'equazione di continuità e che abbia densità definita positiva (le ipotesi II. 2. e II. 3. non possono essere soddisfatte simultaneamente). Dobbiamo concludere da qui che per il campo del fotone, al di fuori dalla validità dell'ottica geometrica (ottica dei raggi) per un campo non monocromatico il concetto di densità spazio-temporale locale $W(\vec{x}, t)$ delle particelle non ha significato. Ritengo definitiva questa affermazione e condivido pienamente il punto di vista espresso da Ehrenfest nell'osservazione B, 3, che "tutte le virtuosistiche dissertazioni sull'analogia tra le equazioni di Maxwell da un lato e in particolare l'equazione di Dirac dall'altro non hanno prodotto assolutamente niente". Si può anche dire: queste dissertazioni hanno prodotto qualcosa, che è opposto all'intenzione del loro autore: cioè, che la differenza in questione non può essere rimossa neppure con formalismi così generali. L'inesistenza di una W che soddisfi le ipotesi II. è ciò che rende possibile nel caso del campo elettromagnetico di riuscire con rappresentazioni *semplici* del gruppo di Lorentz (senza spinori). La differenza fisica si rispecchia direttamente nella differenza matematica (parimenti ineliminabile con qualsiasi gioco di prestigio) tra quantità di campo che per il gruppo di Lorentz si trasformano secondo rappresentazioni *semplici*, e quantità che si trasformano secondo rappresentazioni *doppie.*

A questo punto credo anche di poter rispondere alla questione didattica, come si debbano trattare le analogie tra fotone ed elettrone nell'introduzione alla meccanica quantistica. Le analogie riguardano quelle proprietà dei campi piccoli del fotone e dell'elettrone, *che derivano già dall'ambito d'ipotesi I* e per le quali non è necessario nessun concetto esatto di densità delle particelle in regioni dello spazio-tempo che possiedano dimensioni confrontabili con lunghezza d'onda-periodo d'oscillazione (per esempio traccia di Wilson dei raggi γ = raggio del quanto di luce secondo l'ottica geometrica).

L'assenza del concetto esatto di densità di probabilità per il fotone (non solo Landau e Peierls non hanno potuto trovare l'espressione giusta per questa densità; ma per essa *non esiste nessuna* espressione giusta) si manifesta nella conseguenza: l'*annullarsi del campo* $(\vec{e}, \vec{h})$ *in un punto dello spazio-tempo non ha alcun significato fisico diretto*, in contrasto con l'annullarsi del campo ψ_ρ in un punto dello spazio-tempo.

---

[5]Il tentativo recente di de Broglie (C.R. **195**, 536 e 862, 1932) di abbandonare la validità delle equazioni di Maxwell per il campo $(\vec{e}, \vec{h})$, considerate le conseguenze fisiche che ne derivano, sembra non riuscito allo scrivente.

[6]Si osservi che nel caso d'assenza di forze con opportuna scelta delle matrici α^i, β le equazioni di Dirac possiedono soluzioni reali per ψ_ρ.

Si aggiunga qui ancora un'osservazione sui campi di radiazione *monocromatici.* In un campo siffatto i valori medi temporali (valutati su tempi lunghi rispetto alla durata dell'oscillazione) di una qualche funzione quadratica delle intensità di campo $\vec{e}$ ed $\vec{h}$ sono esattamente misurabili come funzioni spaziali. In regioni che siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda, con gli apparati utilizzati solitamente[7] nei campi d'interferenza, non si determinerà $\overline{|e^2|}+\overline{|h^2|}$, ma solo $\overline{|e^2|}$, come notoriamente avviene negli esperimenti sulle onde stazionarie. È importante che gli "apparati $\overline{|e^2|}$" e gli "apparati $\overline{|h^2|}$" diano funzioni spaziali diverse.

b) Veniamo ora ad una *seconda* differenza del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ rispetto al campo ψ_ρ, che viene toccata da Ehrenfest nell'osservazione B.1. e che dipende dal trattamento degli "stati d'energia negativa" che solo si può compiere in base allo stato attuale della nostra conoscenza. Questo trattamento è diverso per l'elettrone e per il fotone. Le soluzioni *reali* delle equazioni di Maxwell per il campo $(\vec{e}, \vec{h})$ hanno la proprietà che la densità d'energia $\rho = \frac{1}{2}(\vec{e}^2 + \vec{h}^2)$ (sebbene possieda un integrale di volume costante nel tempo) in un'assegnata posizione dello spazio non è costante nel tempo, ma mostra oscillazioni di frequenza 2ν, dove ν è la frequenza del campo stesso. In una teoria che è costruita come se il preciso andamento spazio-temporale di ρ, e quindi anche quelle oscillazioni fossero osservabili[8], queste soluzioni reali non descrivono quindi nessuno stato *stazionario.* Nel tentativo di trovare soluzioni delle equazioni di campo per le quali ρ in ogni posizione dello spazio sia *esattamente* costante nel tempo si è portati a *modificare il campo* $(\vec{e}, \vec{h})$ *e l'espressione per* ρ. La nostra teoria dell'emissione e dell'assorbimento della luce è fatta in modo tale che, nel caso di un fotone con frequenza e direzione di propagazione determinati, la dipendenza dal tempo della funzione d'onda sarà descritta mediante il fattore complesso $\exp[i\nu t]$, e che inoltre si possa far uso solo *della* parte del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ per la quale la dipendenza dal tempo nello sviluppo di Fourier contenga solo $\exp[-i\nu t]$ con ν *positivo. Questa* parte di $\vec{e}$ la si chiami $\vec{f}$, l'altra $\vec{f}^*$. Si mostra allora che assieme a

$$\vec{e} = \vec{f} + \vec{f}^*$$

vale anche

$$\vec{h} = -\frac{i}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{rot}(\vec{f} - \vec{f}^*).$$

La parte del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ che possiede la dipendenza temporale $\exp[+i\nu t]$ $(\nu > 0)$ darebbe luogo ad emissione di luce nello stato fondamentale e ad assorbimento di luce in stato superiore (fotoni d'energia negativa). Inoltre $\frac{1}{2}(|e^2| + |h^2|)$ viene sostituito con l'espressione

$$\rho = 2\vec{f}\vec{f}^*,$$

che nello stato stazionario non contiene più nessuna parte dipendente dal tempo. La proprietà menzionata della teoria dell'interazione di luce e materia è di tipo assai generale, poiché essa non discende dalla scelta particolare dell'operatore hamiltoniano, ma già dal requisito che la funzione d'onda del sistema complessivo in prima approssimazione si debba scomporre in un prodotto i cui fattori si riferiscono alla sola materia e rispettivamente al solo campo elettromagnetico. L'importanza di questo requisito è già stata menzionata nel §1.)

[7] Fotocellule, lastre fotografiche.

[8] Si osservi: le oscillazioni del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ o del campo ψ_ρ *di per sé* ovviamente non lo sono!

[Incidentalmente si osservi che una analoga scomposizione dei campi grandi (q-numeri) $(\vec{E}, \vec{H})$ in $\vec{F}$ ed $\vec{F}^*$ è necessaria se si vuole sottrarre l'energia di punto zero della radiazione.]

Ora risulta una differenza rispetto al campo materiale:

Anche nell'interazione con la materia permane l'assenza di "fotoni d'energia negativa", mentre per il campo materiale è noto che la transizione da "stati d'energia positiva" a "stati d'energia negativa" non può essere eliminata.

Queste quantità $\vec{f}$ ed $\vec{f}^*$ introducono necessariamente nella teoria l'operatore non locale $\sqrt{-\Delta}$ oppure $1/\sqrt{-\Delta}$; si ha a che fare non solo con la loro dipendenza temporale, ma anche (in assenza di cariche, che modificano la loro dipendenza temporale) addirittura con il loro comportamento *incontrollabile* rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si deve ricordare ancora in particolare che per le onde di Dirac la condizione aggiuntiva di utilizzare solo campi con stati d'energia positiva (Schrödinger) introdurrebbe comunque nella teoria un operatore *non locale* analogo a $\sqrt{-\Delta}$ (cioè $\sqrt{mc^2 + \Delta}$). *Questi operatori non locali*, che del tutto *in generale* si avvertono come innaturali, sono caratteristici dell'esclusione degli stati d'energia negativa.

Abbiamo qui urtato nel problema irrisolto, che ragionevolmente deve porsi con gli "stati d'energia negativa". Ci si dovrà sempre attenere alla prescrizione: "Uno stato stazionario corrisponde necessariamente ad una soluzione con la dipendenza temporale $\exp[-i\nu t]$"? Ciò naturalmente dipende da come si può descrivere l'interazione tra luce e materia.

Ancora più importante è la domanda: anche in una teoria futura del campo *materiale*, che permetta di evitare le difficoltà degli stati d'energia negativa, resterà valido il concetto della densità di probabilità W? L'autore sospetta che una tale teoria futura porterà una modifica importante del concetto di spazio-tempo (non solo del concetto di campo) in regioni della dimensione h/mc ovvero h/mc^2. In una siffatta teoria le differenze qui discusse tra fotoni ed elettroni saranno accresciute o diminuite? Dobbiamo lasciare aperta tale questione.

Veniamo ad una domanda meno difficile.

2. Differenze tra il campo Ψ_ρ e il campo $(\vec{E}, \vec{H})$. Il campo $(\vec{E}, \vec{H})$ ha la proprietà che nel limite d'un gran numero di quanti di luce è un campo misurabile classicamente, cioè un campo per il quale non solo le ampiezze, ma anche le fasi siano misurabili con precisione relativamente assai alta. Ma in proposito è essenziale e decisivo che: *ogni misura di $\vec{E}$ o di $\vec{H}$ in un intervallo di tempo finito è legata ad una variazione indeterminata del numero di fotoni presenti.* Lo si vede dal fatto che nella misura della fase di $\vec{E}$ o di $\vec{H}$ si deve utilizzare la forza di Lorentz. Il corpo di prova carico utilizzato a causa della sua accelerazione irraggerà nel campo da misurare ed emetterà o assorbirà energia (a seconda della relazione di fase con il campo di radiazione da misurare), quindi il numero di quanti di luce cambierà (dalla durata T della misura viene determinata la frequenza media $\nu \sim 1/T$ dei quanti diffusi). Questo non è un accidente del processo di misura, ma discende anche dal formalismo: il numero dei quanti di luce N ed $\vec{E}$ o $\vec{H}$ non sono commutabili, le disposizioni sperimentali per la misura di queste quantità si escludono quindi mutuamente (complementarità come nel caso di p e q).

Ora il campo Ψ_ρ ha da ubbidire alla statistica di Fermi invece che a quella di Bose e ciò già da solo rende impossibile misurarlo come un campo classico. Gli autovalori delle funzioni $\Psi_\rho(\vec{x})$ non consistono infatti nell'insieme di tutte le funzioni continue, ma in una varietà molto più ristretta di certe funzioni scalino.

Perciò in questo caso le Ψ_ρ non sono un campo nel senso consueto. Immaginiamoci altresì delle particelle elementari fittizie con statistica di Bose, oppure consideriamo particelle α, e assumiamo che esse esercitino delle forze tra loro e le avvertano sotto l'azione di campi di radiazione esterni, ma che esse non si frantumino e che si possa prescindere da effetti di struttura particolari, cioè che si comportino come particelle elementari. Allora secondo Peierls[9] risulta: in un insieme di particelle uguali, costituito da quelle con statistica di Bose, il campo Ψ_ρ è *per principio non misurabile finché non hanno luogo processi nei quali il numero totale delle particelle cambia.* Intervengono allora nella funzione di Hamilton solo elementi di matrice di $\Psi_\rho^*\Psi_\sigma$ ovvero di $\Psi_\rho^*\partial\Psi_\sigma/\partial x$ (quantità che sono commutabili con il numero totale delle particelle). La scelta della fase di Ψ_ρ e quindi della dipendenza dal punto della parte reale ed immaginaria è indifferente. *Nell'assenza di quei processi* (sui processi di annichilazione per irraggiamento non sappiamo nulla) *è contenuta anche l'assenza dell'analogo della forza di Lorentz per il campo materiale.*

§3. *La domanda sulla formulabilità della meccanica quantistica come teoria di azione per contatto.*

La domanda in questione è assai complessa e per essa vale in misura particolare il fatto che l'ultima parola in proposito non è stata affatto ancor detta mediante l'attuale teoria dei quanti. Tuttavia mi sembra che essa possa essere trattata anche in modo diverso da come ha fatto Ehrenfest nella sua nota.

In primo luogo non mi sembra raccomandabile senza condizioni l'identificare il concetto di *teoria multidimensionale*, cioè di una teoria che descrive le N particelle con uno spazio delle configurazioni a $3N+1$ dimensioni - con il concetto di *teoria di azione a distanza.* Anche nella meccanica statistica classica si introduce per esempio per la descrizione del comportamento statistico di un insieme di particelle uno spazio delle fasi multidimensionale (se si include il tempo come dimensione speciale, esso ha per N particelle $6N+1$ dimensioni invece che $3N+1$), e ciò anche quando le forze tra le particelle hanno una velocità di propagazione finita, nel qual caso non si può quindi parlare affatto di azione a distanza. Inoltre le $3N$ coordinate di posizione delle particelle possono essere intese come descriventi le loro posizioni nel consueto spazio tridimensionale.

Perciò la domanda in questione non sarà discussa qui dal punto di vista della possibilità del recupero del continuo tetradimensionale, ma piuttosto nel modo seguente. Nella teoria classica si passa dalla teoria d'azione a distanza a quella d'azione per contatto riscrivendo la legge di Coulomb con l'introduzione del campo elettrico come concetto intermedio nelle equazioni differenziali del campo. La questione da discutere qui è ora questa: *si può fare qualcosa d'analogo anche nella meccanica quantistica?*

Consideriamo dapprima come nella teoria originaria di Schrödinger dello spazio delle configurazioni solo l'interazione elettrostatica delle particelle, trascuriamo quindi il ritardo e l'interazione magnetica. Introduciamo allora come concetto intermedio il campo $\vec{E}(\vec{x},t)$ dipendente dal c-numero spazio (e dal c-numero tempo). Inoltre le coordinate del *punto corrente* siano determinate da $\vec{x}$ in contrapposizione con le $3N$ coordinate $\vec{X}^{(s)}$, $s=1,\ldots,N$ delle N particelle. Le x_1, x_2, x_3 sono

[9] Questa osservazione di Peierls deriva dalla sua non pubblicata Züricher Habilitationsvortrag sull'analogia tra luce e materia e la si utilizza qui con il suo cortese consenso.

commutabili con tutte le quantità, le $\vec{X}^{(s)}$ non sono commutabili con gli impulsi $\vec{p}^{(s)} = (h/i)\partial/\partial X^{(s)}$. Il campo $\vec{E}(\vec{x})$ è commutabile con le $\vec{X}^{(s)}$, ma non con le $\vec{p}^{(s)}$. Come sostituzione della legge di Coulomb deve valere l'equazione:

$$\text{div}\,\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \sum_{1}^{N} e_s \delta(\vec{x} - \vec{X}^{(s)}). \tag{*}$$

Se $r_s = |\vec{x} - \vec{X}^{(s)}|$ è la distanza della particells s-esima dal punto corrente, sarà

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum \frac{e_s}{r_s^2} \frac{\vec{x} - \vec{X}^{(s)}}{r_s}.$$

Come equazione di Schrödinger si deve ora assumere

$$-\frac{h}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\sum_s \frac{h^2}{2m_s}\Delta_s + \frac{1}{2}\int \vec{E}^2(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \right] \psi(t, \vec{X}^{(s)})$$

$$(\Delta_s = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial X_k^{(s)2}}).$$

Questa *sarebbe* identica all'equazione di Schrödinger se non valesse

$$\frac{1}{2}\int \vec{E}^2(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \frac{e_s e_{s'}}{r_{ss'}},$$

dove $s = s'$ *non* è escluso. I termini d'energia propria $1/r_{ss} = \infty$ sono quindi contenuti in essa. Del resto si potrebbe renderli *finiti* se nella (*) al posto della funzione δ venisse introdotta una funzione D finita, sensibilmente diversa da zero in una regione con dimensioni lineari dell'ordine di grandezza del raggio dell'elettrone, che fosse caratteristica per la forma dell'elettrone.

Il procedimento delineato si può, come è stato mostrato nell'elettrodinamica quantistica[10], generalizzare in modo tale da descrivere anche i processi magnetici e radiativi (ritardo). Si potrebbe anche introdurre la funzione D della forma dell'elettrone, solo che tale forma non sarebbe relativisticamente invariante (proprio come nella teoria classica).

Si hanno certi vantaggi ad adoperare, non il campo Ψ grande per la materia ed il campo di Landau-Peierls per i quanti di luce, ma $\vec{E}, \vec{H}$ (non commutabili!) e lo spazio delle configurazioni delle $X_k^{(s)}$ per la materia, poiché *queste* quantità sono quelle che si comportano *classicamente* nel caso limite. Per particelle puntiformi risulta allora una proprietà delle equazioni, che può essere considerata come invarianza relativistica e che (senza utilizzare il campo Ψ grande) può essere dimostrata. Ma anche a prescindere dalla questione dell'energia propria la teoria non mi pare soddisfacente: *non* a motivo di un'ipotesi d'azione a distanza, che a mio avviso *non* sussiste più, ma a seguito del singolare privilegio dello spazio rispetto al tempo, che si esprime nell'utilizzo di *un* t per il tempo in luogo dell'utilizzo di tempi di

[10] Vedi in proposito l'articolo dell'autore in Handbuch der Physik menzionato all'inizio, che si trova in stampa.

particella $t^{(s)}$ accanto al tempo t del punto corrente, che solo renderebbe la teoria più simmetrica.

È altresì probabile che il problema dell'energia propria potrà trovare una soluzione soddisfacente solo mediante una modificazione dell'attuale concetto di spazio-tempo. Una tale modificazione dovrebbe trasformare anche i concetti di "azione per contatto" e di "azione a distanza", poiché essi presuppongono essenzialmente il concetto solito di spazio-tempo.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgen. Technischen Hochschule.