Osservazioni sul principio dell'azione e reazione nella dinamica generale.[1]

Max Planck (Berlin-Grunewald)

È noto che il principio newtoniano dell'uguaglianza di azione e reazione ha come vero contenuto la legge della costanza della quantità di moto ovvero dell'impulso del moto; potrei quindi parlare di quel principio anche solo nel senso di questa legge, e precisamente del suo significato per la dinamica generale, che comprende non solo la meccanica in senso stretto, ma anche l'elettrodinamica e la termodinamica.

Molti di noi ben ricordano l'impressione che si sollevò quando H.A. Lorentz nella sua costruzione dell'elettrodinamica atomistica a partire dall'etere in quiete negò la validità generale del terzo assioma di Newton, e non potè non succedere che questa circostanza fosse fatta valere come una pesante obiezione, per esempio da parte di H. Poincaré, contro la teoria di Lorentz. Un po' di calma tornò solo quando, in particolare con le ricerche di M. Abraham, si mostrò che il principio di reazione tuttavia è ancora da salvare, e nella sua completa generalità, purché oltre alla quantità di moto meccanica, la sola nota finora, si introduca anche una nuova quantità di moto, quella elettromagnetica. Abraham ha reso questo ancor più plausibile, mettendo a confronto la conservazione della quantità di moto con la conservazione dell'energia. Allo stesso modo come il principio dell'energia è violato quando non si tiene conto dell'energia elettromagnetica, ed è soddisfatto quando s'introduce questo tipo d'energia, il principio di reazione sarà violato quando si consideri solo la quantità di moto meccanica, e sarà invece soddisfatto non appena si tenga presente anche la quantità di moto elettromagnetica.

Tuttavia questo confronto di per sè certo inoppugnabile lascia intatta una differenza essenziale. Infatti dell'energia conosciamo già un'intera serie di tipi diversi: l'energia cinetica, la gravitazione, l'energia di deformazione elastica, il calore, l'energia chimica, e non significa quindi una novità di principio se a queste diverse forme si aggrega come un'ulteriore forma anche l'energia elettromagnetica. Invece di quantità di moto se ne conosceva finora una sola: proprio quella meccanica. Mentre l'energia rappresenta fin dall'inizio un concetto fisico universale, finora la quantità di moto era specificamente un concetto meccanico, il principio di reazione specificamente una legge meccanica, e quindi la generalizzazione riconosciuta come necessaria sarebbe stata pur sempre avvertita anche come una rivoluzione nei principî, mediante la quale il concetto finora relativamente semplice e unitario di quantità di moto assume un carattere notevolmente complicato.

Ora, non è possibile formare anche dal punto di vista della dinamica generale una definizione unitaria della quantità di moto, come prima succedeva nella meccanica, malgrado il fatto che essa ora comprenda sia la forma meccanica che quella elettromagnetica? Una risposta affermativa a questa domanda porterebbe in ogni caso anche a un progresso nella conoscenza del vero significato del principio di reazione.

Di fatto una tale definizione unitaria della quantità di moto sembra possibile e realizzabile, per lo meno quando contemporaneamente si assuma valida la teoria di Einstein della relatività[2]. Ora si deve altresì rilevare che questa teoria oggi come oggi ancora non si può dare affatto per sicura. Solo perché le sue deviazioni dalle

[1] Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr. **9**, 828-830 (1908).

[2] Vedasi in particolare F. Hasenöhrl (Sitzungsbericht d. Akad. d. Wiss. zu Wien del 31 ottobre

altre teorie considerate si limitano a termini oltremodo piccoli si può dire in ogni caso che essa può esse ritenuta valida a meno di quelle deviazioni, e fino a questo punto anche le considerazioni seguenti mantengono quindi un significato sicuro in tutti i casi.

Ora nella teoria della relatività la quantità di moto si può ricondurre del tutto in generale a quel vettore che esprime la corrente d'energia, ma non la sola corrente d'energia elettromagnetica di Poynting, bensì la corrente d'energia del tutto in generale. Considerato dal punto di vista della teoria di azione per contatto proprio ogni tipo d'energia può cambiare la sua posizione nello spazio solo mediante propagazione continua, non con variazione per salti. Perciò il principio dell'energia richiede in generale che la variazione dell'energia complessiva che si trova in un certo volume sia uguale ad un integrale di superficie, cioè alla somma algebrica dell'energia che fluisce complessivamente verso l'interno attraverso la superficie del volume. La corrente può aver luogo per irraggiamento, come con il vettore di Poynting, per conduzione, come nel caso della pressione o dell'urto e nella conduzione del calore, e per convezione, come per l'ingresso di atomi ponderabili o di elettroni attraverso la superficie considerata. In ogni caso la corrente d'energia complessiva in ogni punto dello spazio, riferita all'unità di superficie e di tempo, è un determinato vettore finito, e il quoziente di questo vettore per il quadrato della velocità della luce c è del tutto in generale la quantità di moto riferita all'unità di volume.

Prendiamo come esempio un fluido ponderabile in moto con la velocità q sottoposto alla pressione p. Attraverso un elemento di superficie df di un piano in quiete orientato normalmente a q fluisce nel tempo dt energia per conduzione e per convezione. L'energia di conduzione è il lavoro meccanico: $p \cdot df \cdot qdt$. L'energia di convezione è: $df \cdot \varepsilon \cdot qdt$, dove ε indica la densità d'energia. Di conseguenza secondo la definizione la quantità di moto dell'unità di volume è:

$$\frac{(\varepsilon + p)\, q}{c^2}.$$

Si confronti quest'espressione con la consueta quantità di moto meccanica kq, dove k indica la densità del fluido; si trova allora:

$$k = \frac{\varepsilon + p}{c^2},$$

una nota relazione della teoria della relatività[3].

Dal punto di vista delineato il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione può essere indicato del tutto in generale come la "legge d'inerzia dell'energia".

Ma possiamo procedere ancora d'un passo. Come la costanza dell'energia porta con sè il concetto di corrente d'energia, così anche la costanza della quantità di moto porta necessariamente con sè il concetto di "corrente di quantità di moto", detto in breve: di "corrente d'impulso". Infatti la quantità di moto che si trova in un determinato volume può cambiare solo per azioni esterne, quindi secondo la teoria dell'azione per contatto solo mediante processi alla superficie del volume, quindi l'ammontare della variazione nell'unità di tempo è un integrale di superficie,

1907, p. 1400), che invero non parte direttamente dalla teoria della relatività, ma tuttavia, a quanto vedo, giunge esattamente agli stessi risultati di questa.

[3]Vedasi per esempio M. Planck, Ann. d. Phys. (4) **25**, 27, 1908. Equazione (48).

che può essere indicato come la corrente d'impulso complessiva entrante nell'interno del volume. Ma una differenza importante rispetto alla corrente d'energia sta tuttavia nel fatto che l'energia è uno scalare mentre la quantità di moto è un vettore. Pertanto l'energia che fluisce entro un volume sarà espressa da un solo integrale di superficie, e la corrente d'energia è un vettore. Invece la quantità di moto che fluisce in un volume sarà espressa da tre integrali di superficie, in corrispondenza alle tre componenti della quantità di moto, e la corrente d'impulso in un punto è un tripletto tensoriale, caratterizzato nella notazione di Voigt[4] da sei componenti.

Per farsi un'idea del significato di questo tripletto tensoriale, consideriamo in primo luogo la quantità di moto meccanica e la corrente d'impulso meccanica ad essa corrispondente. La corrente d'impulso complessiva verso l'interno di un volume, quindi l'incremento per unità di tempo della quantità di moto che si trova all'interno, è uguale alla forza meccanica risultante che agisce su tutta la massa che si trova nel volume. Di conseguenza la corrente d'impulso attraverso un elemento di superficie non è nient'altro che la pressione meccanica sull'elemento di superficie, e le componenti della stessa hanno la forma:

$$\begin{aligned}
X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),\\
Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),\\
Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz),
\end{aligned}$$

dove n indica la normale interna dell'elemento di superficie. X_x, Y_y, Z_z, $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ sono le sei componenti del tripletto tensoriale che rappresenta la corrente d'impulso.

In modo del tutto analogo succede con la corrente d'impulso elettromagnetica nel vuoto. Le componenti di questo tripletto tensoriale non sono nient'altro che i noti sforzi di Maxwell. La loro integrazione su di una superficie chiusa produce la corrente d'impulso complessiva verso l'interno e quindi l'incremento della quantità di moto complessiva meccanica ed elettromagnetica contenuta nello spazio racchiuso. È notevole che mediante questa legge gli sforzi di Maxwell acquistino un significato fisico anche per la teoria dell'etere in quiete. Infatti come forza di pressione questi sforzi non hanno in questa teoria alcun corretto significato, poiché ad una forza che agisca su qualcosa di assolutamente immobile non si può attribuire alcun senso[5]. Il fatto che tuttavia gli sforzi di Maxwell, malgrado essi fossero stati per così dire abrogati ufficialmente, si siano mantenuti nella teoria dell'etere in quiete, poiché si dimostrano spesso un comodo ausilio matematico per certi calcoli, avrebbe già potuto suggerire l'idea che ad essi spetti invece un qualche ruolo fisico particolare, mediante il quale essi sarebbero legittimati anche per l'etere in quiete.

È naturale estendere il concetto di corrente d'impulso anche al campo gravitazionale per il quale si dà, a prescindere dal segno fatale, un numero notevole di analogie; tuttavia una trattazione più approfondita di questo problema ci porterebbe qui troppo lontano.

[4] Vedasi M. Abraham, Enzyklopädie d. math. Wiss. IV, 14, p. 28.

[5] Vedasi H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen, p. 28, Leiden 1895.

Discussione.

Minkowski: a mio avviso le leggi sulla quantità di moto vanno derivate direttamente dalla legge dell'energia. Infatti la legge dell'energia nella teoria di Lorentz dipende dal sistema di riferimento per spazio e tempo. Se si scrive la legge dell'energia per ogni possibile sistema di riferimento si hanno più equazioni, e in queste sono contenute le leggi sulla quantità di moto.

Planck: certo. Però io considero l'indipendenza dal sistema di riferimento non come un risultato fisico sicuro, ma piuttosto come un'ipotesi, che tengo bensì per promettente, ma ancora in nessun modo per provata. Si ha pur da dimostrare ancora se queste relazioni sussistono anche realmente in natura. Ciò lo possiamo apprendere solo per via sperimentale, e si spera che il tempo per apprenderlo non sia più lontano.

(Ricevuto il 9 ottobre 1908)