La nuova ipotesi di Bohr sulla radiazione e la legge dell'energia[1]

E. Schrödinger, Zurigo.

Nel numero di maggio del Phil. Mag. (contemporaneamente in tedesco in Zeitschr. f. Phys. **24**, 69) Bohr, Kramers e Slater sviluppano una nuova concezione della connessione dei processi radiativi con i cosidetti "salti quantici", che sollecita un interesse altrettanto grande dal punto di vista del fisico e da quello del filosofo. Infatti con essa l'idea espressa già da più parti[2] che forse il singolo processo molecolare non sia determinato da "leggi" esclusivamente causali, assume per la prima volta una forma tangibile. Le caratteristiche fondamentali della nuova concezione, che del resto da un altro aspetto significa un'ampia ripresa della teoria elettromagnetica classica della radiazione col rifiuto di ogni "ipotesi dei quanti di luce", sono in breve le seguenti:

Gli atomi e le molecole generano onde sferiche con quelle proprietà generali che si sono assunte nella teoria elettromagnetica classica. Essi emettono radiazione di questa forma *in primo luogo* spontaneamente, ma non, come la teoria dei quanti finora assumeva, in quanti determinati e come diretta conseguenza della *transizione* da uno stato stazionario[3] ad un altro con energia inferiore, bensì non appena e *finché* essi si trovano in uno stato stazionario, dal quale siano *possibili* una o più transizioni in stati di energia minore ("permesse" secondo il principio di corrispondenza). E precisamente saranno emesse simultaneamente e continuamente proprio *tante* onde sferiche monocromatiche quante sono le transizioni possibili, ognuna "corrisponde" ad una determinata transizione ed ha il valore della frequenza che si calcola dalla differenza d'energia ad essa relativa dividendo per h. Durante questa emissione di radiazione *lo stato stazionario non cambia.* L'emissione di radiazione è unicamente associata all'esistenza di una certa *probabilità* λdt, costante nel tempo, che la transizione corrispondente abbia luogo realmente nel prossimo intervallino di tempo dt. Se sono possibili più transizioni le diverse probabilità competono tra loro e dipende dal caso quale si compia, esattamente come nel decadimento radioattivo ramificato. L'effettivo accadere di una transizione non ha per la *radiazione* nessun'altra conseguenza del fatto che essa s'*interrompe* nella forma tenuta precedentemente e da ora si instaura in quella forma che corrisponde alle eventuali ulteriori transizioni possibili dal livello d'energia ora raggiunto a livelli ancora più profondi. Il *bilancio dell'energia* è assicurato *solo in media*, e questo per il fatto che ogni coefficiente di probabilità λ sta con l'*intensità* della radiazione corrispondente in un rapporto esattamente determinato, in modo che la quantità d'energia ceduta in forma di radiazione di una determinata frequenza durante il tempo di permanenza *medio* nel livello superiore è esattamente uguale al prodotto della perdita d'energia reale dell'atomo nella transizione *corrispondente* per la percentuale dei casi nei quali sarà scelta proprio questa transizione (nel caso che siano possibili *più* transizioni; altrimenti la suddetta percentuale è uno, e l'espressione si semplifica.

[1] Bohrs neue Strahlungshypothese und die Energiesatz, Die Naturwissenschaften **12**, 720-724 (1924).

[2] O.W. Richardson, The electron theory of matter, seconda ed., p. 507, Cambridge 1916; F. Exner, Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften. p. 645-702, Wien: Deuticke 1919.

[3] Stato stazionario = livello d'energia.

Si calcola facilmente che in *ogni* caso dev'essere semplicemente

$$s = \lambda\varepsilon,$$

dove s è l'energia di radiazione di una determinata frequenza emessa nell'unità di tempo, ε la corrispondente perdita d'energia dell'atomo, λ il coefficiente di probabilità già prima introdotto per la transizione considerata).

Oltre a queste onde sferiche "spontanee" si devono assumere ancora onde sferiche "indotte", potremmo anche dire "diffuse", che compaiono non appena radiazione esterna incida sull'atomo o sulla molecola. Ad esse corrisponde una probabilità di transizione "indotta", che è dello stesso tipo di quella spontanea, salvo che in primo luogo il suo coefficiente di probabilità dipende dall'intensità della radiazione incidente e si annulla con esso, e che in secondo luogo tale probabilità di transizione sarà indotta anche per la transizione ad un livello di *energia superiore*. (Queste ipotesi corrispondono interamente a quelle di Einstein nel suo celebre lavoro sulla radiazione del 1917). Distingueremo ora due casi, tra i quali però non si deve assumere in verità una separazione netta, cioè *primo caso*: la frequenza dell'onda primaria incidente è esattamente *uguale* ad una frequenza spontanea di quello stato nel quale l'atomo si trova, cioè ad una frequenza spontanea per la quale il livello considerato è livello di partenza *oppure* di arrivo; *secondo caso*: la frequenza dell'onda primaria non coincide con *nessuna* frequenza spontanea. In *entrambi* i casi la frequenza dell'onda *indotta* è uguale alla *frequenza primaria*. Nel *primo* caso, che ora più precisamente consideriamo, l'onda indotta sta con la primaria in una tale relazione di fase che per interferenza sottrae o aggiunge le stesse quantità d'energia *intese* in senso relativo. Un calcolo ben noto nella teoria classica della dispersione insegna che per l'azione simultanea di più sistemi "diffusori" dello stesso tipo questa sottrazione o aggiunta di energia avviene principalmente *nella direzione* dell'onda primaria: abbiamo o *assorbimento* o *rafforzamento orientato* dell'onda primaria. Quale dei due, dipende dalla *fase* delle onde indotte, e questa a sua volta dipenderà dal fatto che la corrispondente transizione indotta porti ad un livello *più alto* o *più profondo*. (Che il rafforzamento orientato, che corrisponde al *secondo* caso, non si possa mai *osservare* realmente, ha la sua origine nel fatto che proprio in tutti gli esperimenti siano presenti *più* atomi nel livello *inferiore* di una data transizione che nel livello superiore, di modo che l'assorbimento prevale). - Naturalmente l'energia che compare o che sparisce come radiazione deve sempre essere uguale *in media* all'energia persa o acquistata dagli atomi. Pertanto nel caso ora trattato le probabilità di transizione devono essere *intese* in senso relativo, in concomitanza con l'influenza energetica relativamente *importante* dell'onda primaria, e devono del resto essere *proporzionali* all'intensità della radiazione incidente, poiché ciò vale sperimentalmente per l'influenza energetica (assorbimento).

Passiamo ora *in secondo luogo* al caso nel quale la frequenza primaria *non* coincida con una frequenza spontanea. Allora l'atomo, come detto, dovrà reagire ugualmente con un'onda sferica con la frequenza primaria. Ma l'influenza *energetica* dell'onda primaria tramite l'onda sferica e quindi la probabilità di transizione indotta sono ora *assai trascurabili*. Ma ciò non significa che l'onda primaria *in generale* sia influenzata solo in modo trascurabile. L'esiguità dell'influenza *energetica* sarà accompagnata da una mutata *relazione di fase*, e questa favorisce nel caso di molti sistemi di ugual potere diffondente proprio un *tale* influsso sull'onda primaria, quale si può osservare nei mezzi trasparenti come velocità di fase variabile (dispersione), in altri casi (per esempio nell'azzurro del cielo) come diffusione, per le superfici metalliche piane come riflessione, per i raggi X nei cristalli come figure di diffrazione (su questi problemi si pone in evidenza un lavoro specialistico di Kramers[4]).

Il caso nel quale - secondo la vecchia concezione - l'$h\nu$ dell'onda primaria basta alla ionizzazione dell'atomo, cioè basta a scagliare uno dei suoi elettroni su un'orbita aperiodica, che lo allontana permanentemente dall'atomo a riposo, è da annoverare con *quello di cui* s'è *parlato per primo*: la frequenza primaria coincide con quella frequenza che l'atomo emetterebbe con continuità spontaneamente per la *presenza originaria di quell'orbita aperiodica*, associata a una certa "probabilità di mangiarsi" l'elettrone. Dobbiamo assumere in proposito che quando una radiazione primaria capace di ionizzare incide sull'atomo integro immediatamente si instauri una radiazione indotta che indebolisce *sensibilmente* la radiazione primaria, e come pendant energetico di questo una *sensibile* probabilità di transizione, cioè in questo caso una *probabilità di ionizzazione.* Proprio in questo caso si ha inoltre una circostanza di grande significato che finora abbiamo implicitamente passato sotto silenzio, ma che in verità bisogna *sempre* tener presente: oltre al *bilancio dell'energia* anche il *bilancio dell'impulso* dev'essere rispettato *in media.* Succede che per ogni "transizione" l'atomo come un tutto subisce una piccola spinta e quindi risulta inoltre la necessità di ammettere siffatte piccole spinte anche per conto loro come transizioni indotte, senza legame con un'altra variazione d'energia. Il pendant fenomenologico della spinta è la pressione di radiazione. Mentre ora la spinta, come detto, viene in generale ricevuta dall'atomo come un tutto, e per questo a causa della grande massa del nucleo è abbastanza insignificante dal punto di vista energetico, si deve assumere che nella *ionizzazione acquisti probabilità* un altro tipo di reazione, per il quale l'*elettrone interessato* riceve da *solo* tutto l'impulso, quando il prodotto caratteristico $h\nu$ della radiazione primaria supera di molte volte l'energia di ionizzazione. Questo tipo di reazione si realizza con esattezza totale con un elettrone *libero*, per il quale essa è la sola possibile. Strettamente sulla scorta della teoria di Compton (Phys. Rev. **21**, 483, 1923) un elettrone libero (a riposo) risponderà all'incidere di un'onda primaria immediatamente con un'onda sferica, come secondo la teoria classica *sarebbe* irraggiata da un elettrone che si *muovesse* nella direzione del raggio primario con velocità determinata, dipendente dalla frequenza primaria. In connessione con ciò sussiste una certa probabilità di transizione dell'elettrone ad una di quelle velocità che devono essere possibili anche secondo la teoria di Compton-Debye, fondata sulla vecchia concezione.

Infine si può ancora accennare in breve ad una circostanza importante: il suddividersi della radiazione atomica in treni d'onda di lunghezza finita, che secondo la nuova concezione dipende dalle transizioni, promette di dare una rappresentazione della *larghezza* delle righe spettrali e insieme della *durata* media *della luce* dell'atomo, studiata direttamente da W. Wien; "naturali", cioè non falsate dall'effetto Stark, dall'effetto Doppler, dagli urti molecolari et similia; due cose che per la teoria classica e per la percezione intuitiva di ogni fisico sono strettamente connesse, senza che la "vecchia teoria dei quanti" fosse in grado di produrre più che spunti del tutto vaghi per una tale connessione.

Dopo questa esposizione dei fondamenti della nuova concezione di Bohr, come se la raffigura lo scrivente, aggiungeremo alcune altre considerazioni. Per così dire

[4]Nota aggiunta alla correzione delle bozze: vedasi anche Kramers, Nature **113**, 673, 1924.

la più inquietante di esse è l'abbandono per principio della legge dell'energia e dell'impulso per ogni processo radiativo. Quest'abbandono non è proprio qualcosa di insignificante. Per esempio, un atomo abbia raggiunto il suo secondo livello energetico, con un'eccedenza d'energia ε sopra il livello fondamentale, e ritorni dopo qualche tempo al suo livello fondamentale sotto l'influenza della probabilità di transizione spontanea; si dia ora alla costante di tempo della legge di decadimento "radioattivo" un valore tale che la radiazione irraggiata con continuità nel frattempo assuma *in media* il valore ε; si verifica allora facilmente che *nel caso singolo* sussiste una probabilità nient'affatto trascurabile per un valore maggiore di 2ε, o anche per un valore minore di $\varepsilon/10$. Le probabilità corrispondenti sono rispettivamente 0,135 e 0,095). Per l'"errore" medio che l'atomo fa su un siffatto ammontare d'energia ε, risulta: ε, cioè in media il 100% (per "errore medio" intendiamo la radice quadrata del valore medio quadratico dei contributi in meno o in più nell'energia di radiazione prodotta). Ora sappiamo dagli esperimenti di W. Wien che i tempi di permanenza medi sono straordinariamente brevi, nel caso delle righe dell'idrogeno $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ sec.. Ad alta temperatura, non appena ε diventa paragonabile all'energia media di traslazione di una molecola di gas $3kT/2$, ogni corpo ha una frazione non trascurabile del suo contenuto energetico accumulata sotto forma di una tale energia d'eccitazione. Tra questa parte dell'energia e il contenuto di radiazione del sistema ha luogo uno scambio continuo, e precisamente ogni "porzione d'energia" ε viene convertita in media $2/\tau$ volte al secondo. (*Due* volte $1/\tau$, perché al decadimento spontaneo devono corrispondere altrettante eccitazioni "indotte"; prescindiamo dai decadimenti *indotti*). Ogni atomo eccitato dà quindi luogo all'incirca 10^8 volte per secondo ad una *anomalia* dell'energia del valore medio ε! A una considerazione a prima vista appare inevitabile che il nostro corpo già in una frazione di secondo debba sottostare a variazioni assai considerevoli, del tutto irregolari del suo contenuto energetico. Davvero lo si può paragonare ad una persona che in successione rapida punti sempre nuove, cospicue parti del suo patrimonio nel gioco d'azzardo - anche se in uno *giusto*, cioè con uguali probabilità di vincere e di perdere.

Ma proprio il paragone con questo risolve la difficoltà. Pensiamo ad una persona che possieda un patrimonio di 10000 marchi d'oro, ossia di 10^{16} marchi di carta. Essa punti il suo *intero* patrimonio al gioco, ma in giocate di *un singolo marco di carta, una giocata per ogni banconota* e con chances del tutto uguali di perderlo o di vincerne un altro. Sebbene la persona abbia puntato al gioco per davvero tutto il suo patrimonio, essa corre tuttavia solo un rischio estremamente piccolo, con altrettanto esigue possibilità di vincita. Infatti essa perderà *quasi esattamente* la metà delle 10^{16} giocate, ed il calcolo delle probabilità precisa questo "quasi esattamente" nel senso che la probabilità di un *eccesso* di vincite o di perdite sostanzialmente maggiore di qualche $10^8 (= \sqrt{10^{16}})$ giocate singole è piccola in modo del tutto trascurabile. Con una probabilità rasentante la certezza la variazione totale del patrimonio non supererà sostanzialmente qualche centinaio di milioni di marchi di carta, cioè qualche centesimo di pfennig d'oro. Se la nostra persona ripetesse la sequenza delle giocate molte volte, ogni volta, come abbiamo detto, con la possibilità di vincere o perdere circa 10^8 marchi di carta, sarebbe naturalmente in errore se da ciò desumesse che 10^8 *siffatte serie di giocate* potrebbero produrre una variazione consistente del suo patrimonio. Infatti per la stessa legge i risultati delle *serie* di giocate si compenserebbero nella stragrande parte dei casi e darebbero solo un guadagno o una perdita dell'ordine di grandezza $10^8 \cdot \sqrt{10^8} = 10^{12}$ marchi di carta

$= 1$ marco d'oro. Solo 10^{16} *serie* di giocate (di 10^{16} giocate singole) potrebbero provocare con probabilità consistente una *consistente* variazione del patrimonio!

Andiamo ora a vedere come stanno realmente le relazioni numeriche in natura. Considereremo un caso relativamente "estremo", cioè uno che porti ad oscillazioni vere dell'energia relativamente grandi. Per questo prima di tutto la temperatura dev'essere abbastanza alta, perché intervengano stati eccitati con sbilanciamenti rapidi d'energia di ammontare percettibile. Assumiamo che l'energia d'eccitazione sia uguale alla differenza d'energia della riga rossa dell'idrogeno ($\varepsilon = 3 \cdot 10^{-13}$ erg), sicchè la temperatura T dev'essere di circa 3000^o(kT/ε sarà allora uguale a 1,3). Un *grammoatomo* potrebbe allora contenere benissimo la quantità d'energia $(1/2)RT$(= energia di un grado di libertà) in una forma siffatta, e non è irragionevole desumere la frequenza $(2/\tau)$ degli sbilanciamenti dal tempo di permanenza $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ sec. misurato da W. Wien sulle righe dell'idrogeno. Il numero degli atomi di volta in volta eccitati è

$$\frac{RT}{2\varepsilon}.$$

Il numero totale delle transizioni atomiche (decadimenti *ed* eccitazioni) è quindi

$$\frac{RT}{\varepsilon\tau}.$$

Ognuna provoca in media il "difetto d'energia" ε. A seguito della "legge della radice quadrata" ciò dà per l'oscillazione totale vera dell'energia per secondo

$$\Delta_w(\text{sec}) = \varepsilon\sqrt{\frac{RT}{\varepsilon\tau}} = \sqrt{\frac{\varepsilon RT}{\tau}}. \tag{1}$$

Con $RT = 8,3 \cdot 10^7 \cdot 3000 = 2,5 \cdot 10^{11}$ erg, e con i valori numerici precedenti per ε e τ risulta

$$\Delta_w(\text{sec}) = 1900 \ \text{ erg } \ = 4,5 \cdot 10^{-5} \ \text{ cal.}$$

È interessante confrontare questa oscillazione "vera" dell'energia del sistema isolato con le ben note oscillazioni dell'energia che il nostro sistema mostrerebbe anche secondo la vecchia concezione in un *bagno termico* - per distinguerle le chiameremo oscillazioni di scambio. Le piccole irregolarità nello scambio d'energia del sistema con il bagno termico hanno per conseguenza una scostamento medio dell'energia del sistema dal suo valor medio dell'ammontare

$$\Delta_a = \sqrt{kT \cdot CT}. \tag{2}$$

Qui k è la costante di Boltzmann, C la *capacità termica* del sistema. Se confrontiamo questa con la (1), kT è con le nostre ipotesi dell'ordine di grandezza di ε, e C è sicuramente dell'ordine di grandezza R (*maggiore* di $3R/2$, poiché per ipotesi i gradi di libertà interni dell'atomo partecipano al contenuto termico già in modo percettibile). Una differenza nell'*ordine di grandezza* la provoca solo il denominatore $\sqrt{\tau}$ in Δ_w. L'oscillazione vera *per secondo* è quindi nel nostro caso qualche migliaio di volte maggiore dell'oscillazione *media* di scambio. Ma il significato del denominatore $\sqrt{\tau}$ non sta tanto nel fatto che τ sia un numero *piccolo.* Questa è una circostanza accidentale, legata alla scelta dell'unità di tempo. Bensì questo denominatore ci rammenta che Δ_w è di dimensione fisica diversa rispetto a Δ_a, cioè erg $\sec^{-1/2}$, non erg. L'oscillazione vera *cresce con* la *radice quadrata del tempo* d'*osservazione*, per esempio nel caso nostro per *un anno* $(3,15 \cdot 10^7 \sec)$ varrebbe

$$\Delta_w(anno) = 0,25\ cal. \tag{3}$$

Il suo rapporto con l'oscillazione di scambio sarebbe indicato meglio *così*: l'oscillazione vera raggiunge il valore dell'oscillazione di scambio già dopo *un* tempo di permanenza medio.

Ciononostante l'ampiezza delle oscillazioni (1) e (3) di per sé non proprio così trascurabile non contraddice affatto l'esperienza esistente, e non sarebbe facile coglierle sperimentalmente. La difficoltà sta nell'isolamento termico del sistema oscillante, in particolare a temperatura così alta. Ma la temperatura alta è, come detto, necessaria perché i gradi di libertà con uno sbilanciamento d'energia così rapido possano partecipare sensibilmente al contenuto energetico.

Meglio che dal valore assoluto dell'oscillazione la rilevanza o irrilevanza del fenomeno risalta dal rapporto di quello con l'ammontare complessivo dell'energia "che può oscillare" (che abbiamo assunto $= RT/2$). Se dividiamo la (1) per $RT/2$ otteniamo

$$\Delta_{rel}(\sec) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{RT\tau}} = 1,5 \cdot 10^{-8} \tag{4}$$

nel caso calcolato. Per un anno risulta

$$\Delta_{rel}(\text{anno}) = 0,87 \cdot 10^{-4}.$$

Dalla comparsa di RT al denominatore si riconosce (cosa che è ben nota dalle oscillazioni di scambio), che le oscillazioni *relative* anche qui sono *inversamente* proporzionali alla radice quadrata dell'ammontare dell'energia passibile di oscillazione, quindi ceteris paribus alla radice della *massa* del sistema. Rimpicciolendo il sistema isolato si può quindi ottenere per l'oscillazione relativa un ammontare assai consistente - cosa che non stupisce, dato che per l'*atomo* isolato si raggiunge già nel tempo τ il valore 1! Ma naturalmente la difficoltà dell'isolamento termico sale già ben prima fino all'impossibilità.

Di assai grande influenza dev'essere la *frequenza* della radiazione, poiché si ha a che fare con la sua energia di eccitazione. Trattiamo il suo effetto sull'oscillazione relativa secondo la (4). Possiamo assumere ε/RT come indipendente dalla frequenza, se solo scegliamo la temperatura abbastanza alta perché i gradi di libertà in questione partecipino già in modo sensibile all'equilibrio termico. Invece il tempo medio di permanenza τ varia di certo fortemente con la frequenza. Secondo la teoria classica sarebbe inversamente proporzionale al quadrato della frequenza. Che ciò accada realmente come ordine di grandezza lo si può tenere per accertato secondo il punto di vista della *corrispondenza*, che è confermato dal fatto che la teoria classica nella regione ottica, dove conosciamo τ dagli esperimenti di W. Wien, dà il giusto ordine di grandezza (altrimenti uno dovrebbe ritenere questa coincidenza come un caso). Pertanto l'*oscillazione relativa sarebbe proporzionale alla frequenza.* Se quindi nel nostro esempio sostituiamo alla frequenza della riga H_α (lunghezza d'onda 6563 $\AA$) la frequenza della radiazione dura di Röntgen (lunghezza d'onda $0,2\ \AA$, rapporto di frequenza $\approx 3 \cdot 10^4$), arriviamo ad un'oscillazione relativa di

1/2 per mille al secondo; si raggiungerebbe il 100% in qualche mese. La temperatura corrispondente è dell'ordine di grandezza di cento milioni di gradi. Si vede che una considerevole indefinitezza del concetto di temperatura interviene solo a temperature alle quali non corrisponde in pratica alcun significato.

Se non si pronostica un calcolo più accurato in casi particolari o un metodo sperimentale geniale, che qualcuno potrebbe escogitare, possiamo quindi ben ritenere pacifico il risultato della nostra prima valutazione grossolana, che la nuova concezione da questo lato non è in contrasto con le esperienze compiute finora.

Tuttavia la conclusione che la *legge dell'energia* non debba essere una legge esatta della natura ha un grande significato di principio, malgrado la piccolezza delle deviazioni osservabili. Essa sarebbe completamente in linea con la legge dell'*entropia*, un'idea alla quale Franz Exner[5] è giunto alcuni anni fa da un punto di vista completamente diverso, più filosofico[6]. Questa ammissione avrebbe conseguenze teoriche di gran lunga più profonde che a suo tempo la medesima ammissione per la legge dell'entropia. Il fatto che la legge dell'entropia sia una legge puramente probabilistica sottrae ad ogni affermazione sul comportamento di un sistema nello stato di equilibrio termodinamico *in ogni istante* il suo carattere apodittico, e permette di aspettarsi *in ogni istante* certe piccole deviazioni, e con certezza deviazioni arbitrariamente grandi col passaggio di un tempo d'osservazione sufficientemente lungo. Tuttavia le affermazioni della termodinamica mantengono una validità del tutto *esatta* se le si considera come affermazioni sul comportamento medio, ovvero sul comportamento di un sistema *isolato*, *mediato* su un tempo d'osservazione sufficientemente lungo - con rigore totale nel limite tempo d'osservazione $= \infty$. Il sistema *compie degli scarti* sempre rispetto ad uno stato medio e questo è quello che la termodinamica dà esattamente.

Le cose vanno in modo del tutto diverso per quanto concerne la concezione di Exner-Bohr della legge dell'energia. Infatti un sistema *isolato* mostra *approssimativamente* solo per tempi relativamente *brevi* un determinato comportamento medio. Nel limite $t = \infty$ il suo comportamento sarà *completamente indeterminato*, poiché il suo *contenuto energetico* si discosta dal valore di partenza su una rosa di valori *secondo* una legge $\sqrt{t}$. Possiamo ridurre la dispersione solo aumentando la *dimensione* del sistema, oppure trattandolo come sistema parziale di un sistema più voluminoso ("bagno termico"). La validità *esatta* della termodinamica si può ora al massimo affermare ancora per un sistema in bagno termico, e precisamente con il doppio passaggio al limite: "limite per il bagno termico $= \infty$" e "limite per $t = \infty$". Tuttavia questo doppio passaggio al limite riserva difficoltà concettuali ben più grandi che prima quello semplice.

Si può anche dire così: una certa stabilità del divenire dell'universo sub specie aeternitatis può sussistere soltanto mediante la *connessione* di ogni sistema singolo con tutto il restante universo. Il singolo sistema separato sarebbe, visto come unità, caos. C'è bisogno della connessione come *elemento regolatore* permanente, senza il quale esso, nel suo comportamento energetico, vagherebbe disordinatamente. - È un ozioso gioco mentale, se uno si fa venire in mente l'analogia con i fenomeni sociali, etici, culturali?

[5] F. Exner, l.c.

[6] Lo scrivente ha fatto proprio il punto di vista di Exner nel suo Züricher Antrittsrede del 9 XII 1922 (non pubblicato).