La legge dell'energia e dell'impulso delle onde materiali[1]

E. Schrödinger

Il *principio di Hamilton*, dal quale si può derivare[2] l'equazione differenziale relativistica esatta delle onde di de Broglie, pare pienamente giustificare le speranze che io avevo riposto[3] in un'intima fusione della meccanica ondulatoria con l'elettrodinamica classica. Se si aggiunge all'integrando ("funzione di Lagrange") la ben nota funzione di Lagrange del campo elettromagnetico in assenza di cariche, ossia $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2$, si ottengono allo stesso tempo, quando si varî oltre alla funzione ψ anche il potenziale, le quattro equazioni d'onda per quest'ultimo, ossia l'intera elettrodinamica. Ciò si deve alla circostanza per primo notata da Gordon (op. cit.), che la funzione di Lagrange delle onde di de Broglie, derivata rispetto ad una componente del potenziale, dà la componente corrispondente della tetracorrente. Come la più importante conseguenza ulteriore si ottiene la legge dell'energia e dell'impulso per il campo totale, dalla quale si può derivare il contributo delle cariche, cioè della funzione ψ, al tensore d'energia e impulso. Mi è interamente chiaro che tutto ciò dev'essere in qualche modo contenuto nelle formulazioni assai generali di O. Klein[4] e di de Donder[5]. Non mi pare tuttavia superfluo esporre questa unione nella forma più semplice possibile, senza rapporti con la teoria della gravitazione e con l'interessante quinta coordinata, specialmente con riguardo ad una frattura assai importante, che pur sempre si apre tra questa bella teoria di campo in sé chiusa e l'esperienza (vedi la conclusione di questa Nota).

Sviluppiamo l'equazione delle onde ed il principio di Hamilton nella forma introdotta da Gordon. La prima si scrive (si somma sempre da 1 a 4 sugli indici ripetuti due volte):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\varphi_\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\varphi_\alpha\right) - k^2\right]\psi = 0, \tag{1}$$

dove s'è posto:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 = x,\ y,\ z;\ x_4 = ict$$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 = \frac{2\pi e}{hc}\cdot\mathfrak{A}_x,\ \mathfrak{A}_y,\ \mathfrak{A}_z;\ \varphi_4 = \frac{2\pi e}{hc}\cdot iV$$

$$k^2 = \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}. \tag{2}$$

$\mathfrak{A}$, V sono i potenziali; e, m_0, c, h le consuete costanti universali, $i = \sqrt{-1}$. Va notato in particolare che con l'introduzione di tetravettori con quarta componente immaginaria non si distruggono le proprietà di realtà. Si tratta solo di un mezzo formale di calcolo, per non dover scrivere in tutte le somme il quarto termine

[1] Der Energieimpulssatz der Materiewellen, Annalen der Physik **82**, 265-272 (1927).

[2] O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895 (1926); V. Fock, ibidem **38**, 242 (1926); J. Kudar, Ann. d. Phys. **81**, 632 (1926); W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117 (1926).

[3] Ann. d. Phys. **79**, 754 (1926).

[4] op. cit.

[5] Th. de Donder e H. van den Dungen, Compt. rend. 5-7-1926.

in particolare con il segno cambiato. Il passaggio al complesso coniugato perciò riguarda solo le i che appaiono esplicitamente e la funzione ψ.

Secondo Gordon (loc. cit.) la (1) è derivabile da un integrale di Hamilton con la funzione di Lagrange (reale)

$$L_m = (\psi_\alpha + i\varphi_\alpha\psi)(\bar{\psi}_\alpha - i\varphi_\alpha\bar{\psi}) + k^2\psi\bar{\psi}. \tag{3}$$

Barra = complesso coniugato. Per abbreviazione si è posto

$$\psi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\ \bar{\psi}_\alpha = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\alpha}. \tag{4}$$

L'indice α va quindi eseguito *dopo* la barra. Per eseguire le derivate variazionali si devono, come ha notato Gordon, variare ψ e $\bar{\psi}$ *come indipendenti.* Si riconosce facilmente che si arriva allo stesso risultato che se si variassero indipendentemente la parte reale e la parte immaginaria di ψ (come è propriamente giusto). Così una derivata variazionale si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha}\right) - \frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}} = 0, \tag{5}$$

in accordo con la (1); l'altra non dà niente di nuovo. Se si moltiplica la (5) per $\bar{\psi}$ si ottiene facilmente

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha}\right) = \bar{\psi}_\alpha\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} + \bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}} = L_m, \tag{6}$$

quest'ultima come L_m è omogenea di primo grado rispetto alle cinque quantità $\bar{\psi}$ e $\bar{\psi}_\alpha$. Se si passa al complesso coniugato, il secondo membro non cambia, e quindi per sottrazione

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} - \psi\frac{\partial L_m}{\partial\psi_\alpha}\right) = 0. \tag{7}$$

Questa è per Gordon l'*equazione di continuità dell'elettricità.* Si riconosce che

$$\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} - \psi\frac{\partial L_m}{\partial\psi_\alpha} = i\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\alpha}. \tag{8}$$

Definiamo la *tetracorrente* come

$$s_\alpha = -\lambda\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\alpha}, \tag{9}$$

dove λ è una costante universale da determinarsi. Intendiamo con s_α le quattro quantità, che nella teoria di Lorentz si scrivono

$$s_1,\ s_2,\ s_3 = \rho\frac{\mathfrak{v}}{c},\ s_4 = i\rho. \tag{10}$$

Completiamo ora la nostra funzione di Lagrange (3), com'è possibile secondo la (9), in modo che per variazione di φ_α si ottengano da essa le leggi del campo elettromagnetico. Poniamo

$$L_e = \frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{11}$$

con l'abbreviazione

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{12}$$

Secondo la (2) e le formule consuete si ha

$$\begin{gathered} f_{14} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_x, \; f_{24} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_y, \; f_{34} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_z; \\ f_{23} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_x, \; f_{31} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_y, \; f_{12} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_z; \end{gathered} \tag{13}$$

dove $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ rappresentano il campo nelle unità solite. Assumiamo ora come funzione di Lagrange

$$L = L_m + L_e \tag{14}$$

e otteniamo per variazione rispetto a φ_β nel modo noto

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\beta} = -\frac{s_\beta}{\lambda}. \tag{15}$$

Con il valore della costante

$$\lambda = \frac{hc}{8\pi^2 e}$$

la (15) reppresenta la cosidetta *seconda quaterna delle equazioni di Maxwell - Lorentz*, mentre la *prima* è per la (12) soddisfatta identicamente. Con la (12) e con la condizione aggiuntiva di Maxwell $(\partial\varphi_\alpha/\partial x_\alpha = 0)$ la (15) diventa l'equazione del potenziale

$$\frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = -\frac{s_\beta}{\lambda}. \tag{15'}$$

Dalla (15′) (e dalla condizione aggiuntiva di Maxwell) è facile verificare che

$$\frac{\partial T_{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma} = -\frac{f_{\rho\sigma} s_\sigma}{\lambda}, \tag{16}$$

dove

$$T_{\rho\sigma} = f_{\rho\alpha} f_{\sigma\alpha} - \delta_{\rho\sigma} L_e \tag{17}$$

è il noto tensore degli sforzi, dell'impulso e dell'energia di Maxwell (a meno di una costante universale). Il secondo membro della (16) indica secondo Lorentz l'energia o l'impulso sottratto dall'elettrone al campo. Questo secondo membro si può per mezzo della (9) e dell'equazione d'onda (5) di ψ parimenti esprimere come divergenza di un tensore, il tensore d'energia-impulso della carica (ovvero della "materia"). Si ottiene immediatamente

$$-\frac{f_{\rho\sigma} s_\sigma}{\lambda} = \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} - \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma}\right)\frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\right), \tag{18}$$

l'ultima per la conservazione della tetracorrente [Eq. (7) e (8)]. Si trova inoltre

$$\frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi}\bar\psi_\rho + \frac{\partial L_m}{\partial \psi}\psi_\rho + \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi_\sigma}\frac{\partial \bar\psi_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma}\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{19}$$

Ma per la (4)

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\rho} = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\sigma} \quad \text{etc.}, \tag{20}$$

così è possibile trasformare gli ultimi due termini come in un'integrazione per parti, con la quale trasformazione quattro termini si cancellano per la (5). Si ottiene

$$\frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\bar\psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma}\right) \tag{21}$$

Sottraiamo questa dalla (18) e otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{f_{\rho\sigma}s_\sigma}{\lambda} &= \frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\bar\psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} + \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\delta_{\rho\sigma}L_m - \bar\psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi_\sigma} - \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} - \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\right) \\ &= -\frac{\partial S_{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma}, \end{aligned} \tag{22}$$

dove introduciamo il *tensore dell'energia delle cariche* o *della "materia"*:

$$S_{\rho\sigma} = \bar\psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar\psi_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} + \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma} - \delta_{\rho\sigma}L_m. \tag{23}$$

Dalla (16) e dalla (22) si ottiene

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(T_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}) = 0} \tag{24}$$

come complessiva *legge di conservazione dell'energia* e *dell'impulso* per il campo elettromagnetico e per il campo d'onda di de Broglie presi insieme.

Il calcolo fornisce il tensore $S_{\rho\sigma}$ *simmetrico.* Si trova facilmente come espressione esplicita

$$S_{\rho\sigma} = \bar\psi_\rho\psi_\sigma + \bar\psi_\sigma\psi_\rho + i\varphi_\sigma(\bar\psi_\rho\psi - \psi_\rho\bar\psi) + i\varphi_\rho(\bar\psi_\sigma\psi - \psi_\sigma\bar\psi) + 2\psi\bar\psi\varphi_\rho\varphi_\sigma - \delta_{\rho\sigma}L_m, \tag{25}$$

ovvero la seguente, modellata più strettamente sulla forma (3) di L_m:

$$S_{\rho\sigma} = (\psi_\rho + i\varphi_\rho\psi)(\bar\psi_\sigma - i\varphi_\sigma\bar\psi) + (\psi_\sigma + i\varphi_\sigma\psi)(\bar\psi_\rho - i\varphi_\rho\bar\psi) - \delta_{\rho\sigma}L_m. \tag{25'}$$

Lo scalare di Laue (somma diagonale) $S_{\sigma\sigma}$ *non* è nullo, a differenza di $T_{\sigma\sigma}$. Si trova inoltre facilmente

$$S_{\sigma\sigma} = -2(L_m + k^2\psi\bar\psi). \tag{26}$$

Il tensore complessivo ammette la seguente rappresentazione, ben nota in casi analoghi, mediante la funzione di Lagrange complessiva

$$(27)\quad T_{\rho\sigma}+S_{\rho\sigma}=\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\rho}\right)}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_\rho}\bar{\psi}_\sigma+\frac{\partial L}{\partial\psi_\rho}\psi_\sigma+\frac{\partial L}{\partial\varphi_\rho}\varphi_\sigma-\delta_{\rho\sigma}L,$$

nella quale il parallelo è con la rappresentazione della funzione di Hamilton mediante la funzione di Lagrange nella meccanica del *punto.*

Si deve ricordare che le nostre componenti dei tensori $S_{\rho\sigma}$ e $T_{\rho\sigma}$ hanno la dimensione fisica cm^{-4}. Devono essere moltiplicate per la costante

$$\frac{h^2c^2}{32\pi^3e^2},$$

con la dimensione del quadrato di una carica, per rappresentare fisicamente l'energia, l'impulso e gli sforzi (n.b.: ulteriori difetti dimensionali possono essere notoriamente ripianati con potenze di c).

Se ci si chiede ora, se questa teoria di campo in sé chiusa - a prescindere dalla provvisoria mancata considerazione dello spin dell'elettrone - corrisponda alla realtà nel modo come per l'innanzi si sperava da teorie simili, la risposta è *negativa.* Gli esempi calcolati, per tutti l'atomo di idrogeno, mostrano infatti che nell'equazione d'onda (1) *non* si è sostituito quel potenziale, che risulta dalle equazioni del potenziale (15') con la tetracorrente (9). Invece è noto che per l'atomo di idrogeno si introduce nella (1) per φ_α il potenziale *prefissato* del nucleo ed eventuali campi elettromagnetici "esterni", e si risolve l'equazione per ψ. Dalla (9) si calcola poi la distribuzione delle correnti "prodotta" da questa ψ, da questa secondo la (15') il potenziale da essa prodotto. Questo dà poi, con l'aggiunta del potenziale prefissato, il potenziale con il quale l'atomo opera all'esterno come un tutto. Si trova così (con un'opportuna normalizzazione della ψ, per la quale in verità manca inoltre il fondamento nella teoria di campo) da un lato la *neutralizzazione* della carica del nucleo a grande distanza, dall'altro la *radiazione.* Per quanto riguarda il tentativo naturale di sostituire il potenziale ora trovato nell'equazione (1) e di calcolare una "seconda approssimazione", si deve dire: con il *potenziale di neutralizzazione* non si può procedere affatto in questo modo, si modificherebbero *completamente* i valori dei termini, perciò sarebbero necessari molti ulteriori passi di approssimazione che, quando il procedimento converge, senza alcun dubbio *non* riportano ai corretti termini dell'idrogeno, ma (con carica nucleare 2) ai termini dell'*atomo* di elio. Invece, quando si trattassero i *potenziali radiativi* nel modo descritto, si dovrebbe ottenere la necessaria *correzione radiativa*[6], almeno quando si assuma che *una* vibrazione normale sia eccitata *fortemente*, e tutte le rimanenti assai *debolmente.*

Proprio la *proprietà di chiusura* delle equazioni di campo appare spezzata in modo singolare. Oggi questo non si riesce a capire interamente, ma lo si può collegare alle due cose seguenti.

1. Lo scambio di energia ed impulso tra il campo elettromagnetico e la "materia" *non* avviene in realtà nel modo continuo, come la legge di campo (24) fa credere.

2. Anche nella teoria di Lorentz nelle equazioni di moto di un elettrone si deve introdurre solo il campo degli *altri* elettroni, non il campo proprio. La reazione di

[6]vedi Ann. d. Phys. **81**, 129 (1926).

quest'ultimo è per la parte preponderante tenuta in conto *fin dall'enunciazione delle equazioni di moto* come *massa* elettromagnetica. Ad esso corrisponde nell'equazione (1) il termine con k^2. In seconda approssimazione risulta poi anche nella teoria di Lorentz dalla reazione del campo proprio la forza di reazione della radiazione.

Se la soluzione della difficoltà realmente si debba cercare solo nell'interpretazione puramente *statistica* della teoria di campo avanzata da alcune parti[7] lo dobbiamo lasciare in via del tutto provvisoria indeciso. Personalmente questa interpretazione mi pare oggi non più[8] decisivamente soddisfacente, anche se essa si rivela utile in pratica. Essa mi pare significhi una troppo fondamentale rinuncia alla comprensione del singolo evento.

Merita menzione un aspetto *soddisfacente* della difficoltà di cui si parla. Mentre la natura con il suo comportamento reale rompe la proprietà di chiusura del sistema di equazioni di campo, essa viene incontro alle nostre capacità matematiche in misura sorprendente: la teoria dell'atomo di idrogeno diventerebbe matematicamente inaccessibile, se i φ_α nell'equazione (1) non indicassero potenziali *dati*, ma se al posto di questi si dovessero introdurre quelli che si calcolano per mezzo della (9) e della (15') dalla soluzione ψ da cercarsi.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 10 dicembre 1926)

[7]M. Born, Zeitschr. f. Phys. **38**, 803 (1926); **40**, 167 (1926); P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A. 112**, 661 (1926); anche W. Gordon, op. cit.

[8]vedi Die Naturwissenschaften **12**, 720 (1924).