## Scambio d'energia nella meccanica ondulatoria[1]

E. Schrödinger

La nota seguente è immediatamente connessa con una serie di comunicazioni[2] apparse in questi Annalen, e impieghiamo qui la "meccanica ondulatoria" nella forma *multi*dimensionale là quasi completamente elaborata, che si può portare in accordo con la meccanica quantistica di Heisenberg e Dirac, non in quella forma *tetra-* (o secondo O. Klein *penta-*) dimensionale[3], che corrisponde all'originaria concezione di de Broglie e possibilmente coglie meglio l'essenza della questione, ma per il momento è solo un programma, poiché con essa non si è in grado ora di formulare il problema a *più* elettroni. - Devo chiedere il permesso di sviluppare qui daccapo alcune cose importanti, che da allora sono state esposte in altri lavori (Heisenberg, Dirac, Jordan). Potrò così rendere comprensibili anche quelle che nei nuovi sistemi di numeri (matrici, q-numeri) utilizzati da quegli autori non sono state ancora elaborate[4].

### §1. Il metodo della variazione delle costanti[5]

Per il problema perturbativo risolto in Q III (§§1 e 2) si sono da allora sviluppati dei metodi più generali[6] per molti scopi ampiamente superiori. Consideriamo un sistema conservativo, la cui equazione d'onda [Q IV, equazione (4")]

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}V\psi - \frac{4\pi i}{h}\dot{\psi} = 0 \tag{1}$$

abbia le autosoluzioni normalizzate

$$\psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}}, \tag{2}$$

dove $\psi_k$ dipende solo dalle coordinate del sistema[7]. $\psi_k$ soddisfa quindi all'equazione indipendente dal tempo

$$\Delta\psi_k + \frac{8\pi^2}{h^2}(E_k - V)\psi_k = 0. \tag{3}$$

---

[1] Energieaustausch nach der Wellenmechanik, Annalen der Physik **83**, 956-968 (1927).

[2] "Quantisierung als Eigenwertproblem", comunicazioni dalla prima alla quarta; questi Annalen **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109. (1926); citate nel seguito con Q I - IV.

[3] O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895 (1926); W. Gordon, ibidem **40**, 117 (1926); Q IV, 131; E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 257 e 265 (1927); e altri.

[4] Si può paragonare la difficoltà generalmente percepita con la seguente. Se qualcuno per esempio prima sviluppasse la vecchia teoria con azione a distanza dell'elettricità in coordinate cartesiane e poi passando alla teoria di Maxwell introducesse insieme il calcolo vettoriale, l'ascoltatore avrebbe molta difficoltà a distinguere tra il *contenuto* fisicamente nuovo e la nuova *forma.* (Così può facilmente sfuggire in P.A.M. Dirac (Proc. Roy. Soc. **A114**, 250, §3) che qui si è introdotta una ipotesi fisica totalmente nuova, ossia un uso "scalato" o "raddoppiato" di quel processo che Heisenberg chiama "passaggio alle matrici", Dirac "passaggio ai *q*-numeri", ed io "passaggio alla meccanica ondulatoria").

[5] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A112**, 674 (1926).

[6] vedi in particolare M. Born, Zeitschr. f. Phys. **40**, 172 (1926).

[7] La funzione d'onda $\psi$ dev'essere essenzialmente complessa. Solo per semplicità delle formule poniamo reale la funzione delle coordinate $\psi_k$.

La soluzione generale della (1) è

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}}, \tag{4}$$

dove i $c_k$ sono costanti arbitrarie in generale complesse, che chiamiamo *ampiezze* (e i quadrati dei loro valori assoluti per brevità quadrati delle ampiezze).

Introduciamo ora una leggera perturbazione, temporalmente costante, cioè sostituiamo nella (1) $V$ con $V+r$, dove $r$ è ovunque una funzione piccola delle coordinate. Cerchiamo di soddisfare l'equazione così perturbata ancora con la (4), considerando le ampiezze come funzioni lentamente variabili del tempo. Per questa dipendenza temporale si ottiene, sostituendo la (4) nell'equazione (perturbata) (1) e tenendo conto della (3)

$$-\frac{8\pi^2}{h^2} r \sum_k c_k \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} - \frac{4\pi i}{h} \sum_k \dot{c}_k \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} = 0. \tag{5}$$

Come condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi del primo membro usiamo la condizione che esso sia ortogonale ad ogni funzione del sistema ortogonale completo $\psi_l$. Otteniamo così le infinite equazioni

$$\dot{c}_l = \frac{2\pi i}{h} \sum_k \varepsilon_{kl} c_k e^{\frac{2\pi i (E_k - E_l) t}{h}} \tag{6}$$

con

$$\varepsilon_{kl} = \int r \psi_k \psi_l dx. \tag{7}$$

L'equazione (6) non implica alcuna approssimazione.

Siano ora tutte le differenze degli autovalori grandi rispetto agli "elementi della matrice di perturbazione" $\varepsilon_{kl}$, allora ogni $c_k$ $(k \neq l)$ può essere considerato approssimativamente costante durante il periodo del fattore esponenziale associato; tutti questi termini producono quindi solo piccole perturbazioni oscillatorie su $c_l$. Solo per il termine della somma $k = l$ ciò non vale, perché in questo caso il fattore esponenziale è 1. A prescindere da quelle piccole oscillazioni si ha quindi

$$\dot{c_l} = \frac{2\pi i}{h} \varepsilon_{ll} c_l; \;\; c_l = c_l^0 e^{\frac{2\pi i \varepsilon_{ll} t}{h}}. \tag{8}$$

I *moduli* delle ampiezze risultano quindi (in questa approssimazione) essenzialmente immutati, solo le loro *fasi* subiscono variazioni secolari (che si possono anche considerare come *perturbazioni degli autovalori*, vedi Q III).

Se nel sistema imperturbato compaiono differenze degli autovalori, che siano confrontabili con le quantità perturbative $\varepsilon_{kl}$ o piccole rispetto ad esse, allora le ampiezze di tutte quelle oscillazioni proprie, che appartengono al gruppo di autovalori vicini, sono tramite le equazioni (6) nell'approssimazione prima considerata tra loro accoppiate in modo tale che non più il singolo quadrato dell'ampiezza è costante, ma solo la somma di essi. - Lo si dimostra così. Consideriamo in particolare il caso di un autovalore di molteplicità $\alpha$. $c_l$ sia l'ampiezza di una oscillazione propria corrispondente. Allora vi saranno nel secondo membro della (6) $\alpha$ fattori esponenziali uguali a 1, rimangono nell'approssimazione considerata $\alpha$ termini secolari, e proprio relativi alle ampiezze, che corrispondono al medesimo autovalore. Si devono pertanto considerare tutte le $\alpha$ equazioni (6), nel primo membro delle quali compaia una di queste ampiezze. Otteniamo quindi per la loro determinazione il sistema di equazioni finito, chiuso in sé

$$\dot{c}_l = \frac{2\pi i}{h} \sum_{k=1}^{\alpha} \varepsilon_{kl} c_k; \;\; l = 1, 2, \ldots \alpha, \tag{9}$$

dove abbiamo numerato per semplicità le $\alpha$ ampiezze che intervengono con $1, 2, \ldots$ $\alpha$. Si trova quindi in generale uno scambio tra ampiezze che appartengono ad uno stesso autovalore $\alpha$, - nell'approssimazione considerata - solo tra quelle. Se si moltiplica la (9) per il complesso coniugato $c_l^*$, si prende la parte reale e si somma su tutti gli $l$, si trova a secondo membro (a causa della simmetria di $\varepsilon_{kl}$) zero, cioè

$$\sum_{k=1}^{\alpha} c_l c_l^* = \text{ cost.} \tag{10}$$

è un integrale della (9). Del resto le equazioni sono naturalmente assai facili da integrare, poiché gli $\varepsilon_{kl}$ sono costanti. Ci si riconduce alla trasformazione agli assi principali riportata in Q III, pag. 453. La soluzione è in accordo con la "soluzione perturbativa approssimata d'ordine zero", connessa con gli "autovalori perturbati in prima approssimazione" di cui là si parla.

## §2. La spiegazione secondo la meccanica ondulatoria degli scambi d'energia quantizzati

La situazione assai semplice prima delineata, come hanno notato Heisenberg[8] e Jordan[9], fornisce la spiegazione secondo la meccanica ondulatoria di quel fatto, che si può ben indicare come il fondamento empirico della teoria quantistica, il fatto cioè che tutti i fenomeni in un sistema fisico si influenzano tra loro solo quando coincidono rispetto ad una "differenza di livelli", o approssimativamente coincidono, e che l'influenza riguarda sempre solo i quattro livelli critici e ciò sempre in modo che uno dei due sistemi si sposta verso il suo livello più alto a spese dell'altro, che subisce uno spostamento "equivalente" in senso opposto.

Consideriamo due sistemi con le equazioni d'onda

$$\Delta_1 \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V_1 \psi - \frac{4\pi i}{h} \dot{\psi} = 0 \tag{11}$$

(autofunzioni: $\psi_k$ corrispondenti a $E_k$)

$$\Delta_2 \varphi - \frac{8\pi^2}{h^2} V_2 \varphi - \frac{4\pi i}{h} \dot{\varphi} = 0 \tag{12}$$

(autofunzioni: $\varphi_l$ corrispondenti a $F_l$)

---

[8] W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **38**, 411 (1926); **40**, 501 (1926).
[9] P. Jordan, ibidem **40**, 661 (1927).

e uniamoli concettualmente ("con accoppiamento nullo") in *un* sistema, di modo che l'equazione d'onda di questo, come facilmente si ricava, sarà

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\Psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(V_1 + V_2)\Psi - \frac{4\pi i}{h}\dot{\Psi} = 0 \tag{13}$$

con le autofunzioni $\psi_k \varphi_l$ corrispondenti agli autovalori $E_k + F_l$. Aggiungiamo come nel §1 a $V_1 + V_2$ un piccolo termine di accoppiamento $r$. Succederà che a causa dell'unione concettuale compariranno o meno nuove degenerazioni, ovvero degenerazioni approssimate (cioè autovalori multipli o molto vicini). Se ciò non succede, cioè se tutti gli autovalori $E_k + F_l$ sono abbastanza nettamente separati, i due sistemi non si influenzano reciprocamente nella prima approssimazione trattata al §1. Ma se nella (13) compaiono nuove degenerazioni, si trova invece uno scambio secolare delle ampiezze.

Sia per esempio per quattro valori particolari $k, k', l, l'$

$$E_k + F_{l'} = E_{k'} + F_l \tag{14}$$

(ciò richiede che nei due sistemi coincida la differenza d'energia $E_k - E_{k'} = F_l - F_{l'}$). Allora all'autovalore (14) corrispondono le *due* autofunzioni

$$\psi_k \varphi_{l'} \quad \text{e} \quad \psi_{k'} \varphi_l. \tag{15}$$

Se le loro due ampiezze sono $c_1$, $c_2$, tra di esse avviene uno scambio secondo le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{c_1} &= \frac{2\pi i}{h}(\varepsilon_{11} c_1 + \varepsilon_{12} c_2), \\ \dot{c_2} &= \frac{2\pi i}{h}(\varepsilon_{12} c_1 + \varepsilon_{22} c_2), \end{aligned} \tag{16}$$

dove le costanti $\varepsilon_{ik}$ sono definite da un opportuna generalizzazione dell'equazione (7) §1.

Evidentemente bisogna aspettarsi per esempio un accrescimento dell'ampiezza corrispondente a $\psi_k \varphi_{l'}$ a spese della seconda nel senso duplice che in un sistema l'ampiezza di $\psi_k$ si accresce a spese di quella di $\psi_{k'}$, mentre nell'altro sistema l'ampiezza di $\varphi_{l'}$ si accresce a spese di quella di $\varphi_l$. La situazione si può pensare così: la funzione d'onda del sistema complessivo descrive d'un colpo sia lo stato del primo sistema (quando si trascuri il piccolo accoppiamento e l'esistenza del secondo sistema) sia anche il vice versa. Certo allora appaiono come ampiezze non più semplici numeri, ma combinazioni lineari delle autofunzioni dell'*altro*, quindi secondo questa interpretazione, di un sistema completamente esterno. Ma questo non disturba particolarmente. Per il calcolo di una qualche quantità fisica che riguarda il sistema considerato è semplice eliminare per integrazione le coordinate del sistema esterno, in modo analogo a come è stato descritto in Q IV, §7. Si trova così per esempio per il *quadrato dell'ampiezza* di $\varphi_l$ la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte quelle autofunzioni del sistema totale che contengono $\varphi_l$[10].

[10]La scomodità, che nell'ambito del metodo di calcolo semplice qui sviluppato non ci si possa liberare definitivamente delle autofunzioni esterne, cioè che non si possa dare semplicemente l'ampiezza complessa di $\varphi_l$ nel sistema isolato, appare stare all'essenza della situazione. Non è infatti possibile una reale eliminazione dell'accoppiamento senza prendere in considerazione un ulteriore sistema, ossia la radiazione (ovvero l'"etere"). Per descrivere correttamente la situazione: i termini di accoppiamento coulombiano si sentono a lungo prima che diventino trascurabili, e debbano essere sostituiti dall'interazione radiativa.

Troviamo quindi che, senza presupporre livelli di energia discreti e scambi di energia quantizzati, e in particolare senza che si debba considerare altro significato degli autovalori che quello di frequenze, possiamo dare una semplice spiegazione del fatto che una interazione fisica abbia luogo in modo del tutto preferenziale tra *quei* sistemi, nei quali secondo la vecchia interpretazione "interviene lo stesso elemento d'energia". Si tratta, come ha ben rilevato Heisenberg, di un semplice fenomeno di risonanza con battimenti, come nel cosidetto pendolo simpatico. Senza il postulato dei quanti si perviene ad una situazione, che è esattamente *come se* il postulato dei quanti valesse per davvero. Questa situazione "come se" non è per noi niente di nuovo. Anche le frequenze emesse spontaneamente si comportano come se gli autovalori fossero livelli di energia discreti e valesse la condizione delle frequenze di Bohr.

Non ci costringono i principî della ricerca in generale tenuti per giusti ad una estrema prudenza, potrei quasi dire a diffidare del postulato dei quanti - a prescindere interamente dalla sua incomprensibilità come assioma? È psicologicamente così chiaro: dal momento che una volta si è introdotta l'interpretazione dei "termini" come livelli d'energia discreti, si vede in ogni fenomeno di scambio di nuova scoperta una conferma di questa interpretazione, anche quando in natura non succede di fatto nient'altro che il suddetto fenomeno di risonanza. *Non* si obbietti: ma proprio l'interpretazione dei termini come livelli d'energia, se non da altro, non è sostenuta oltre ogni dubbio dagli *esperimenti di urto di elettroni*; non vorrai mettere in dubbio, che la differenza di potenziale attraverso la quale cade misura l'energia cinetica del singolo elettrone? - Replico: mi chiedo se non sia molto più giusto portare in primo piano, al posto del concetto "energia cinetica del singolo elettrone", quello della frequenza dell'onda di de Broglie. È noto che per queste onde avviene, all'attraversamento di una differenza di potenziale, proprio quella variazione di frequenza che corrisponde all'energia cinetica ricevuta, e che l'equazione d'onda dà proprio quei cammini curvati dei raggi, che si osservano di fatto nella determinazione di $e/m$ e di $v$. -

Non posso reprimere l'impressione: lasciare il postulato quantico *accanto* al fenomeno di risonanza richiede di accettare *due* spiegazioni per lo stesso fatto. Ma allora succede come per le scuse: una è certamente falsa, di solito tutt'e due.- Nell'ultima sezione alla situazione "come se" di cui abbiamo parlato qui ne aggiungeremo una ulteriore.

## §3. Ipotesi statistica

Se si prova ad ottenere dalle equazioni (9) una asserzione circa la ripartizione media delle ampiezze per un'interazione continuata, non si riesce, come nel caso analogo della meccanica classica, senza una particolare ipotesi aggiuntiva di carattere statistico. Come le equazioni fondamentali della meccanica, anche le equazioni (9) sono evidentemente insensibili ad un cambiamento di segno del tempo, poiché esso può essere compensato da uno scambio di $i$ con $-i$ (cambiamento di segno di tutte le fasi, corrispondente al cambiamento di segno di tutte le velocità in meccanica classica). Ciò mostra che nel processo di risonanza non è insita nessuna "tendenza all'equilibrio". Infatti il calcolo mostra che i valori medi temporali dei quadrati delle ampiezze dipendono in generale dai loro valori iniziali. Per ottenere affermazioni statistiche è necessaria quindi un'ipotesi sulla probabilità a priori dei valori iniziali. Si mostra che solo *una* ipotesi è possibile, quando si impongano le condizioni:

1. L'ipotesi dev'essere indipendente dall'*istante* per il quale essa è introdotta, cioè la probabilità di determinati valori delle ampiezze non deve mutare nel corso del tempo a causa dell'azione delle equazioni (9).

2. Essa dev'essere indipendente da quale si scelga degli infiniti sistemi ortogonali, che vanno l'uno nell'altro mediante un'arbitraria sostituzione ortogonale riguardante le autofunzioni appartenenti allo stesso autovalore. (Vedi Q III, pag. 448 e seguenti).

Ci si persuade facilmente che sotto queste condizioni non è possibile altra ipotesi che questa: la densità di probabilità in uno spazio, nel quale si riportino le parti reale ed immaginaria delle ampiezze come coordinate ortogonali è funzione solo delle *somme* dei quadrati delle ampiezze corrispondenti ad autovalori numericamente distinti.

Quest'ipotesi ha per conseguenza che i valori medi dei quadrati delle ampiezze che corrispondono allo *stesso* autovalore sono uguali per simmetria, ovvero che ogni somma parziale è essa stessa proporzionale al numero di termini della somma. Utilizzeremo nel seguito solo questa conseguenza, solo nel caso di una degenerazione estremamente elevata e solo per somme parziali con un numero di termini estremamente grande.

Si deve rinunciare al tentativo di presentare questi valori medi, secondo una qualche analogia con l'ipotesi quasi ergodica, come vere medie temporali. È chiaro che le equazioni (9) fanno cadere una tale ipotesi (esse possiedono almeno $\alpha$ integrali olomorfi indipendenti, ossia i quadrati delle ampiezze delle "oscillazioni normali"). Il caso appare del tutto analogo a quello del corpo rigido ideale, per il quale la costanza dei quadrati delle ampiezze delle oscillazioni normali pare escludere *a rigore* ogni applicazione della statistica.

Non posso trascurare di dire che nell'*effetto Stark* la stessa ipotesi riguardo ai quadrati delle ampiezze delle oscillazioni proprie corrispondenti ad un medesimo autovalore è necessaria per ottenere i corretti rapporti di intensità delle componenti della struttura fine (vedi Q III, pag. 465).

## §4. Sistema arbitrario in un bagno termico

Ritorniamo alle considerazioni del §2. Assumeremo ora che nel sistema totale si debba considerare (e d'ora in poi) eccitato *solo* l'autovalore (14). Inoltre assumeremo ora che i quattro autovalori di cui si parla dei sistemi parziali $E_k$, $E_{k'}$, $F_l$, $F_{l'}$, che abbiamo assunto tacitamente nel §2 come *semplici*, abbiano le molteplicità $\alpha_k$, $\alpha_{k'}$, $\alpha_l$, $\alpha_{l'}$. L'autovalore (14) ha allora molteplicità $\alpha_k\alpha_{l'} + \alpha_{k'}\alpha_l$, quindi al posto di *due* autofunzioni degeneri (15) compaioni due *gruppi* con $\alpha_k\alpha_{l'}$ ovvero $\alpha_{k'}\alpha_l$ componenti. Secondo l'ipotesi statistica del §3 la somma dei quadrati delle ampiezze del primo gruppo sta a quella del secondo gruppo come

$$\alpha_k\alpha_{l'} \text{ sta a } \alpha_{k'}\alpha_l. \tag{17}$$

Per quanto detto alla fine del §2 è questo anche il rapporto tra la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte le oscillazioni proprie corrispondenti ad $E_k$ e la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte le oscillazioni corrispondenti a $E_{k'}$ nel primo sistema considerato da solo.

Secondo la nostra ipotesi statistica l'interazione con il sistema esterno forza quello in esame da un rapporto *indeterminato* tra i quadrati delle ampiezze corrispondenti ad autovalori *distinti* ad un valore fissato, quello determinato dai prodotti "in croce" dei gradi di degenerazione. (In croce significa: si deve far corrispondere al livello "superiore" del sistema in esame quello inferiore del sistema esterno, e viceversa). - Per brevità indicheremo d'ora in poi la somma dei quadrati delle ampiezze corrispondente ad un autovalore come la sua *intensità di eccitazione*.

Trattiamo ora un caso un po' più complicato. Manteniamo fisso che nel sistema complessivo sia costantemente eccitato *un solo* autovalore, che chiamiamo $E$. Ma il secondo sistema $(\varphi_l, F_l)$, che ora chiameremo *bagno termico*, sia un sistema estremamente grande con uno spettro di autovalori estremamente denso, di modo che per *ciascun* $E_k$ del primo sistema, che chiameremo *termometro*, esista sempre un autovalore del bagno termico $F_{l'}$, che soddisfi la condizione

$$F_{l'} = E - E_k; \tag{18}$$

e inoltre $F_{l'}$ abbia una elevata molteplicità.

Pertanto le intensità d'eccitazione di tutti gli autovalori $E_k$ del termometro stanno tra loro in rapporti interamente fissati, essi si comportano cioè come il prodotto

$$\alpha_k \alpha_{l'}. \tag{19}$$

I rapporti degli $\alpha_{l'}$ si possono determinare in modo del tutto generale. La domanda circa la molteplicità $\alpha_{l'}$ dell'autovalore $F_{l'}$ del bagno termico, cioè circa il numero di autofunzioni essenzialmente distinte del bagno termico che corrispondono a questo autovalore è infatti evidentemente identica alla domanda: in quanti modi essenzialmente distinti si può collocare l'*energia* $F_{l'}$ nel bagno termico, *qualora* questo fosse "quantizzato in energia". Ma questa è proprio la domanda che porrebbe la statistica quantistica di Planck per il calcolo dell'*entropia* del bagno termico, che essa assume uguale a $k$ volte ($k$ =costante di Boltzmann) il logaritmo della quantità in questione. La sola differenza[11] è che per noi *basta* porre la domanda nella forma di un periodo ipotetico - il risultato del conteggio è naturalmente indipendente dal tipo di interpretazione adottata.

Esso richiede che sia

$$k \lg \alpha_{l'} = S(E - E_k),$$

dove il secondo membro è l'entropia che risulta avere il bagno termico di energia $E - E_k$ secondo la statistica di Planck. Per la (19) le intensità di eccitazione degli autovalori $E_k$ del termometro si comportano come le quantità

$$\alpha_k e^{\frac{1}{k} S(E - E_k)} \tag{20}$$

(si perdoni la comparsa della lettera $k$ con significati diversi). Se il bagno termico è molto grande, si può porre

$$S(E - E_k) = S(E) - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_E \cdot E_k = S(E) - \frac{E_k}{T}, \tag{21}$$

[11] Intervengono naturalmente le ben note piccole differenze nella determinazione particolare dei "livelli di energia" della nuova meccanica quantistica rispetto alla vecchia (quantizzazione "semintera", eccetera). Si nota inoltre: riguardo a ciò che oggi si ama chiamare *il tipo di statistica* (di Bose-Einstein, di Fermi, eccetera), nulla è pregiudicato dalle considerazioni assai generali del testo. Esso interviene quando si applichi alle autofunzioni un principio di esclusione di Pauli o di Heisenberg, cioè quando si considerino nel conteggio di Planck essenzialmente distinte o meno certe distribuzioni dell'energia.

dove $T$ indica la temperatura del bagno termico calcolata secondo Planck per l'energia $E$. Ciò significa che al posto della (20) si può usare

$$\alpha_k e^{-\frac{E_k}{kT}}. \tag{22}$$

Abbiamo pertanto ottenuto l'importante risultato:

Le intensità di eccitazione medie degli autovalori di un sistema in un bagno termico stanno tra loro come - secondo la vecchia statistica quantistica - le frequenze relative dei membri di un insieme canonico che si trovino in uno stato singolo pensato quantizzato. Inoltre le molteplicità degli autovalori del sistema considerato si comportano come "pesi quantici".

Possiamo liberarci dell'ipotesi, fatta inizialmente, che nel sistema *totale* sia da considerarsi eccitato un singolo autovalore $E$. Questo procedimento corrisponde esattamente a quando nella statistica classica si parte da un insieme microcanonico e si assume che un piccolo sistema parziale sia distribuito canonicamente nello spazio delle fasi. Se si vuole, si può sempre successivamente imporre anche al sistema complessivo una distribuzione canonica; il risultato per il sistema parziale resta immutato. Anche ora naturalmente accade la stessa cosa.

Il risultato (22) può in linea di principio bastare per trasportare pari pari nella nuova teoria tutti i risultati importanti della vecchia statistica quantistica, innanzitutto la statistica dei gas, della materia condensata e dell'"hohlraum" (formula della radiazione di Planck), che possono tutti essere fondati su questa formula; naturalmente, con le modifiche grandi o piccole ricordate nell'ultima nota. Che ciò sia *possibile*, anche *senza* appoggiarsi al postulato dei quanti, lo vorrei porre in particolare evidenza.

Se si vuole, si può intendere tutto quanto è stato detto in questa nota secondo l'interpretazione di Born[12], che mantiene il postulato e interpreta i quadrati delle ampiezze non come intensità ad uno stesso tempo per un sistema singolo, ma soltanto come probabilità (frequenze relative) degli stati quantici discreti in un insieme virtuale. Ho tentato di stabilire se in questo modo si possa evitare l'ipotesi statistica del §3. Risulta che questo non accade. Secondo Born la variazione temporale del "campo di probabilità" è governata deterministicamente ("causalmente") dall'equazione d'onda, quindi la variazione temporale delle "ampiezze di probabilità" deterministicamente dalle equazioni (9). La reversibilità menzionata nel §3 riguarda adesso la variazione temporale delle ampiezze di probabilità. Così prevedo che non si possa mai giungere ad un'evoluzione unidirezionale (irreversibile) senza un'ipotesi aggiuntiva sulla probabilità relativa delle diverse possibili distribuzioni per i valori iniziali delle ampiezze di probabilità. Rifuggo da questa concezione, non tanto per la sua complicazione, quanto perché da una teoria che postula una probabilità assoluta, primaria come legge di natura si dovrebbe pretendere che a questo prezzo per lo meno ci liberasse dalle vecchie "difficoltà ergodiche", e permettesse di capire l'evoluzione unidirezionale dei processi naturali senza ulteriori ipotesi aggiuntive.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 10 giugno 1927)

[12]M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863; **38**, 803; **40**, 167 (1926).