La situazione attuale nella meccanica quantistica.[1]

E. Schrödinger, Oxford.

Sommario

§1. **La fisica dei modelli.**

Nella seconda metà del secolo scorso dai grandi sviluppi della teoria cinetica dei gas e della teoria meccanica del calore è sorto un ideale della descrizione esatta della natura, che come coronamento di ricerche secolari e compimento di una speranza millenaria costituisce un vertice, e lo chiamiamo classico. Questi sono i suoi lineamenti.

Degli oggetti naturali, il comportamento osservato dei quali si voglia comprendere, si costruisce, appoggiandosi ai dati sperimentali che si possiedono, ma senza impedire di farsene l'immagine intuitiva, una rappresentazione, che è elaborata esattamente in tutti i dettagli, *molto* più esattamente di quanto possa garantire qualsiasi esperienza, tenendo conto del suo ambito limitato.

La rappresentazione nella sua determinatezza assoluta è uguale ad una struttura matematica o ad una figura geometrica, che può essere calcolata in tutto e per tutto da un certo numero di *elementi determinanti*; come per esempio in un triangolo un lato e i due angoli ad esso adiacenti, come elementi determinanti, fissano il terzo angolo, gli altri due lati, le tre altezze, il raggio del cerchio inscritto e così via. La rappresentazione differisce per natura da una figura geometrica solo per il fatto importante che essa è chiaramente determinata, oltre che in ognuna delle tre dimensioni dello spazio, anche nel *tempo* come quarta dimensione. Ciò vuol

[1]Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, Die Naturwissenschaften **23**, 807-812, 823-828, 844-849 (1935).

dire che si tratta (com'è evidente) sempre di una struttura che muta nel tempo, che può assumere *stati* diversi; e quando uno stato è reso noto mediante il numero necessario di elementi determinanti, allora non solo sono dati insieme anche tutti gli altri elementi a questo istante (come spiegato prima nel caso del triangolo), ma anche tutti gli elementi, lo stato esatto, ad ogni determinato tempo successivo; allo stesso modo come le proprietà d'un triangolo alla base determinano le sue proprietà al vertice opposto. È proprio della legge interna della struttura che essa muti in modo determinato, cioè, quando la si abbandoni a se stessa in un determinato stato iniziale, che percorra con continuità una determinata sequenza di stati, dei quali ciascuno è raggiunto ad un tempo esattamente determinato. Questa è la sua natura, questa è l'ipotesi che, come ho detto sopra, si pone in base ad un'immagine intuitiva.

Naturalmente non si è così ingenui da pensare che in tal modo si indovini come realmente vanno le cose nell'universo. Per indicare che non lo si pensa, il surrogato mentale esatto che si è creato lo si chiama un'*immagine* o un *modello*. Con la sua chiarezza senza indulgenze, che non si può introdurre senza arbitrio, si è solo tralasciato il fatto che un'ipotesi del tutto determinata può essere controllata nelle sue conseguenze, senza dar spazio a nuove arbitrarietà, per mezzo di calcoli lunghi e difficili, mediante i quali si derivano le conseguenze. Si hanno itinerari limitati e si calcola veramente solo quello che un tipo sveglio leggerebbe direttamente dai dati! Si sa per lo meno dove si insinua l'arbitrarietà e dove si deve migliorare quando non si ha accordo con l'esperienza: nelle ipotesi iniziali, nel modello. Si dev'essere sempre preparati a questo. Quando in molti esperimenti di tipo diverso l'oggetto naturale si comporta davvero come il modello, ci si rallegra e si pensa che la nostra immagine è conforme alla realtà nei tratti essenziali. Ma se in un esperimento di nuovo tipo o per raffinamento della tecnica di misura non si ha più accordo, non è detto che *non* ci si rallegri. Perchè in fondo è questo il modo col quale si può raggiungere gradualmente un adeguamento sempre migliore dell'immagine, cioè dei nostri pensieri, ai fatti.

Il metodo classico del modello preciso ha lo scopo principale di tenere rigorosamente isolata l'inevitabile arbitrarietà nelle ipotesi, potrei quasi dire come il corpo col plasma germinale, per il processo di adattamento storico al progredire dell'esperienza. Forse il metodo si fonda sulla convinzione che *in qualche modo* lo stato iniziale determina *davvero* univocamente l'evoluzione, ovvero che un modello *completo*, che coincida *del tutto esattamente* con la realtà, permetterebbe di calcolare in anticipo il risultato di tutti gli esperimenti in modo del tutto esatto. Ma forse al contrario questa opinione si fonda sul metodo. Tuttavia è molto probabile che l'evoluzione del pensiero riguardo all'esperienza sia un processo infinito e che "modello completo" implichi una contraddizione in termini, all'incirca come "massimo numero intero".

Una chiara idea di ciò che s'intenda per un *modello* classico, per i suoi *elementi determinanti*, per il suo *stato*, è il fondamento per tutto ciò che segue. Innanzitutto *un determinato modello* e *uno stato determinato dello stesso* non devono essere confusi. Un esempio servirà nel modo migliore. Il modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno consiste di due punti materiali. Come elementi determinanti si possono per esempio utilizzare le due per tre coordinate ortogonali dei due punti e le due per tre componenti delle loro velocità nelle direzioni degli assi coordinati - quindi dodici in tutto. Al posto di queste si potrebbero anche scegliere: le coordinate e le componenti della velocità del *baricentro*, inoltre la *distanza* dei due punti, *due* *angoli*, che fissano la direzione della loro congiungente nello spazio, e le *velocità* (= derivate rispetto al tempo), con le quali variano nell'istante considerato la distanza e i due angoli; ovviamente sono ancora dodici. *Non* appartiene al concetto "modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno" il fatto che gli elementi determinanti debbano avere valori numerici determinati. La chiara visione d'assieme sulla totalità degli stati possibili - ancora senza relazione reciproca - costituisce il "modello" ovvero "il modello in uno stato *qualsiasi*". Ma al concetto di modello appartiene allora di più che semplicemente: i due punti assegnati in una posizione arbitraria e con velocità arbitrarie. Ad esso appartiene ancora il fatto che per *ogni* stato è noto come esso muterà col tempo, fintanto che non abbia luogo alcun intervento esterno. (Per una metà degli elementi determinanti l'altra fornisce informazioni, ma per l'altra le si devono dare prima). *Questa* conoscenza è latente nell'asserzione: i punti hanno le masse M, e le cariche $-e$ e $+e$, e si attirano perciò con la forza e^2/r^2, quando la loro distanza è r.

Queste indicazioni, con determinati valori numerici per m, M ed e (ma naturalmente non per r) appartengono alla descrizione *del modello* (non già a quella di uno stato determinato). m, M ed e *non* sono elementi determinanti. Invece la distanza r lo è. Nel secondo "gruppo" che prima abbiamo presentato a mo' d'esempio, essa interviene come settimo. Quando si utilizza il primo gruppo, r non è un tredicesimo elemento indipendente, esso si può calcolare dalle 6 coordinate ortogonali:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Il numero degli elementi determinanti (che spesso si chiameranno anche *variabili* in opposizione alle *costanti del modello* come m, M, e) è illimitato. Dodici scelti opportunamente determinano tutti i rimanenti ovvero lo *stato*. Nessun gruppo di dodici ha il privilegio di costituire *gli* elementi determinanti. Esempi di altri elementi determinanti particolarmente importanti sono: l'energia, le tre componenti del momento angolare rispetto al baricentro, l'energia cinetica del moto del baricentro. Quelli ora nominati hanno ancora una proprietà particolare. Essi sono *variabili*, cioè hanno in stati diversi valori diversi. Ma in ogni *sequenza* di stati, che col passar del tempo siano realmente attraversati, essi mantengono lo stesso valore. Essi si chiamano perciò anche *costanti del moto* - a differenza delle costanti del modello.

§2. **La statistica delle variabili del modello nella meccanica quantistica.**

A cardine dell'attuale meccanica quantistica sta una concezione, che forse subirà ancora qualche reinterpretazione, ma che, ne sono fermamente convinto, non cesserà di costituire il cardine. Essa consiste nell'idea che modelli con elementi determinanti che si determinano reciprocamente in modo univoco, come quelli classici, non possono render conto della natura.

Verrebbe da pensare che per chi creda ciò i modelli classici abbiano esaurito il loro ruolo. Ma non è così. Invece si utilizzano proprio *quelli*, non solo per esprimere la negazione della nuova concezione; invece anche la determinazione reciproca attenuata, che tuttavia ancora rimane, sarà espressa come sussiste tra le stesse variabili dello stesso modello che era utilizzato prima. Nel modo seguente.

A. Il concetto classico di *stato* va perso, poiché al più si possono assegnare valori numerici determinati ad una *metà* ben scelta di un gruppo intero di variabili; per esempio nel modello di Rutherford alle 6 coordinate ortogonali *oppure* alle componenti della velocità (sono possibili anche altri raggruppamenti). L'altra metà resta allora del tutto indeterminata, mentre elementi soprannumerari possono esibire i gradi più diversi di indeterminazione. In generale in un gruppo completo (nel modello di Rutherford dodici elementi) potranno essere noti *tutti* solo in modo impreciso. Sul grado di imprecisione si può dare informazione nel modo migliore se, seguendo la meccanica classica, nella scelta delle variabili ci si preoccupi che esse si dispongano in *coppie* cosidette canonicamente coniugate, per le quali l'esempio più semplice è: una coordinata di posizione x di un punto materiale e la componente p_x, valutata nella stessa direzione, del suo impulso lineare (cioè massa per velocità). Le due si limitano mutuamente nella precisione con la quale possono essere note simultaneamente, poiché il prodotto delle loro ampiezze di tolleranza o di variazione (che si usa indicare con un Δ anteposto alla quantità) non può scendere *sotto* il valore di una certa costante universale[2], cioè

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

(relazione di indeterminazione di Heisenberg).

B. Se in ogni istante tutte le variabili non sono più determinate da alcune di esse, non lo saranno ovviamente in un istante successivo a partire dai dati ottenibili di un istante precedente. Si può chiamare questo fatto una rottura con il principio di causalità, ma rispetto ad A non è niente di sostanzialmente nuovo. Se in nessun istante è fissato uno stato classico, esso non può neppure cambiare in modo obbligato. Ciò che cambia sono le *statistiche* ovvero le *probabilità,* le *quali* restano obbligate. Singole variabili possono diventare precise, altre imprecise. In generale si può affermare che la precisione complessiva della descrizione non cambia col tempo, il che discende dal fatto che le restrizioni imposte con A sono le stesse in ogni istante. -

Che cosa significano ora le espressioni "impreciso", "statistica", "probabilità"? In proposito la meccanica quantistica dà l'informazione seguente. Essa contiene senz'altro l'intero campionario infinito delle variabili concepibili, o elementi di determinazione del modello classico e interpreta ogni elemento come *direttamente misurabile*, misurabile proprio con precisione arbitraria, quando si tratti di esso da solo. Se ci si è procurati mediante un numero ristretto opportunamente scelto di misure una conoscenza obbiettiva di quel tipo massimale, che secondo A è proprio ancora possibile, l'apparato matematico della nuova teoria offre il mezzo per assegnare per lo stesso istante o per uno successivo ad *ogni* variabile una *distribuzione statistica* completamente determinata, cioè un'informazione, secondo quale percentuale si avrà a che fare con questo o con quel valore, in questo o in quell'intervallino (cosa che si chiama anche probabilità). È questo ciò che si intende quando si dice che questa sia di fatto la probabilità che la variabile considerata, quando la si misuri nell'istante considerato, si trovi con questo o quel valore. La giustezza di questa *predizione probabilistica* si può verificare con la massima approssimazione con un solo esperimento quando essa sia abbastanza netta, cioè quando dichiari solo un piccolo intervallo di valori come in genere possibile. Per verificarla completamente si deve ripetere *molte* volte l'intero esperimento *ab ovo* (cioè includendo le misure di

[2] $h = 1,041 \cdot 10^{-27}$ ergsec. Nella letteratura per lo più si indica con h il prodotto di questa per $2\pi(6,542 \cdot 10^{-27}$ ergsec) e al posto del nostro h si scrive un h con una lineetta trasversale.

orientamento o di preparazione), e si possono utilizzare solo i casi nei quali le misure di *orientamento* abbiano dato esattamente gli stessi risultati. In questi casi si confermerà poi con la misura la statistica calcolata in precedenza per una determinata variabile a partire dalle misure di orientamento - questa è l'idea.

Bisogna guardarsi dal criticare quest'idea per il fatto che è espressa in modo così pesante; ciò dipende dal nostro linguaggio. Ma si insinua un'altra critica. Difficilmente un fisico dell'epoca classica, immaginando un modello, si sarebbe azzardato a credere che i suoi elementi determinanti fossero misurabili su oggetti di natura. Solo conseguenze ben più indirette del modello erano di fatto accessibili alla verifica sperimentale. E secondo ogni esperienza si poteva esser certi: molto prima che il progresso nell'arte di sperimentare avesse superato l'abisso, il modello si sarebbe notevolmente modificato con un adattamento graduale ai nuovi fatti. - Invece ora la nuova teoria dichiara incompetente il modello classico, riformula la *connessione mutua degli elementi determinanti* (per quanto hanno inteso i suoi ideatori), ma ritiene altresì opportuno orientarci su che cosa sia in linea di principio eseguibile come *misura* sull'oggetto di natura considerato; cosa che a quelli che hanno concepito la struttura sarebbe apparsa un'incredibile allargamento del loro espediente di pensiero, un'anticipazione sventata di uno sviluppo futuro. Non è stata armonia prestabilita allo stato puro, il fatto che il ricercatore dell'epoca classica che, come oggi si sente dire, non sapeva ancora che cosa fosse propriamente *misurare*, ci abbia ugualmente lasciato in eredità a sua insaputa uno schema d'orientamento, dal quale di deve desumere tutto quello che si può fondamentalmente misurare, per esempio in un atomo di idrogeno?!

Spero di chiarire in seguito che la concezione dominante è nata dall'imbarazzo. Per ora proseguo nella sua esposizione.

§3. **Esempi di predizioni probabilistiche.**

Quindi tutte le predizioni si riferiscono come prima a elementi determinanti di un modello classico, a posizioni e a velocità di punti materiali, ad energie, momenti angolari e altra roba simile. Non classico è solo il fatto che si possano predire solo probabilità. Consideriamo ciò più precisamente. In via ufficiale si tratta sempre del fatto che per mezzo di alcune misure eseguite *ora* e dei loro risultati si ottengono le indicazioni probabilistiche migliori possibili che la natura consente sui risultati da aspettarsi di altre misure, che seguiranno o subito o dopo un certo tempo. Ma come appare la faccenda realmente? In casi importanti e tipici nel modo seguente.

Se si misura l'energia di un oscillatore di Planck, la probabilità di trovare un valore tra E ed E' è forse diversa da zero solo se tra E ed E' cade un valore della sequenza

$$3\pi h\nu,\ 5\pi h\nu,\ 7\pi h\nu,\ 9\pi h\nu, \ldots\ldots.$$

Per ogni intervallo che non contiene nessuno di questi valori la probabilità è zero. Per dirla chiara: altri valori della misura sono esclusi. I numeri sono multipli dispari della *costante del modello* $\pi h\nu$ (h = numero di Planck, ν = frequenza dell'oscillatore). Succedono due cose. In primo luogo manca il riferimento a misure precedenti - esse infatti non sono necessarie. In secondo luogo: l'affermazione non soffre davvero d'una eccessiva mancanza di precisione, ma tutto all'opposto, essa è più precisa di quanto possa mai essere una qualsiasi misura reale.

Un altro esempio tipico è l'ammontare del momento angolare. In Fig. 1 M è un punto materiale in moto, la freccia rappresenterà il suo impulso (massa per velocità) in grandezza e direzione. O è un qualsiasi punto fisso nello spazio, diciamo l'origine delle coordinate; quindi non un punto con significato fisico, ma un punto di riferimento geometrico. Come valore del momento angolare di M rispetto ad O la meccanica classica designa il prodotto della lunghezza della freccia dell'impulso per la

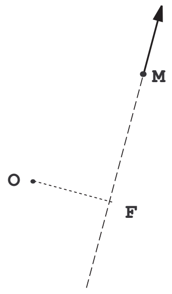

Fig. 1. Momento angolare

Sia M un punto materiale, O un'origine geometrica, la freccia rappresenterà l'impulso (= massa per velocità) di M. Allora il momento angolare è il prodotto della lunghezza della freccia e della lughezza OF.

lunghezza della *perpendicolare* OF.

Nella meccanica quantistica c'è per il valore del momento angolare una situazione del tutto analoga a quella dell'energia dell'oscillatore. Di nuovo la probabilità è zero per ogni intervallo che non contenga nessun valore della successione seguente:

$$0,\ h\sqrt{2},\ h\sqrt{2\times 3},\ h\sqrt{3\times 4},\ h\sqrt{4\times 5},\ldots$$

cioè può risultare solo uno di questi valori. Ciò vale di nuovo senza alcun riferimento a misure precedenti. E si può ben capire come sia importante quest'affermazione precisa, *molto* più importante del sapere quale valore o quale probabilità per ognuno di essi si abbia in realtà nel caso singolo. Ma inoltre qui succede che del punto di riferimento non si parla proprio: comunque lo si scelga, si troverà un valore di questa successione. Per il modello quest'asserzione è priva di senso, infatti la perpendicolare OF varia *con continuità* se si sposta il punto O, e la freccia dell'impulso resta invariata. Vediamo da questo esempio come la meccanica quantistica utilizzi il modello per desumere da esso le quantità che si possono misurare e riguardo alle quali si sosterrà quali predizioni prendere per significative, mentre esso deve essere dichiarato incompetente ad esprimere l'interconnessione di queste quantità.

Non si ha in entrambi i casi la sensazione che il loro contenuto essenziale, come è stato enunciato, solo con un certo sforzo si lasci comprimere nello stivaletto spagnolo di una predizione sulla probabilità che si trovi questo o quel valore per una variabile del modello classico? Non si ha l'impressione che qui si abbia a che fare con le proprietà fondamentali di *nuovi* gruppi caratteristici, che con quelli classici hanno in comune ancora solo il nome? Non si tratta affatto di casi eccezionali, proprio le asserzioni veramente importanti della nuova teoria hanno questo carattere. Si hanno anche situazioni che si avvicinano al tipo sul quale il modo di esprimersi è propriamente tagliato. Ma esse non hanno neanche lontanamente la stessa importanza. E quelle che in modo ingenuo si costruirebbero come esempi didattici non ce l'hanno per niente. "Sia data la posizione dell'elettrone nell'atomo di idrogeno al tempo $t = 0$; si costruisca la statistica della sua posizione ad un tempo successivo." Questo non interessa a nessuno.

A parole tutte le affermazioni si riferiscono al modello intuitivo. Ma le affermazioni importanti sono rispetto ad esso poco chiare, e le sue caratteristiche chiare sono di poco valore.

§4. **Si possono attribuire alla teoria degli insiemi ideali?**

Il modello classico gioca nella meccanica quantistica un ruolo proteiforme. Ognuno dei suoi elementi determinanti può in certe circostanze divenire oggetto dell'interesse e conseguire una certa realtà. Ma mai tutti insieme - talvolta sono questi, talaltra quelli, e sempre al massimo la *metà* di un gruppo completo di variabili, che permetterebbe un'immagine chiara dello stato istantaneo. Come vanno le cose di volta in volta per le rimanenti? Esse allora non *hanno* alcuna realtà, forse (sit venia verbo) una realtà sfumata; oppure l'hanno sempre tutte ed è soltanto impossibile, secondo la regola A del §2, la loro *conoscenza* simultanea?

La seconda interpretazione è straordinariamente familiare per chi conosce il significato della *trattazione statistica* che è sorta nella seconda metà del secolo scorso; tanto più se si pensa che alla vigilia del nuovo da *essa*, da un problema centrale della termologia statistica (teoria di Max Planck della radiazione termica, dicembre 1899), sarebbe nata la teoria dei quanti. L'essenza di questa linea di pensiero consiste proprio nel fatto che in pratica non si conoscono mai tutti gli elementi determinanti del sistema, ma solo *molti* meno. Per la descrizione di un corpo reale in un dato istante non si utilizza quindi *uno* stato del modello, ma un cosidetto *insieme di Gibbs*. Con ciò s'intende un insieme di stati ideale, cioè solamente immaginato, che rispecchi esattamente la nostra conoscenza ristretta del corpo reale. Il corpo si comporterà allora come uno stato *estratto a piacimento* da *quest'insieme*. Quest'ipotesi ha ottenuto il più grande successo. Costituiscono il suo massimo trionfo quei casi nei quali *non* tutti gli stati che intervengono nell'insieme fanno prevedere le *stesse* proprietà osservabili del corpo. Il corpo cioè si comporta allora davvero certe volte in un modo, certe altre in un altro, proprio come previsto (fluttuazioni termodinamiche). È ragionevole cercare se le affermazioni sempre imprecise della meccanica quantistica si riferiscano anch'esse ad un insieme ideale di stati, dei quali nel singolo caso concreto esiste uno ben determinato - ma non si sa quale.

Che ciò non succeda ce lo mostra *proprio* l'esempio del momento angolare, uno per tanti. Nella Fig. 1 si pensi di portare il punto M nelle posizioni più diverse rispetto ad O, e di dotarlo delle frecce d'impulso più diverse, e si riuniscano tutte queste possibilità in un insieme ideale. Poi si possono scegliere le posizioni e le frecce in modo tale che in ogni caso il prodotto della lunghezza della freccia per la lunghezza della perpendicolare OF abbia uno o un altro dei valori ammessi - rispetto al punto fisso O. Ma per un altro punto O' arbitrario risultano evidentemente valori non ammessi. L'introduzione dell'insieme non aiuta quindi a fare alcun passo avanti. - Un altro esempio è l'energia dell'oscillatore. Si dia il caso che essa abbia un valore preciso, per esempio il più basso $3\pi h\nu$. La distanza dei due punti materiali (che costituiscono l'oscillatore) risulta allora assai *indeterminata*. Perchè questa affermazione si possa riferire ad una collezione statistica di stati, in questo caso la statistica delle distanze dovrebbe essere per lo meno limitata superiormente in modo netto, a quella distanza per la quale l'*energia potenziale* già raggiunge o supera il valore $3\pi h\nu$. Ma ciò non succede, intervengono perfino distanze arbitrariamente grandi, sebbene con probabilità fortemente decrescente. E questo non è un risultato di calcolo marginale, che può essere evitato in qualche modo senza colpire al cuore la teoria: su questo comportamento si fonda, assieme a molte altre, la spiegazione quantomeccanica della radioattività (Gamow). - Gli esempi si potrebbero moltiplicare all'infinito. Si osservi che non si è parlato affatto di variazioni temporali. Non sarebbe d'alcun aiuto consentire al modello di evolvere in modo del tutto "non classico", eventualmente di "saltare". Già per l'istante singolo non va bene. Non esiste in nessun istante una collezione di stati del modello classico con la quale s'accordi l'insieme delle asserzioni quantomeccaniche per questo istante. La stessa cosa si può anche esprimere così: se io volessi associare al modello in ogni istante un determinato stato (a me soltanto non conosciuto esattamente) o (il che è lo stesso) *a tutti* gli elementi determinanti valori numerici fissati (a me soltanto non conosciuti esattamente), non sarebbe *pensabile* alcuna ipotesi su questi valori numerici che non fosse in contraddizione con una parte delle asserzioni della teoria dei quanti.

Questo non è esattamente ciò che ci si aspetta quando si sente dire che le asserzioni della nuova teoria sono sempre imprecise rispetto a quelle classiche.

§5. **Le variabili sono davvero indeterminate?**

L'altra alternativa consiste nell'associare realtà solo agli elementi determinanti di volta in volta precisi - o detto più in generale, ad ogni variabile un modo tale di realizzarsi che corrisponda esattamente alla statistica quantomeccanica di queste variabili nell'istante considerato.

Che non sia impossibile esprimere il grado e il tipo dell'indeterminazione di *tutte* le variabili in un'immagine completa *chiara* risulta già dal fatto che la meccanica quantistica possiede ed usa realmente un tale strumento, la cosidetta funzione d'onda o funzione ψ, chiamata anche vettore del sistema. Di essa si parlerà ancora molto. Che essa sia un costrutto matematico astratto non intuitivo è uno scrupolo che sorge quasi sempre davanti agli espedienti concettuali nuovi, e non avrei molto da dire. In ogni caso è un oggetto concettuale che riproduce in ogni istante l'indeterminatezza di tutte le variabili in modo altrettanto chiaro ed esatto, come il modello classico i suoi valori precisi. Anche la sua legge del moto, la legge della sua variazione temporale, fin tanto che il sistema è lasciato a se stesso, non sta indietro nemmeno d'uno iota per chiarezza e definizione alle equazioni del moto del modello classico. Dunque la funzione ψ potrebbe apparire proprio in questa posizione, purché l'indeterminatezza si limitasse alle dimensioni atomiche, sottratte al controllo diretto. Di fatto dalla funzione si sono derivate delle rappresentazioni del tutto intuitive e comode, per esempio la "nuvola di elettricità negativa" attorno al nucleo positivo e simili. Seri dubbi sorgono tuttavia quando si osservi che l'indeterminazione raggiunge cose ben tangibili e visibili, per le quali la connotazione di indeterminatezza è semplicemente falsa. Lo stato di un nucleo radioattivo è presumibilmente indeterminato a tal punto e in tal modo che non sono determinati nè l'istante del decadimento nè la direzione nella quale abbandona il nucleo la particella α che ne fuoriesce. All'interno del nucleo atomico l'indeterminazione non ci disturba. La particella uscente sarà descritta, se la si vuole intendere intuitivamente, come un'onda sferica, che viene emanata dal nucleo in tutte le direzioni e continuamente, e che colpisce uno schermo luminescente vicino continuamente in tutta la sua estensione. Però lo schermo non mostra affatto una luminescenza superficiale costante e debole, ma lampeggia in un istante in un punto - o meglio, a onor del vero, lampeggia talvolta qui, talvolta là, poiché è impossibile eseguire l'esperimento con un solo atomo radioattivo. Se si usa invece dello schermo luminescente un rivelatore esteso in volume, come un gas, questo sarà ionizzato dalle particelle α, e si trovano le coppie di ioni disposte lungo colonne rettilinee[3], che prolungate all'indietro raggiungono il granello di materia radioattiva dalla quale esce la radiazione α. (tracce di C.T.R. Wilson, rese visibili dalle goccioline di nebbia che condensano sugli ioni).

Si possono anche costruire casi del tutto farseschi. Un gatto sia chiuso in una camera d'acciaio assieme alla seguente macchina infernale (che dev'essere protetta dall'accesso diretto del gatto): in un contatore di Geiger si trova una minuscola quantità di materiale radioattivo, *così* poco che nel passare di un'ora *forse* uno degli atomi decade, con probabilità pari a quella che non ne decada alcuno; se accade, il contatore risponde e aziona su un relais un martellino che frantuma una fialetta con acido prussico. Se si è lasciato a sé questo intero sistema per un'ora, si dirà che il gatto è ancora vivo, se nel frattempo nessun atomo è decaduto. Il primo decadimento atomico l'avrebbe avvelenato. La funzione ψ del sistema intero esprimerebbe ciò col fatto che in essa il gatto vivo e il gatto morto (sit venia verbo) sono mescolati o pasticciati in parti uguali.

Tipico di questo caso è il fatto che un'indeterminazione originariamente ristretta al dominio atomico si converta in un'indeterminazione percepibile in grande, che si può quindi *risolvere* mediante osservazione diretta. Ciò ci impedisce di far valere in modo così ingenuo un "modello indeterminato" come descrizione della realtà. Essa non conterrebbe di per sé niente di oscuro o di contadditorio. C'è differenza tra una fotografia mossa o sfocata, e una che riprende nuvole e lembi di nebbia.

§6. **Il cambiamento intenzionale del punto di vista epistemologico.**

Nella quarta sezione abbiamo visto che non è possibile assumere il modello così com'è ed attribuire ugualmente alle variabili di volta in volta non note o non note esattamente dei valori determinati, che noi semplicemente non conosciamo. Nel §5 abbiamo detto che l'indeterminazione non è neppure un'indeterminazione reale, infatti esistono sempre dei casi nei quali un'osservazione facilmente eseguibile procura la conoscenza mancante. Che cosa ci rimane allora? In questo dilemma assai difficile la concezione dominante si aiuta o ci aiuta facendo ricorso all'epistemologia. Ci vien detto che non si deve fare alcuna distinzione tra lo stato reale dell'oggetto di natura e quello che io ne so in proposito, o forse meglio, quello che ne potrei sapere in proposito, qualora me ne dessi la pena. *Reali* - così si dice - sono propriamente solo percezione, osservazione, misura. Se io mi sono procurato per mezzo di queste ad un dato istante la conoscenza migliore possibile dello stato dell'oggetto fisico che è conseguibile secondo le leggi di natura, posso allora rigettare come *priva di significato* ogni domanda ulteriore che salti fuori circa lo "stato reale", in quanto sono convinto che nessuna osservazione ulteriore possa estendere la mia conoscenza in proposito - per lo meno non senza che essa simultaneamente diminuisca da un altro punto di vista (cioè per il cambiamento dello stato, ecc.).

Ciò getta ora un po' di luce sulla genesi dell'affermazione, che ho indicato alla fine del §2 come qualcosa di grande portata: che tutte le quantità del modello siano in linea di principio misurabili. Non si può fare a meno di questo articolo di

[3]Per illustrazione si possono utilizzare le Fig. 5 o 6 a pagina 375 dell'annata 1927 di questa rivista; o anche la Fig. 1 a pagina 734 dell'anno scorso (1934); ma queste sono tracce del cammino di nuclei d'idrogeno.

fede, poiché nelle difficoltà della metodologia fisica ci si vede costretti a chiamare al soccorso come dittatore il summenzionato postulato filosofico, al quale, come al difensore supremo di tutta l'empiria, nessuno capace di intendere negherà il rispetto.

La realtà si oppone all'imitazione mentale mediante un modello. Perciò si lascia andare il realismo ingenuo e ci si appoggia direttamente alla tesi indubitabile che *reali* (per il fisico) siano in fin dei conti solo l'osservazione, la misura. Quindi d'ora in poi tutto il nostro pensiero fisico avrà come unica base e come unico oggetto i risultati delle misure eseguibili in linea di principio, e ad un altro tipo di realtà o ad un modello il nostro pensiero dovrà ora espressamente *non* far più riferimento. Tutti i numeri che intervengono nei nostri calcoli fisici dovranno essere intesi come numeri corrispondenti a misure. Ma poiché non veniamo al mondo belli freschi a cominciare a costruire di bel nuovo la nostra scienza, ma abbiamo a disposizione un apparato di calcolo ben definito, dal quale dopo i grandi successi della meccanica quantistica potremmo sempre meno separarci, ci vediamo costretti a prescrivere a tavolino quali misure siano in linea di principio possibili, cioè debbano essere possibili, perché il nostro schema di calcolo stia abbastanza in piedi. Esso consente un valore preciso per ogni variabile del modello presa individualmente (financo per un "mezzo gruppo"), e quindi ciascuna individualmente dev'essere misurabile con precisione arbitraria. Non possiamo accontentarci di meno, poiché abbiamo perso la nostra innocenza intuitivo-realistica. Non abbiamo niente, nel nostro schema di calcolo, per stabilire dove la natura tracci i limiti dell'ignorabimus, cioè quale sia la *miglior* conoscenza *possibile* dell'oggetto. E non potremmo, inoltre la nostra realtà misurata dipenderebbe ancora molto dall'abilità o dalla pigrizia dello sperimentatore, dall'informarsi con quanta cura egli si sia applicato. Dobbiamo quindi dirgli in anticipo fino a che punto potrebbe arrivare se solo fosse abbastanza abile. Altrimenti sarebbe seriamente da temere che egli si mettesse ancora a cercare qualcosa di interessante laddove noi proibiamo ricerche ulteriori.

§7. **La funzione ψ come catalogo delle aspettative.**

Procedendo nell'esposizione della dottrina ufficiale, applichiamoci alla funzione ψ già menzionata prima (§5) . Essa è ora lo strumento per la predizione della probabilità dei numeri misurati. In essa è incorporato il sommario via via raggiunto delle aspettazioni per il futuro teoreticamente fondate, raccolte proprio come in un *catalogo*. Essa è il ponte di collegamento e di condizionamento tra misura e misura, com'era nella teoria classica il modello e lo stato ad esso via via corrispondente. Con questo la funzione ψ ha altresì molto in comune. Essa sarà, in linea di principio, determinata univocamente da un numero finito di misure sull'oggetto scelte opportunamente, la metà di quelle che sarebbero necessarie nella teoria classica. Così verrà scelto per la prima volta il catalogo delle aspettazioni. Da qui esso cambia col tempo, proprio come lo stato del modello nella teoria classica, in modo obbligato e univoco ("causale") - l'evoluzione della funzione ψ sarà governata da un'equazione differenziale alle derivate parziali (del prim'ordine nel tempo e risolta rispetto a $\partial\psi/\partial t$). Ciò corrisponde al moto imperturbato del modello nella teoria classica. Ma ciò vale solo finché non si esegue di nuovo una qualche misura. Ad ogni misura è necessario attribuire alla funzione ψ (= al catalogo delle predizioni) un singolare, alquanto repentino mutamento, che dipende *dal numero trovato nella misura*, e che perciò *non si può prevedere*; da questo solo è già chiaro che questo secondo tipo di variazione della funzione ψ non ha proprio niente a che fare con la sua evoluzione regolare *tra* due misure. La variazione brusca mediante la misura si collega strettamente alle cose dette nel §5 e ce ne occuperemo ancora a fondo, essa è il punto più interessante di tutta la teoria. È esattamente il punto che richiede la rottura con il realismo ingenuo. Per *questo non* si può porre la funzione ψ direttamente al posto del modello o della cosa reale. E non già perché da una cosa reale o da un modello non ci si possano aspettare variazioni improvvise e impreviste, ma poiché dal punto di vista realistico l'osservazione è un processo di natura come ogni altro e non può di per sè provocare un'interruzione dell'evoluzione regolare della natura.

§8. **Teoria della misura, prima parte.**

Il rigetto del realismo ha conseguenze logiche. Una variabile non ha in generale alcun valore determinato prima che io la misuri: allora misurarla *non* significa trovare il valore che essa ha. Ma allora che cosa significa? Dev'esserci tuttavia un criterio secondo il quale una misura sia giusta o sbagliata, un metodo buono o cattivo, preciso o impreciso - perché insomma si meriti il nome di procedimento di misura. Un giocherellare qualsiasi con uno strumento indicatore in prossimità d'un altro corpo, quando poi si faccia una volta o l'altra una lettura, non può tuttavia essere chiamato una misura su questo corpo. Ora, è abbastanza chiaro; se non è la realtà a determinare il valore misurato, almeno il valore misurato deve determinare la realtà, esso deve essere realmente presente *dopo* la misura nel solo senso che ancora può essere riconosciuto. Cioè, il criterio richiesto può essere solo questo: ripetendo la misura si deve ottenere di nuovo lo stesso risultato. Ripetendola spesse volte posso verificare la precisione del procedimento e dimostrare che non sto semplicemente giocando. È divertente il fatto che questa prescrizione coincida esattamente con la procedura dello sperimentatore, al quale pure il "valore vero" non è noto fin dall'inizio. Formuliamo l'essenziale nel modo seguente:

L'*interazione eseguita in modo pianificato di due sistemi (oggetto misurato e strumento di misura) si dice una misura sul primo sistema quando un indicatore variabile direttamente percettibile del secondo (posizione di un indice) si riproduce sempre, entro certi limiti d'errore, in seguito alla ripetizione immediata del processo (sullo stesso oggetto di misura, che nel frattempo non può esser sottoposto ad alcuna influenza ulteriore).*

A questa spiegazione si dovrebbero aggiungere ancora alcune cose, essa non è una definizione impeccabile. L'empiria è più complicata della matematica e non si lascia catturare così facilmente in proposizioni semplici.

Prima della prima misura può valere *per essa* una certa predizione della teoria dei quanti. *Dopo* di essa vale *sempre* la predizione: all'interno dei limiti d'errore ancora lo stesso valore. Il catalogo delle predizioni(= la funzione ψ) sarà quindi cambiato dalla misura in relazione alla variabile che misuriamo. Quando si conosce già da prima che il processo di misura è *affidabile*, allora già la prima misura riduce l'aspettazione teorica, entro i limiti d'errore, al valore trovato stesso, qualunque possa esser stata prima l'aspettazione. Questa è la tipica variazione brusca della funzione ψ con la misura, della quale si è parlato prima. E non solo per le variabili misurate il catalogo delle aspettazioni cambia in generale in maniera imprevedibile, ma anche per altre, in particolare per quelle ad esse "canonicamente coniugate". Se prima esisteva una predizione abbastanza precisa per l'*impulso* di una particella ed ora si misura la sua *posizione* in modo più preciso di quanto sia accettabile secondo la legge A del §2 , ciò deve modificare le predizioni per l'impulso. Del resto l'apparato di calcolo della meccanica quantistica produce ciò del tutto automaticamente: non esiste infatti alcuna funzione ψ che, se come d'accordo si ricavassero da essa le aspettazioni, contraddirebbe la legge A.

Poiché in seguito alla misura il catalogo delle aspettazioni muta radicalmente, l'oggetto non è più idoneo ad esibire nella loro estensione completa le predizioni statistiche che erano state fatte in precedenza; come minimo per la variabile misurata stessa; infatti per essa si otterrà ora sempre di nuovo (quasi) lo stesso valore. *Questo* è il fondamento della prescrizione che è stata data già nel §2: si può verificare completamente il contenuto della predizione probabilistica, ma a questo scopo si deve ripetere *ab ovo* l'intero esperimento. Si deve pretrattare l'oggetto misurato (o uno ad esso uguale) sempre esattamente come la prima volta, cosicché valga ancora lo stesso catalogo delle aspettative (= funzione ψ) come prima della prima misura. Quindi "si ripete". (Questo ripetere significa ora qualcosa di completamente diverso da prima!) Tutto questo non lo si deve fare due volte, ma moltissime. Risulterà quindi la statistica predetta - questa è l'idea.

Si noti la differenza tra i limiti d'errore e la statistica d'errore *della misura* da un lato, e la statistica predetta teoricamente dall'altro. Non hanno niente a che fare l'una con l'altra. Esse si fondano su due modi completamente distinti di *ripetizione*, dei quali s'è parlato prima.

Si offre qui l'occasione d'approfondire ancora la definizione della *misura* studiata prima. Esistono strumenti di misura che rimangono nella posizione nella quale la misura li lascia. L'indice potrebbe anche restare bloccato per un contrattempo. Si rifarebbe allora sempre esattamente la stessa lettura, e per la nostra prescrizione questa sarebbe una misura particolarmente precisa. E lo è invero, ma non dell'oggetto, bensì dello strumento stesso! Di fatto nella nostra prescrizione manca ancora un punto importante, che però non si poteva dare bene prima, cioè che cosa propriamente costituisca la differenza tra l'*oggetto* e lo *strumento* (che si faccia la lettura su quest'ultimo è solo un'esteriorità). Diciamo anche che in certi casi lo strumento, se necessario, va riportato al suo stato iniziale neutrale, prima di fare una misura di controllo. Allo sperimentatore ciò è ben noto. Si coglie teoricamente la cosa nel modo migliore se si prescrive che per principio lo strumento di misura prima di ogni misura vada sottoposto alla stessa preparazione, sicché *per esso* valga ogni volta il medesimo catalogo delle aspettazioni (= funzione ψ), quando lo si accosti all'oggetto. Ogni intervento sull'oggetto è invece rigorosamente proibito, se si deve fare una *misura di controllo*, una "ripetizione del primo tipo" (che porta alla statistica degli *errori*). Questa è la differenza caratteristica tra oggetto e strumento. Per una "ripetizione del secondo tipo" (che serve a verificare la predizione quantistica) essa sparisce. La differenza tra i due è assai irrilevante anche nella realtà.

Assumiamo ancora che in una seconda misura si possa utilizzare anche un altro strumento di ugual costruzione e di ugual preparazione; non deve necessariamente essere *lo stesso*; a volte lo si fa davvero, per controllo del primo. Può capitare anche che due strumenti costruiti in modo del tutto diverso stiano tra loro nella relazione che, se si misura con essi uno dopo l'altro (ripetizione del primo tipo!) le loro due indicazioni si corrispondano biunivocamente. Essi misurano allora sull'oggetto essenzialmente la stessa variabile - cioè la stessa previa opportuna riscrittura delle scale.

§9. La funzione ψ come descrizione dello stato.

Il rifiuto del realismo comporta anche delle complicazioni. Dal punto di vista del modello classico il contenuto di asserzioni momento per momento della funzione ψ è assai incomprensibile, esso racchiude solo il 50% di una descrizione completa. Dal nuovo punto di vista questa dev'essere completa per motivi che già sono stati accennati alla fine del §6. Dev'essere impossibile aggiungere ad essa nuove asserzioni giuste senza peraltro modificarla; altrimenti non si ha il diritto di designare come prive di significato tutte le domande che vadano oltre ad essa.

Da ciò segue che due diversi cataloghi che valgano per lo stesso sistema in circostanze diverse o a tempi diversi possono ben coincidere parzialmente, ma mai in modo tale che uno sia contenuto interamente nell'altro. Perchè altrimenti un completamento con ulteriori asserzioni giuste sarebbe possibile, cioè con quelle per le quali l'altro lo supera. - La struttura matematica della teoria soddisfa automaticamente questa prescrizione. Non esiste alcuna funzione ψ che dia esattamente le stesse risposte di un'altra, ed ancora alcune di più.

Perciò, quando la funzione ψ di un sistema cambia, sia per conto suo, sia in seguito a misure, nella nuova funzione devono sempre mancare delle asserzioni che erano contenute nella precedente. Nel catalogo non possono essere avvenute solo delle nuove registrazioni, devono aver avuto luogo anche delle cancellazioni. Ora delle conoscenze possono ben essere *acquisite*, ma non *perse*. Le cancellazioni significano quindi che le affermazioni che prima eran giuste ora sono divenute sbagliate. Un'affermazione giusta può divenire sbagliata solo se cambia l'*oggetto* alla quale essa si riferisce. Ritengo inoppugnabile esprimere così queste conclusioni:

Legge 1: *Quando si hanno funzioni ψ diverse il sistema si trova in stati diversi.*

Se si parla solo di sistemi per i quali si ha in generale una funzione ψ, l'inversa di questa legge si scrive:

Legge 2: *Per funzioni ψ uguali il sistema si trova nello stesso stato.*

Quest'inversa non discende dalla legge 1, bensì, senza utilizzo della stessa, direttamente dalla completezza o massimalità. Se con egual catalogo delle aspettazioni fosse ancora possibile una differenza, significherebbe che quello non dà risposta a tutte le domande legittime. - Le parole di quasi tutti gli autori danno per buone le due leggi precedenti. Esse costruiscono ovviamente un nuovo tipo di realtà, ritengo in modo del tutto legittimo. Esse non sono del resto trivialmente tautologiche, non pure spiegazioni a parole di "stato". Senza l'ipotesi della massimalità del catalogo delle aspettazioni la variazione della funzione ψ potrebbe essere prodotta dalla semplice richiesta di nuove informazioni.

Potremmo incontrare tuttavia ancora un'obiezione contro la derivazione della legge 1. Si potrebbe dire che ognuna individualmente delle asserzioni o conoscenze che essa tratta è tuttavia un'asserzione sulle probabilità, che le categorie *giusto* o *sbagliato* non si applicano rispetto al caso singolo, ma rispetto a una collezione che si realizza preparando mille volte il sistema nello stesso modo (per poi far seguire la stessa misura; vedasi il §8). Ciò va bene, ma dobbiamo assicurare che tutti i membri di questa collezione abbiano la stessa giacitura, poiché per ciascuno vale la stessa funzione ψ, lo stesso catalogo delle aspettazioni, e noi non possiamo aggiungere differenze che non siano espresse dal catalogo (vedasi il fondamento della legge 2). La collezione consiste quindi di casi individuali identici. Se un'affermazione riguardo ad *essa* è sbagliata, anche il caso singolo dev'essere cambiato, altrimenti la collezione sarebbe ancora la stessa.

§10. **Teoria della misura, seconda parte.**

Ora è stato poc'anzi detto (§7) e spiegato (§8) che ogni *misura* sospende la legge che governa normalmente la variazione temporale continua della funzione ψ e introduce al posto di essa una variazione del tutto diversa, che non è governata da nessuna legge, ma è dettata solamente dal risultato della misura. Però durante una misura non dovrebbero valere altre leggi di natura che quelle normali, infatti, considerata oggettivamente, essa è un processo naturale come ogni altro, e non può interrompere il corso regolare della natura. Poiché essa spezza quello della funzione ψ, quest'ultima *non* può - così abbiamo detto nel §7 - valere come immagine di tentativo di una realtà obbiettiva come il modello classico. Ma nell'ultima sezione essa si è tuttavia un po' cristallizzata.

Cerco di nuovo, rimarcando le parole chiave, di porre in rilievo che: 1. Il salto del catalogo delle aspettazioni all'atto della misura è *inevitabile*, infatti se la misura deve avere un qualche senso, dopo una buona misura si *deve* avere il *valore misurato.* 2. La variazione col salto *non* origina certamente dalla legge obbligatoria valida normalmente, infatti essa dipende dal valore misurato, che è imprevedibile. 3. La variazione infine (a causa della massimalità) determina anche *perdita* di conoscenza, ma la conoscenza non può essere dimenticata, quindi *deve* mutare l'*oggetto - anche* con variazioni per salti e in essi *anche* in modo imprevedibile, *diversamente* dal solito.

Come si concilia questo? La cosa non è per niente facile. È il punto più difficile e più interessante della teoria. Dobbiamo evidentemente cercare di capire l'interazione tra oggetto misurato e strumento di misura. Bisogna premettere alcune considerazioni molto astratte.

Il problema è questo. Se per due corpi completamente separati, o per meglio dire, per ciascuno di essi individualmente esiste un catalogo completo delle aspettazioni - un sommario massimale della conoscenza - una funzione ψ - allora la si possiede evidentemente anche per i due corpi insieme, cioè quando si pensa che non ognuno di essi preso singolarmente, ma i due insieme costituiscano l'oggetto del nostro interesse, delle nostre domande riguardo al futuro[4].

Ma l'inverso non è vero. La *conoscenza massimale di un sistema complessivo non include necessariamente* la *conoscenza massimale di tutte le sue parti, neppure quando le stesse sono tra loro completamente separate e al momento non si influenzano vicendevolmente.* È infatti possibile che una parte di ciò che si sa si riferisca a relazioni o condizioni tra i due sistemi parziali (ci limiteremo a due), nel modo seguente: quando una determinata misura sul primo sistema ha *questo* risultato, per una determinata misura sul secondo vale la statistica delle aspettazioni così e così; ma se la misura considerata sul primo sistema ha *quel* risultato, allora per il secondo vale una cert'altra aspettazione; se per il primo s'ottiene un *terzo* risultato, per il secondo vale un'altra aspettazione ancora, e così via, alla maniera di una disgiunzione completa di tutti i numeri misurati, che la misura di volta in volta presa in considerazione sul primo sistema può in generale produrre. In tal modo un certo processo di misura o, ciò che è lo stesso, una certa variabile del secondo sistema può essere collegata al valore ancora incognito di una certa variabile del primo,

[4]Evidentemente. Potrebbero non mancare asserzioni riguardanti la relazione mutua dei due corpi. Ma ciò sarebbe, per lo meno per uno dei due, qualcosa che interviene nella sua funzione ψ. E ciò non può accadere.

e ovviamente anche viceversa. Quando succede che tali proposizioni condizionali siano presenti nel catalogo complessivo *esso non può essere massimale riguardo* al *sistema singolo*. Poiché il contenuto di due cataloghi individuali massimali già di per sè costituirebbe un catalogo complessivo massimale, non potrebbero intervenire anche le proposizioni condizionali.

Queste predizioni condizionate non sono peraltro una cosa che ci piove qui inattesa. Esistono in ogni catalogo delle aspettazioni. Se si conosce la funzione ψ e si fa una certa misura e questa ha un certo risultato, si conosce la nuova funzione ψ, voilà tout. Solo nel caso presente, quando il sistema complessivo consiste di due parti completamente separate, la faccenda risalta come qualcosa di singolare. Poiché in tal modo acquista un senso distinguere tra misure sull'uno e misure sull'altro sistema parziale. Ciò procura a ciascuno di essi il pieno diritto ad aspirare ad un catalogo massimale privato; rimane però possibile che una parte della conoscenza complessiva ottenibile venga per così dire dissipata in proposizioni condizionali che giocano tra i sistemi parziali, e così lasci inadempiute le aspirazioni private - sebbene il catalogo complessivo sia massimale, cioè sebbene la funzione ψ del sistema complessivo sia nota.

Fermiamoci per un istante. L'affermazione nella sua astrattezza dice propriamente già tutto: la conoscenza migliore possibile di un tutto non implica necessariamente la stessa cosa per le sue parti. Traduciamo ciò nel linguaggio del §9: il tutto è in un certo stato, le sue parti prese per conto loro no.

- Ma come? Un sistema deve pur essere in qualche stato.

= No. Stato è la funzione ψ, è il sommario massimale delle conoscenze. Non devo essermelo procurato, posso esser stato pigro. Allora il sistema non è in nessuno stato.

- Bene, ma allora anche la proibizione agnostica delle domande non vale e posso nel nostro caso pensare: il sistema parziale è già in un qualche stato (= funzione ψ), soltanto non lo conosco.

= Alt. Purtroppo no. Non vale nessun "soltanto non lo conosco". Infatti per il sistema complessivo esiste la conoscenza massimale. -

L'insufficienza della funzione ψ come sostituto del modello deriva esclusivamente dal fatto che non la si ha sempre. Quando la si ha, essa può valere in tutto e per tutto come descrizione dello stato. Ma talvolta non la si ha in casi nei quali ci si potrebbe aspettare d'averla facilmente. E non si può postulare allora che "in realtà essa sia già determinata, solo che non la si conosce". Il punto di vista scelto una volta per tutte lo proibisce. "Essa" è infatti una somma di conoscenze, e conoscenze che nessuno conosce non sono niente. -

Andiamo avanti. Che una parte della conoscenza si libri nella forma di proposizioni condizionali disgiuntive *tra* due sistemi non può certo accadere se andiamo a prendere i due agli estremi opposti dell'universo e li giustapponiamo senza interazione. Allora infatti i due non "sanno" nulla l'uno dell'altro. È impossibile che una misura su di uno possa fornire un appiglio su che cosa ci si debba aspettare dall'altro. Se esiste un "intreccio delle predizioni", esso può evidentemente originare soltanto dal fatto che una volta in passato i due corpi hanno costituito *un* sistema in senso proprio, cioè sono stati in interazione, ed hanno lasciato *tracce* l'uno sull'altro. Quando due corpi separati, che individualmente siano conosciuti in modo massimale, vengono in una situazione nella quale interagiscono tra loro, e si separano di nuovo, allora si verifica di regola la situazione che prima ho chiamato *intreccio* della nostra conoscenza circa i due corpi. Il catalogo delle aspettazioni complessivo consiste dapprincipio di una somma logica dei cataloghi individuali; durante il processo esso evolve in modo obbligato secondo la legge nota (di misura infatti non si parla). La conoscenza resta massimale, ma alla fine, quando i corpi si sono separati di nuovo, non si è scomposta nuovamente in una somma logica di conoscenze circa i corpi singoli. Ciò che *di queste* si è ancora conservato può esser diventato sottomassimale, eventualmente in modo assai forte. - Si osservi il grande divario rispetto alla teoria modellistica classica, nella quale ovviamente con stati iniziali noti e con un'interazione nota gli stati finali sarebbero individualmente noti in modo esatto.

Il processo di misura descritto nel §8 cade ora esattamente sotto questo schema generale, se lo applichiamo al sistema complessivo oggetto misurato + strumento di misura. Se in tal modo ci costruissimo un'immagine oggettiva di questo processo, come di un altro qualsiasi, potremmo sperare di spiegare gli strani salti della funzione ψ, se non addirittura di accantonarli. Quindi adesso un corpo è l'oggetto misurato, l'altro lo strumento. Per evitare ogni intervento dall'esterno, facciamo sì che lo strumento si inserisca nell'oggetto automaticamente mediante un'orologeria incorporata, e allo stesso modo si ritragga. Differiamo la lettura stessa, poiché vogliamo studiare in primo luogo ciò che accade "oggettivamente"; lasciamo che il risultato si registri automaticamente nello strumento per un utilizzo successivo, proprio come oggi spesso si fa.

Come vanno le cose ora, con una misura eseguita automaticamente? Possediamo come prima un catalogo delle aspettazioni massimale per il sistema complessivo. Il valore registrato della misura ovviamente non vi è compreso. Rispetto allo strumento il catalogo è quindi assai incompleto, esso non ci dice neppure dove il pennino ha lasciato la sua traccia. (Ci si ricordi del gatto avvelenato!) Succede che la nostra conoscenza è sublimata in proposizioni condizionali: se il segno è alla graduazione 1, *allora* per l'oggetto misurato valgono questo e questo, se è alla 2, allora valgono questo e quello, se è alla 3, allora una terza cosa, e così via. Ma la funzione ψ dell'*oggetto misurato* ha fatto un salto? Si è evoluta secondo la legge obbligatoria (secondo l'equazione differenziale alle derivate parziali)? Nè l'una cosa nè l'altra. Essa non esiste più. Secondo la legge obbligatoria per la funzione ψ *complessiva*, si è ingarbugliata con quella dello strumento di misura. Il *catalogo delle aspettazioni dell'oggetto si è suddiviso in una disgiunzione condizionale di cataloghi delle aspettazioni*, come un Baedeker che venga suddiviso a regola d'arte. In ogni sezione vi è inoltre ancora la probabilità che essa abbia luogo - copiata dal catalogo delle aspettazioni originario dell'oggetto. Ma *quale* abbia luogo - quale parte del Baedeker sia da usare per la prosecuzione del viaggio, lo si può trovare solo mediante l'ispezione reale del segno.

E se noi *non* controllassimo? Supponiamo che sia stato registrato fotograficamente e che per disgrazia la pellicola abbia preso luce prima di essere sviluppata. Oppure abbiamo inserito per sbaglio della carta nera al posto della pellicola. Allora con la misura sfortunata non solo non abbiamo appreso niente di nuovo, ma abbiamo perso della conoscenza. Ciò non è sorprendente. A causa d'un intervento esterno la conoscenza che si ha di un sistema sarà ovviamente sempre rovinata. Si deve predisporre l'intervento in modo molto cauto perché la si possa recuperare in seguito.

Che cosa abbiamo ottenuto con questa analisi? *In primo luogo* l'intuizione della suddivisione disgiuntiva del catalogo delle aspettazioni, che ancora si ottiene in modo del tutto continuo, e che è resa possibile dall'immersione di strumento e oggetto in un catalogo comune. Da questo amalgama l'oggetto può esser di nuovo liberato solo mediante il fatto che il soggetto vivente assume conoscenza reale del risultato della misura. Prima o poi questo dove succedere, se ciò che ha avuto luogo si deve chiamare davvero una misura, - per quanto ci possa stare a cuore di analizzare il processo nel modo più oggettivo possibile. E questa è la *seconda* intuizione che otteniamo: *solo con questa ispezione*, che risolve la disgiunzione, succede qualcosa di discontinuo, con un salto. Si è indotti a chiamarlo un atto *mentale*, poiché l'oggetto è già staccato e non viene più influenzato fisicamente; ciò che gli doveva capitare è già avvenuto. Ma non sarebbe proprio giusto dire che la funzione ψ dell'oggetto, che *altrimenti* varierebbe, indipendentemente dall'osservatore, secondo un'equazione differenziale alle derivate parziali, *adesso* cambia con un salto a seguito di un atto mentale. Infatti essa era andata persa, non c'era più. Ciò che non c'è non può neanche cambiare. Essa viene ricreata, rifatta, viene districata dalla conoscenza ingarbugliata che si possiede mediante un atto di percezione, che di fatto non determina più un'azione fisica sull'oggetto misurato. Dalla forma nella quale si conosceva da ultimo la funzione ψ a quella nuova, nella quale essa riappare, non porta nessuna via continua - ci si va tramite la sparizione. Se si confrontano le due forme, la cosa sembra un salto. In realtà sono intervenuti accadimenti importanti, cioè l'interazione dei due corpi, durante la quale l'oggetto non possedeva nessun catalogo delle aspettazioni privato e non aveva neppure alcuna pretesa riguardo ad esso, poiché non era indipendente.

§11. **La soppressione dell'intreccio. Il risultato dipendente dalla volontà dello sperimentatore.**

Ritorniamo sul caso generale dell'"intreccio", senza avere direttamente sott'occhio il caso particolare di un processo di misura, come sopra. I cataloghi delle aspettazioni di due corpi A e B siano stati intrecciati da un'interazione precedente. Ora i corpi siano di nuovo separati. Allora ne posso prendere uno, sia B, e completare la mia conoscenza divenuta sottomassimale di esso mediante misure in successione fino ad una massimale. Affermo: solo quando ci sarò riuscito per la prima volta, e non prima, l'intreccio sarà risolto, e in secondo luogo mediante le misure su B, utilizzando le proposizioni condizionali che esistono, avrò conseguito una conoscenza massimale anche di A.

Infatti in primo luogo la conoscenza del sistema complessivo resta sempre massimale, poiché non sarà in ogni caso rovinata da misure buone e precise. In secondo luogo: proposizioni condizionali della forma "se per A .... .., allora per B .... ..", non possono più esistere, dal momento che abbiamo ottenuto un catalogo massimale di B. Allora esso *non* è condizionato e in esso non può più intervenire nulla di relativo ad A. Terzo: proposizioni condizionali in direzione inversa ("se per B .... .., allora per A .... ..") si trasformano in proposizioni riguardanti solo A, poiché tutte le probabilità per B sono già note in forma incondizionata. L'intreccio è quindi rimosso senza residui, e poiché la conoscenza del sistema totale è rimasta massimale, può solo consistere nel fatto che oltre al catalogo massimale di B se ne trova uno simile per A.

E non può succedere che A sia conosciuto indirettamente, mediante le misure di B, già in modo massimale, prima che lo sia B. Infatti allora tutte le conclusioni funzionerebbero in senso inverso, cioè anche B lo sarebbe. I sistemi sono conosciuti in modo massimale allo stesso tempo, come affermato. Si nota inoltre che ciò varrebbe anche se non si restringessero le misure proprio ad uno dei due sistemi. Ma l'interessante è proprio che ci si *possa* restringere ad uno dei due; che in questo modo si raggiunga lo scopo.

È lasciato completamente all'arbitrio dello sperimentatore *quali* misure vadano compiute su B ed in quale sequenza. Egli non ha bisogno di scegliere variabili particolari per poter usare le proposizioni condizionali. Può tranquillamente fare un piano che lo porterebbe ad una conoscenza massimale di B anche se su B non conoscesse proprio nulla. Non può arrecare alcun danno che egli porti questo piano alla conclusione. Quando egli considera dopo ogni misura se ha già raggiunto lo scopo, lo fa solo per risparmiarsi dell'altro lavoro superfluo.

Quale catalogo di A si ottenga indirettamente in tal modo, dipende evidentemente dai numeri misurati che risultano su B (prima che l'intreccio sia del tutto risolto; dai successivi non più, nel caso che fossero superfluamente rimisurati). Si supponga ora che io abbia in un certo caso ottenuto in tal modo un catalogo di A. Allora posso riflettere e pensare se forse ne avrei trovato un *altro*, se avessi messo in opera un *altro* piano di misura su B. Ma tuttavia, sia che abbia influenzato il sistema A nel modo reale o nell'altro modo pensato, le asserzioni dell'altro catalogo, quali che possano essere, devono *pure* essere giuste. Devono quindi essere completamente contenute nel primo, poiché il primo è massimale. Ma lo dovrebbe essere anche il secondo. Quindi esso dev'essere identico al primo.

Stranamente la struttura matematica della teoria non soddisfa affatto in modo automatico questa prescrizione. Anzi peggio, si possono costruire degli esempi nei quali la prescrizione è necessariamente violata. Invero si può in ogni esperimento eseguire di fatto solo una sequenza di misure (sempre su B!); allora quando ciò è avvenuto l'intreccio è risolto e con ulteriori misure su B non si apprende più nulla su A. Ma esistono casi di intreccio nei quali per le misure su B sono proponibili *due programmi determinati*, ciascuno dei quali 1. deve portare allo scioglimento dell'intreccio, 2. deve portare ad un catalogo di A, al quale l'*altro* non *può* assolutamente portare - quali che siano i numeri misurati che possono risultare nell'uno o nell'altro caso. Succede infatti semplicemente che le due *sequenze* del catalogo di A, che si possono ottenere con l'uno o con l'altro programma, sono nettamente separate e non hanno un singolo termine in comune.

Questi sono casi particolarmente esasperati, nei quali la conclusione appare così evidente. In generale ci si deve riflettere più attentamente. Quando vengono presentati due programmi per le misure su B e le due sequenze del catalogo di A alle quali essi possono portare, non basta affatto che le due sequenze abbiano uno o alcuni termini in comune per poter dire: toh, allora uno di questi si presenterà sempre - e quindi sostenere che la prescrizione è "presumibilmente soddisfatta". Ciò non basta. Infatti *si conosce* la probabilità di ogni misura su B, considerata come misura sull'intero sistema, e con molte ripetizioni ab ovo ciascuna si deve realizzare con la frequenza ad essa destinata. Le due sequenze del catalogo A dovrebbero quindi coincidere termine a termine e inoltre le probabilità in ciascuna sequenza dovrebbero essere le stesse. E ciò non solo per questi due programmi, ma per ciascuno degli infiniti che si possono escogitare. Ma non se ne parla minimamente. La prescrizione che il catalogo A che si ottiene debba essere sempre lo stesso quali che siano le misure su B con le quali lo si porti alla luce, questa prescrizione non è soddisfatta proprio mai.

Esporremo ora un semplice esempio "esasperato".

§12. **Un esempio.**[5].

Per semplicità consideriamo due sistemi con solo un grado di libertà ciascuno. Cioè ognuno di essi sarà caratterizzato mediante una coordinata q ed un impulso p ad esso canonicamente coniugato. L'immagine classica sarebbe quella d'un punto materiale mobile solo lungo una retta, come le palline di quel giocattolo col quale i bambini imparano a far di conto. p è il prodotto massa per velocità. Per il secondo sistema indichiamo i due elementi determinanti con Q e P maiuscole. Se i due siano "infilati sullo stesso filo", non abbiamo da dirlo nel nostro discorso astratto. Ma se anche lo fossero, può tuttavia esser comodo non calcolare q e Q dalla stessa origine. L'equazione $q = Q$ non deve significare necessariamente coincidenza. I due sistemi possono malgrado ciò essere del tutto separati.

Nel lavoro citato si mostra che tra questi due sistemi può esistere un intreccio, che *in un dato istante, al quale tutto il seguito si riferisce*, si indicherà in breve con le due equazioni

$$q = Q \text{ e } p = -P.$$

Cioè: io *so* che se una misura di q dà un certo valore sul primo sistema, una misura di Q eseguita subito dopo sul secondo darà lo *stesso* valore e vice versa; *so inoltre* che se una misura di p sul primo sistema dà un certo valore, una misura di P eseguita subito dopo darà il valore opposto e vice versa.

Una singola misura di q o *di* p *oppure di* Q *ovvero di* P leva l'intreccio e rende *entrambi* i sistemi noti in modo massimale. Una seconda misura sullo stesso sistema ora modifica solo la risposta riguardo ad *esso*, e non insegna più nulla riguardo all'altro. Quindi non si possono verificare entrambe le equazioni con un esperimento solo. Si può però ripetere l'esperimento ab ovo mille volte; si può riproporre sempre lo stesso intreccio; a capriccio si può verificare o l'una o l'altra equazione; ciò che di volta in volta ci si degna di verificare lo si trova confermato. Supponiamo che ciò sia accaduto.

Se poi al milleunesimo esperimento vien voglia di rinunciare a verifiche ulteriori e, al posto di esse, di misurare sul primo sistema q e sul secondo P, e si trova

$$q = 4, P = 7;$$

si può allora dubitare che

$$q = 4, p = -7$$

sarebbe stata una giusta predizione per il primo sistema, oppure

$$Q = 4, P = 7$$

una giusta predizione per il secondo? Non verificabili nel loro pieno contenuto con un esperimento singolo, queste non sono affatto predizioni quantistiche, ma giuste, poiché chi si ostinasse non si esporrebbe ad alcuna delusione, qualunque metà avesse pur scelto di verificare.

Non si possono aver dubbi in proposito. Ogni misura è sul suo sistema la prima. Le misure su sistemi separati non possono influenzarsi direttamente, ciò sarebbe

[5]A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, Physic. Rev. **47**, 777 (1935). La comparsa di questo lavoro ha dato lo stimolo per la presente - la chiamerò relazione o confessione generale?

magia. Non può trattarsi di numeri casuali se da mille prove risulta che le misure eseguite la prima volta coincidono.

Il catalogo delle predizioni $q = 4$, $p = -7$ sarebbe ovviamente ipermassimale.

§13. **Prosecuzione dell'esempio: tutte le misure possibili sono univocamente intrecciate.**

Ora secondo la dottrina della meccanica quantistica, che seguiamo qui fino alle sue ultime conseguenze, una *predizione* in questa circostanza non è possibile. Molti miei amici si tranquillizzano così e spiegano: ciò che un sistema *avrebbe* risposto allo sperimentatore, se... , - non ha niente a che fare con una misura reale e perciò dal nostro punto di vista epistemologico non ci porta a nulla.

Ma rendiamoci la faccenda ancora una volta del tutto chiara. Concentriamo l'attenzione sul sistema contrassegnato dalle lettere minuscole p, q, chiamiamolo per brevità quello "piccolo". La faccenda sta certamente così: al sistema piccolo, mediante misura diretta su di esso, io posso porre una delle due domande, o quella riguardo a q oppure quella riguardo a p. Prima di farlo posso, se voglio, con una misura sull'altro sistema completamente separato (che considereremo come apparato ausiliario) essermi procurato la risposta ad *una* di queste domande, oppure posso avere l'intenzione di procurarmela dopo. Il mio sistema piccolo, come uno studente all'esame, *non può affatto sapere* se io l'abbia fatto e per quale domanda, ovvero se e per quale io abbia intenzione di farlo dopo. Con un numero sufficientemente grande di esperimenti preliminari so che lo studente risponde sempre giusto alla prima domanda che io gli pongo. Da ciò segue che egli *conosce* in ogni caso la risposta a *entrambe* le domande. Che il rispondere alla prima domanda che mi è venuto voglia di porre abbia stancato o confuso lo studente in modo tale che le sue risposte successive non siano valide non cambia proprio niente riguardo a questa verifica. Nessun direttore di ginnasio, qualora questa situazione si ripetesse con migliaia di studenti di ugual provenienza, giudicherebbe diversamente, tanto egli si chiederebbe stupito *che cosa* renda tutti gli studenti così stupidi o renitenti dopo aver risposto alla prima domanda. Non gli verrebbe in mente che la consultazione da parte sua, dell'insegnante, di un manuale suggerisca allo studente la risposta giusta, o, nel caso che l'insegnante abbia voglia di controllare dopo la risposta soddisfacente dello studente, che la risposta abbia mutato il testo del taccuino a favore dello studente.

Il mio sistema piccolo contiene quindi per la domanda su q e per la domanda su p una risposta del tutto determinata già nel caso che essa sia la prima che gli si ponga direttamente. Questa prontezza non può cambiare d'un briciolo per il fatto che io misuri Q sul sistema ausiliario (nella metafora: che l'insegnante cerchi una delle domande nel suo taccuino e inoltre però rovini con una macchia d'inchiostro la pagina dove sta l'altra risposta). Il meccanico quantistico sostiene che dopo una misura di Q sul sistema ausiliario al mio sistema piccolo spetta una funzione ψ nella quale "q è del tutto preciso, ma p è completamente indeterminato". E tuttavia, come detto prima, non è cambiato d'un briciolo il fatto che il mio sistema piccolo abbia già anche per la domanda su p una risposta del tutto determinata, e precisamente la stessa di prima.

Ma la faccenda è ancora molto più malmessa. Non solo il mio studente sveglio ha già sia per la domanda su q che per la domanda su p una risposta del tutto determinata, ma anche per mille altre, e senza che io possa minimamente indovinare la tecnica mnemonica con la quale egli ottiene ciò. p e q non sono le sole variabili che io posso misurare. Anche ad una qualsiasi combinazione di esse, per esempio

$$p^2 + q^2$$

corrisponde secondo il punto di vista della meccanica quantistica una misura del tutto determinata. Ora si mostra[6] che anche per questa la risposta si può stabilire con una misura sul sistema ausiliario, cioè con la misura di P^2+Q^2, e che le risposte sono esattamente uguali. Secondo regole generali della meccanica quantistica per questa somma di quadrati può risultare solo un valore della successione

$$h,\ 3h,\ 5h,\ 7h, \ldots\ldots.$$

La risposta, che il mio sistema piccolo ha già per la domanda su p^2+q^2 (nel caso che questa debba essere la prima che si affronti) dev'essere un numero di questa successione. - Esattamente allo stesso modo succede con la misura di

$$p^2 + a^2 q^2,$$

dove a dev'essere una qualsiasi costante positiva. In questo caso secondo la meccanica quantistica la risposta dev'essere un numero della successione seguente:

$$ah,\ 3ah,\ 5ah,\ 7ah, \ldots\ldots.$$

Per ogni valore numerico di a si ottiene una nuova domanda, per ciascuna il mio sistema piccolo contiene già una risposta presa dalla successione (costruita con il corrispondente valore di a).

La cosa più sorprendente è ora: non è possibile che queste risposte stiano tra loro nella relazione data dalle formule! Infatti sia q' la risposta che si è già avuta per la domanda su q, p' la risposta per la domanda su p; allora non è possibile che

$$\frac{p'^2 + a^2 q'^2}{ah}$$

sia uguale ad un numero intero dispari per valori numerici determinati p' e q', e *per ogni numero positivo arbitrario a*. Ma questo non è solo un operare con numeri immaginati, che non si possono misurare realmente. Due dei numeri si possono procurare davvero, per esempio q' e p', uno mediante misura diretta, l'altro mediante misura indiretta. E allora ci si può convincere del fatto (sit venia verbo) che l'espressione precedente costruita con i numeri misurati q' e p' e con un a arbitrario, non è affatto un numero intero dispari.

A prima vista il difetto nella connessione delle diverse risposte tenute pronte (nella "tecnica mnemonica" dello studente) è completo, il buco non potrà essere colmato da un'algebra della meccanica quantistica di nuovo tipo. Il difetto è tanto più sorprendente perché si può dimostrare altresì: l'intreccio è già fissato univocamente dalle prescrizioni $q = Q$ e $p = -P$. Se sappiamo che le coordinate sono uguali e che gli impulsi sono uguali ma di segno opposto, secondo la meccanica quantistica risulta una corrispondenza biunivoca *completamente determinata* di *tutte* le misure *possibili* sui due sistemi. Per *ogni* misura sul "piccolo" si può ottenere il valore

[6]E. Schrödinger, Proc. Cambridge philos. Soc. (in stampa).

numerico mediante una misura opportunamente predisposta sul "grande", ed ogni misura sul grande orienta parimenti sul risultato che un certo tipo di misura sul piccolo darà o ha dato. (Naturalmente nello stesso senso come sempre finora: su ogni sistema conta solo la misura vergine.) Se abbiamo portato i due sistemi nella situazione che essi (per dirla in breve) coincidano in coordinata ed impulso, essi coincidono (per dirla in breve) anche rispetto a tutte le altre variabili.

Ma come i valori numerici di tutte queste variabili dipendano l'uno dall'altro in *un* sistema non lo sappiamo, sebbene il sistema per ognuna debba averne già pronto uno ben determinato: infatti se vogliamo possiamo venirlo a sapere mediante il sistema ausiliario e lo troviamo poi sempre confermato con misura diretta.

Poiché non sappiamo nulla sulla relazione tra i valori delle variabili predisposti in *un* sistema, si dovrà ora pensare che non ne sussista alcuna, che possano verificarsi combinazioni largamente arbitrarie? Ciò significherebbe che a un siffatto sistema con "*un* grado di libertà" non sarebbero necessari per una descrizione adeguata solo due numeri, come vorrebbe la meccanica classica, ma molti di più, forse infiniti. Ma è tuttavia sorprendente che *due* sistemi coincidano sempre in *tutte* le variabili, se coincidono in due. Si dovrebbe quindi assumere in secondo luogo che ciò dipenda dalla nostra inettitudine; si dovrebbe pensare che noi non siamo praticamente in grado di portare due sistemi in una situazione nella quale essi coincidano rispetto a due variabili senza introdurre, volenti o nolenti, la coincidenza anche per tutte le variabili rimanenti, sebbene ciò non sia di per sè necessario. Si devono fare queste *due* ipotesi, per non avvertire la mancanza totale di comprensione della relazione tra i valori delle variabili all'interno di un sistema come un grosso guaio.

§14. **La variazione dell'intreccio col tempo. Riflessioni sulla posizione speciale del tempo.**

Forse non è superfluo ricordare che tutto ciò che è stato detto nelle sezioni 12 e 13 si riferisce ad un solo istante. L'intreccio non è invariabile nel tempo. Permane certamente un intreccio biunivoco di *tutte* le variabili, ma la corrispondenza cambia. Ciò significa quanto segue. Ad un tempo t successivo si può ben venire a sapere di nuovo, con una misura sul sistema ausiliario, il valore di q o di p che si ha *allora*, ma le misure che a questo fine si devono fare sul sistema ausiliario sono *diverse*. Quali siano, lo si può vedere facilmente in un caso semplice. Naturalmente ora si ha dipendenza dalle forze che agiscono all'interno dei due sistemi. Assumiamo che non agisca alcuna forza. Per semplicità porremo che la massa sia uguale per i due e la chiameremo m. Allora nel modello classico gli impulsi p e P resterebbero costanti, poiché sono dati dalle velocità moltiplicate per le masse; e le coordinate al tempo t, alle quali per distinguere apporremo l'indice t (q_t, Q_t), si calcoleranno da quelle iniziali, che chiameremo ancora q, Q, nel modo seguente:

$$q_t = q + \frac{p}{m}t, Q_t = Q + \frac{P}{m}t.$$

Parliamo in primo luogo del sistema piccolo. Il modo più naturale per descriverlo classicamente al tempo t è dando la coordinata e l'impulso *a questo tempo*, cioè mediante q_t e p. Ma si può fare anche diversamente. Al posto di q_t si può dare anche q. Pure q è un "elemento determinante al tempo t", e proprio ad ogni tempo t, e precisamente uno che non cambia col tempo. Ciò è molto simile al fatto che io posso dare un certo elemento determinante della mia stessa persona, cioè la mia età, o mediante il numero 48, che cambia col tempo e che nel caso del sistema corrisponde a dare q_t, oppure col numero 1887, come è usuale sui documenti, e che corrisponde a dare q. Ora, per quanto sopra si ha

$$q = q_t - \frac{p}{m}t.$$

Analogamente per il secondo sistema. Introduciamo quindi come elementi determinanti

$$\text{per il primo sistema } q_t - \frac{p}{m}t \text{ e } p,$$

$$\text{per il secondo sistema } Q_t - \frac{P}{m}t \; e \; P.$$

Il vantaggio è che *tra questi si mantiene in permanenza lo stesso intreccio*:

$$q_t - \frac{p}{m}t = Q_t - \frac{P}{m}t, p = -P,$$

o risolvendo:

$$q_t = Q_t - \frac{2t}{m}P; p = -P.$$

Ciò che cambia col tempo è quindi solo questo: la coordinata del sistema "piccolo" non sarà determinata semplicemente mediante una misura della coordinata sul sistema ausiliario, ma attraverso una misura dell'aggregato

$$Q_t - \frac{2t}{m}P.$$

Al riguardo però non ci si deve proporre di misurare Q_t e P, infatti ciò non dà nulla. Ma si deve pensare, come sempre si deve pensare nella meccanica quantistica, che si ha un procedimento di misura diretto per questo aggregato. Per il resto vale per ogni istante, con questo mutamento, *tutto* ciò che è stato detto nelle sezioni 12 e 13; in particolare esiste in ogni istante l'intreccio biunivoco di *tutte* le variabili assieme alle sue male conseguenze.

Le cose vanno esattamente così anche quando all'interno di ogni sistema agisce una forza, ma allora q_t e p si intrecciano con variabili che si compongono con Q_t e P in modo più complicato.

Ho spiegato questo in breve perché possiamo riflettere su quanto segue. Che l'intreccio cambi con il tempo ci rende un poco meditabondi. Tutte le misure di cui s'è parlato devono forse essere eseguite in un tempo brevissimo, propriamente in modo *istantaneo*, senza durata, per giustificare le inesorabili conseguenze? Si può scacciare lo spettro facendo presente che le misure richiedono tempo? No. In ogni singolo esperimento è necessaria solo *una* misura su ogni sistema; vale solo quella vergine, le successive sarebbero comunque irrilevanti. Quanto a lungo duri la misura non occorre che c'interessi, poiché non ne vogliamo far seguire una seconda. Si devono solo allestire le due misure verginali in modo tale che esse producano i valori delle variabili per lo stesso preciso *istante* a noi noto in precedenza; noto in precedenza, perché dobbiamo indirizzare le misure sulla coppia di variabili che proprio in quell'istante è intrecciata.

\- Forse non è possibile indirizzare le misure in questo modo?

= Forse. Lo sospetto addirittura. Solo: l'*attuale* meccanica quantistica deve richiedere ciò. Infatti essa è ora così sistemata che le sue predizioni son fatte sempre per un determinato *istante*. Poiché esse si devono riferire a valori misurati, non avrebbero alcun contenuto se non si potessero misurare *per* un istante determinato le variabili in questione, sia che la misura duri molto, o poco.

Quando *apprendiamo* il risultato ci è ovviamente del tutto indifferente. Ciò ha dal punto di vista teorico così poca rilevanza come il fatto che si impieghi un mese per integrare le equazioni differenziali del tempo per i prossimi tre giorni. - Il paragone drastico con l'esame dello studente è alla lettera inesatto in alcuni punti, ma lo spirito è giusto. L'espressione "il sistema sa" forse non viene ad avere più il significato che la risposta sgorga dalla situazione di un istante, essa può forse essere attinta da una successione di situazioni che si estende per un spazio di tempo finito. Ma anche se fosse così non avremmo bisogno di preoccuparci, purché il sistema in qualche modo attingesse da sé la sua risposta senza un altro aiuto, come quando gli diciamo (mediante il dispositivo sperimentale) a *quale* domanda desideriamo che risponda; e purché la risposta stessa sia associata univocamente ad un *istante*; cosa che bene o male si deve presupporre per ogni misura di cui parla la meccanica quantistica odierna; altrimenti le predizioni quantomeccaniche non avrebbero alcun contenuto.

Ma nella nostra discussione ci siamo imbattuti in una possibilità: Se si potesse introdurre l'ipotesi che le predizioni quantomeccaniche non o non sempre si riferiscano ad un istante precisamente determinato, non si avrebbe bisogno di richieder ciò neanche dai numeri misurati. In tal modo, poiché le variabili intrecciate cambiano col tempo, la comparsa di affermazioni antinomiche sarebbe resa straordinariamente più difficile.

Che la predizione temporalmente netta sia un passo falso è probabile anche per altri motivi. Il numero misurato del tempo è come ogni altro il risultato di un'osservazione. È possibile consentire che si faccia un'eccezione proprio per la misura da un orologio? Non si riferirà essa come ogni altra ad una variabile che in generale non ha un valore preciso e che in ogni caso non lo può avere contemporaneamente ad *ogni* altra variabile? Quando si predice il valore di un'*altra* per un determinato *istante*, non si dovrà temere che i due non possano essere conosciuti simultaneamente con precisione? Entro la meccanica quantistica attuale questo timore non si può proprio studiare a fondo. Infatti il tempo è a priori assunto come noto sempre con precisione, anche se si dovrebbe ammettere che ogni guardar l'ora perturbi l'avanzare dell'orologio in maniera incontrollabile.

Devo ripetere che non possediamo una meccanica quantistica le asserzioni della quale valgano *non* per istanti esattamente determinati. Mi sembra che questo difetto si manifesti proprio in quelle antinomie. Con ciò non intendo dire che esso sia l'unico difetto che si manifesti in loro.

§15. **Principio di natura o artificio di calcolo?**

Che il "tempo preciso" sia un'incongruenza all'interno della meccanica quantistica e che inoltre, per così dire indipendentemente da ciò, la posizione particolare del tempo costituisca un serio ostacolo per l'adeguamento della meccanica quantistica al *principio di relatività*, negli ultimi anni l'ho fatto notare ripetutamente, purtroppo senza poter fare neppure l'ombra di una controproposta praticabile[7].

[7]Berl. Ber. 16 April 1931; Annales de L'Institut H. Poincaré, p. 269 (Paris 1931); Cursos de

Osservando nel complesso l'intera situazione attuale, come ho cercato di delinearla qui, si fa largo anche un'osservazione di tutt'altro tipo riguardo alla "relativizzazione" della meccanica quantistica, così strenuamente perseguita, ma non ancora realmente raggiunta.

La singolare teoria della misura, i salti apparenti della funzione ψ e infine le "antinomie dell'intreccio" scaturiscono tutti dal modo semplice col quale l'apparato di calcolo della meccanica quantistica consente di fondere concettualmente in uno solo due sistemi separati; per la qual cosa esso sembra proprio predestinato. Quando due sistemi entrano in interazione, come abbiamo visto, non entrano in interazione le loro funzioni ψ, ma esse cessano immediatamente di esistere e al loro posto ne compare una sola per il sistema complessivo. Essa consiste, per ricordarlo in breve, prima semplicemente nel *prodotto* delle due funzioni singole; il quale, poiché una funzione dipende da variabili del tutto diverse da quelle dell'altra, è una funzione di tutte queste variabili ovvero "ha gioco in una regione con un numero di dimensioni ben più alto" che le funzioni singole. Non appena i sistemi cominciano ad interagire la funzione complessiva cessa di essere un prodotto, e neppure quando essi si sono di nuovo separati si suddivide di nuovo in fattori che si possano assegnare individualmente ai sistemi. Così si dispone provvisoriamente (finché l'intreccio non venga risolto mediante una reale osservazione) solo di una descrizione *complessiva* dei due in quella regione con un numero di dimensioni più alto. Questo è il motivo per il quale la conoscenza dei sistemi singoli può calare al minimo, proprio fino a zero, mentre quella del sistema complessivo resta costantemente massimale. La conoscenza migliore possibile di un tutto *non* include la conoscenza migliore possibile delle sue parti - l'incubo si basa interamente su questo.

Chi su ciò rifletta deve poi valutare con ponderazione i seguenti fatti. La fusione concettuale di due o più sistemi in *uno* solo si scontra con grandi difficoltà non appena si cerchi di introdurre nella meccanica quantistica il principio della relatività speciale. P.A.M. Dirac[8] ha risolto il problema di un solo elettrone già da sette anni in modo sbalorditivamente semplice e bellamente relativistico. Una serie di conferme sperimentali, che vanno sotto le espressioni rotazione dell'elettrone, elettrone positivo e creazione di coppie, non possono lasciare alcun dubbio sulla fondamentale correttezza della soluzione. Ma in primo luogo essa si pone però assai fortemente al di fuori dello schema concettuale della meccanica quantistica[9] (quello che ho qui cercato di delineare), in secondo luogo ci si scontra con una resistenza ostinata non appena, a partire dalla soluzione di Dirac, si cerchi di progredire nel problema di più elettroni secondo il modello della teoria non relativa. (Ciò dimostra già che la soluzione fuoriesce dallo schema generale, infatti in questo, come ricordato, la fusione di sistemi parziali è semplicissima.) Non azzardo alcun giudizio sui tentativi che esistono in questa direzione[10]. Che essi abbiano raggiunto lo scopo non lo credo già per il fatto che gli autori non lo sostengono.

Le cose stanno in modo analogo con un altro sistema, il campo elettromagnetico.

---

la universidad internacional de verano en Santander, **1**, p. 60 (Madrid, Signo, 1935).

[8]Proc. roy. Soc. Lond. A, **117**, 610 (1928).

[9]P.A.M. Dirac, The principles of quantum mechanics, I ed., p. 239, II ed., p. 252. Oxford: Clarendon Press 1930 e 1935.

[10]Ecco alcuni dei riferimenti più importanti: G . Breit, Physic. Rev. **34**, 553 (1929) e 616 (1932). - C. Møller, Z. Physik **70**, 786 1931. - P.A.M. Dirac, Proc. roy. Soc. Lond. A **136**, 453 (1932) e Proc. Cambridge philos. Soc. **30**, 150 1934. - R. Peierls, Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 420 (1934). - W. Heisenberg, Z. Physik **90**, 209 (1934).

Le sue leggi sono "la teoria della relatività incarnata", una trattazione *non* relativa è assolutamente impossibile. Tuttavia questo campo, che come modello classico della radiazione termica ha dato il primo impulso alla teoria dei quanti, è stato il primo sistema ad essere "quantizzato". Che ciò si potesse ottenere con mezzi semplici deriva dal fatto che si ha la vita un pochino più facile perché i fotoni, gli "atomi di luce", non interagiscono affatto tra loro[11], ma solo per l'intermediazione delle particelle cariche. Oggi non possediamo ancora una teoria quantistica realmente ineccepibile del campo elettromagnetico[12]. Si arriva davvero lontano con la *costruzione a partire da sistemi parziali* secondo il modello della teoria non relativa (teoria della luce di Dirac[13]), ma non proprio alla meta.

Forse il procedimento semplice che la teoria non relativa possiede in proposito è soltanto un comodo artificio di calcolo, che però oggi, come abbiamo visto, ha ottenuto un'influenza straordinariamente grande sul nostro atteggiamento fondamentale riguardo alla natura.

Per l'agio avuto nella stesura di questa relazione devo ringraziare caldamente Imperial Chemical Industries Limited, London.

[11]Ma ciò succede probabilmente solo in modo approssimato. Vedi M. Born e L. Infeld, Proc. roy. Soc. Lond. A **144**, 425 e **147**, 522 (1934); **150**, 141 (1935). Questo è il tentativo più recente di un'elettrodinamica quantistica.

[12]Ecco di nuovo i lavori più importanti; in parte il loro contenuto si riferisce anche all'argomento della citazione precedente: P. Jordan e W. Pauli, Z. Physik **47**, 151 (1928). - W. Heisenberg e W. Pauli, Z. Physik **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930). - P.A.M. Dirac, V.A. Fock e B. Podolsky, Physik. Z. d. Sowj. **6**, 468 (1932). - N. Bohr e L. Rosenfeld, Danske Videnskaberne Selskab, math.-phys. Mitt. **12**, 8 (1933).

[13]Un'ottima relazione: E. Fermi, Rev. modern physics **4**, 87, (1932).