Il campo gravitazionale di un punto materiale secondo la teoria di Einstein.[1]

K. Schwarzschild

(Ricevuto il 13 gennaio 1916.)

§1. Nel suo lavoro sul moto del perielio di Mercurio (vedi Sitzungsberichte del 18 novembre 1915) Einstein ha posto il seguente problema:

Un punto si muova secondo la legge

$$\delta \int ds = 0, \quad \text{ove } ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \ \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

le $g_{\mu\nu}$ indicano funzioni delle variabili x e nella variazione le variabili x vengono mantenute fisse all'inizio e alla fine del cammino d'integrazione. In breve, il punto si muova quindi lungo una linea geodetica nella varietà caratterizzata dall'elemento di linea ds.

L'esecuzione della variazione dà le equazioni di moto del punto

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \ \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

ove

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \tag{3}$$

e $g^{\alpha\beta}$ indica il minore normalizzato associato a $g_{\alpha\beta}$ nel determinante $|g_{\mu\nu}|$.

Secondo la teoria di Einstein questo è allora il moto di un punto privo di massa nel campo gravitazionale d'una massa che si trovi nel punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, quando le "componenti del campo gravitazionale" Γ soddisfino ovunque, con l'eccezione del punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, le "equazioni di campo"

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0 \tag{4}$$

e quando inoltre sia soddisfatta l'"equazione del determinante"

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \tag{5}$$

Le equazioni di campo assieme all'equazione del determinante hanno la proprietà fondamentale che esse mantengono la loro forma per sostituzione di altre variabili qualsiansi al posto di x_1, x_2, x_3, x_4, purché il determinante della sostituzione sia uguale ad 1.

Le x_1, x_2, x_3 indichino coordinate ortogonali e x_4 il tempo, inoltre la massa nell'origine non varî nel tempo, e il moto all'infinito sia rettilineo e uniforme; allora

[1] Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie., S.B. Preuss. Akad. Wiss. 1916, 189-196.

secondo l'elencazione di Einstein a pag. 833 nell'opera citata devono essere ancora soddisfatte le condizioni seguenti:

1. Tutte le componenti sono indipendenti dal tempo x_4.
2. Le equazioni $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ valgono esattamente per $\rho = 1, 2, 3$.
3. La soluzione è spazialmente simmetrica rispetto all'origine del sistema di coordinate nel senso che ci si imbatte di nuovo nella stessa soluzione quando si sottopongono x_1, x_2, x_3 ad una trasformazione ortogonale (rotazione).
4. Le $g_{\mu\nu}$ si annullano all'infinito con l'eccezione dei seguenti quattro valori limite diversi da zero:

$$g_{44} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Il problema è *scoprire un elemento di linea con coefficienti tali che le equazioni di campo, l'equazione del determinante e queste quattro condizioni siano soddisfatte.*

§2. Einstein ha mostrato che questo problema porta in prima approssimazione alla legge di Newton e che la seconda approssimazione riproduce correttamente la nota anomalia nel moto del perielio di Mercurio. Il calcolo seguente dà la soluzione esatta del problema. È sempre piacevole disporre di soluzioni esatte di forma semplice. Più importante è che il calcolo assicuri anche la determinazione univoca della soluzione, sulla quale la trattazione di Einstein lascia ancora dubbi, e che per il modo come si presenta in seguito, solo ben difficilmente si potrebbe dimostrare mediante un siffatto procedimento di approssimazione. Le righe seguenti portano quindi a far risplendere il risultato di Einstein con accresciuta chiarezza.

§3. Se si chiamano t il tempo, x, y, z le coordinate ortogonali, l'elemento di linea più generale che soddisfa le condizioni 1-3 è evidentemente il seguente:

$$ds^2 = F dt^2 - G\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - H(x dx + y dy + z dz)^2$$

dove F, G, H sono funzioni di $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La condizione (4) richiede: per $r = \infty$: $F = G = 1, H = 0$.

Se si passa a coordinate polari con $x = r \sin\vartheta \cos\phi$, $y = r \sin\vartheta \sin\phi$, $z = r\cos\vartheta$, lo stesso elemento di linea si scrive:

$$\begin{aligned} ds^2 &= F dt^2 - G\left(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2\right) - H r^2 dr^2 \\ &= F dt^2 - \left(G + H r^2\right) dr^2 - G r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ma l'elemento di volume in coordinate polari è uguale a $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi$, il determinante funzionale $r^2 \sin\vartheta$ dalle vecchie alle nuove coordinate è diverso da 1; quindi le equazioni di campo non resterebbero in forma immutata qualora si calcolasse con queste coordinate polari, e si dovrebbe eseguire una trasformazione complicata. È tuttavia disponibile un accorgimento più semplice per aggirare questa difficoltà. Si ponga

$$x_1 = \frac{r^3}{3},\ x_2 = -\cos\vartheta,\ x_3 = \phi. \tag{7}$$

Allora per l'elemento di volume vale: $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi = dx_1 dx_2 dx_3$. Le nuove variabili sono quindi *coordinate polari di determinante 1.* Esse hanno l'evidente vantaggio delle coordinate polari per la trattazione del problema, e parimenti per esse, se si assume ancora $t = x_4$, le equazioni di campo e l'equazione del determinante restano in forma immutata.

Nelle nuove coordinate polari l'elemento di linea si scrive:

$$ds^2 = F dx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2 \left(1 - x_2^2\right)\right], \tag{8}$$

al posto della quale scriveremo:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2 \left(1 - x_2^2\right). \tag{9}$$

Allora $f_1, f_2 = f_3, f_4$ sono tre funzioni di x_1 che devono soddisfare le condizioni seguenti:

1. Per $x_1 = \infty$: $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-4/3}$, $f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{2/3}$, $f_4 = 1$.
2. L'equazione del determinante: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 1$.
3. Le equazioni di campo.
4. Le f continue, meno che per $x_1 = 0$.

§4. Per poter scrivere le equazioni di campo si devono in primo luogo costruire le componenti del campo di gravitazione che corrispondono all'elemento di linea (9). Ciò avviene nel modo più semplice se si costruiscono le equazioni differenziali della linea geodetica con l'esecuzione diretta della variazione, e da queste si ricavano le componenti. Le equazioni differenziali della linea geodetica per l'elemento di linea (9) si ottengono tramite la variazione immediatamente nella forma:

$$\begin{aligned} 0 = f_1 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left[\frac{1}{1-x_2^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(1-x_2^2\right)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$0 = \frac{f_2}{1-x_2^2}\frac{d^2 x_2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{f_2 x_2}{\left(1-x_2^2\right)^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + f_2 x_2 \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2$$

$$0 = f_2\left(1-x_2^2\right)\frac{d^2 x_3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(1-x_2^2\right)\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} - 2 f_2 x_2 \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}$$

$$0 = f_4 \frac{d^2 x_4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds}.$$

Il confronto con la (2) dà le componenti del campo gravitazionale:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{22}^1 = +\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma_{33}^1 = +\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(1-x_2^2\right),$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

$$\Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{2f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},\ \Gamma_{22}^2 = -\frac{x_2}{1-x_2^2},\ \Gamma_{33}^2 = -x_2\left(1-x_2^2\right),$$

$$\Gamma^3_{31} = -\frac{1}{2f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},\ \Gamma^3_{32} = +\frac{x_2}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma^4_{41} = -\frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

(le altre nulle).

Per la simmetria di rotazione attorno all'origine basta formare le equazioni di campo solo per l'equatore ($x_2 = 0$) e quindi, poiché sarà derivato solo una volta, nelle espressioni seguenti si può porre anticipatamente $1 - x_2^2$ uguale ad 1. Allora il calcolo delle equazioni di campo dà

$$(a)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(b)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 2 + \frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(c)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Oltre a queste tre equazioni le funzioni f_1, f_2, f_3 devono ancora soddisfare all'equazione del determinante

$$(d)\ f_1 f_2^2 f_4 = 1 \quad \text{ovvero:} \quad \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0.$$

Trascuro per il momento (b) e determino le tre funzioni f_1, f_2, f_4 dalle (a), (c) e (d). La (c) si può porre nella forma

$$(c')\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}.$$

Essa si può integrare immediatamente e dà

$$(c'')\ \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1,\ (\alpha \text{ costante d'integrazione})\ ,$$

la (a) e la (c') sommate danno

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Tenendo conto della (d) risulta

$$-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 3\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2.$$

Integrata

$$\frac{1}{\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}} = \frac{3}{2}x_1 + \frac{\rho}{2}\ (\rho \text{ costante d'integrazione})$$

ovvero

$$\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{2}{3x_1 + \rho}.$$

Integrata ancora una volta

$$f_2 = \lambda\,(3x_1 + \rho)^{2/3} \quad (\lambda \text{ costante d'integrazione}).$$

La condizione all'infinito richiede: $\lambda = 1$. Quindi

(10) $$f_2 = (3x_1 + \rho)^{2/3}\,.$$

Perciò si ottiene inoltre dalle (c") e (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x_1 + \rho)^{4/3}}.$$

Integrata tenendo conto della condizione all'infinito

(11) $$f_4 = 1 - \alpha\,(3x_1 + \rho)^{-1/3}\,.$$

Inoltre dalla (d)

(12) $$f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha\,(3x_1 + \rho)^{-1/3}}.$$

Come si calcola facilmente, l'equazione (b) è automaticamente soddisfatta con le espressioni trovate di f_1 ed f_2.

Perciò tutte le condizioni sono soddisfatte, a meno della continuità. f_1 sarà discontinua quando

$$1 = \alpha\,(3x_1 + \rho)^{-1/3}\,,\ 3x_1 = \alpha^3 - \rho.$$

Perché questa discontinuità coincida con l'origine dev'essere

(13) $$\rho = \alpha^3.$$

La condizione di continuità accoppia quindi in questo modo le due costanti d'integrazione ρ ed α.

La soluzione complessiva del nostro problema si scrive ora:

$$f_1 = \frac{1}{R^4}\frac{1}{1 - \alpha/R},\ f_2 = f_3 = R^2,\ f_4 = 1 - \alpha/R,$$

dove s'è introdotta la quantità ausiliaria

$$R = (3x_1 + \rho)^{1/3} = \left(r^3 + \alpha^3\right)^{1/3}.$$

Se si sostituiscono questi valori delle funzioni f nell'espressione (9) dell'elemento di linea e inoltre si ritorna alle consuete coordinate polari, allora l'*elemento di linea che forma* la *soluzione esatta del problema di Einstein* è:

(14)
$$ds^2 = (1 - \alpha/R)\, dt^2 - dR^2 \frac{1}{1 - \alpha/R} - R^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2\right), \; R = \left(r^3 + \alpha^3\right)^{1/3}.$$

Essa contiene la sola costante α che dipende dal valore della massa che si trova nell'origine.

§5. L'*unicità della soluzione* è risultata spontaneamente mediante il presente calcolo. Che fosse difficile riconoscere l'unicità con un procedimento approssimato come quello di Einstein lo si vede da quanto segue: prima di imporre la condizione di continuità era risultato:

$$f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha\,(3x_1 + \rho)^{-1/3}} = \frac{\left(r^3 + \rho\right)^{-4/3}}{1 - \alpha\left(r^3 + \rho\right)^{-1/3}}.$$

Se α e ρ sono piccoli, lo sviluppo in serie fino a quantità del second'ordine dà:

$$f_1 = \frac{1}{r^4}\left[1 + \frac{\alpha}{r} - 4/3 \frac{\rho}{r^3}\right].$$

Questa espressione, assieme a quelle corrispondenti sviluppate per f_2, f_3, f_4 soddisfa con la stessa precisione tutte le condizioni del problema. La condizione di continuità non introduce nell'ambito di questa approssimazione niente di nuovo, poiché spontaneamente appaiono discontinuità solo nell'origine. Le due costanti α e ρ paiono quindi restare arbitrarie, e perciò il problema sarebbe fisicamente indeterminato. La soluzione esatta insegna che in realtà portando oltre le approssimazioni la discontinuità appare non nell'origine, *ma* nella posizione $r = \left(\alpha^3 - \rho\right)^{1/3}$, e che si deve porre proprio $\rho = \alpha^3$, perché la discontinuità ritorni nell'origine. Nell'approssimazione secondo potenze di α e di ρ si dovrebbe controllare con grande attenzione la legge dei coefficienti per riconoscere la necessità di questo legame tra α e ρ.

§6. In conclusione si dovrà ancora derivare *il moto di un punto nel campo di gravitazione*, cioè la linea geodetica corrispondente all'elemento di linea (14). Dai tre fatti, che l'elemento di linea è omogeneo nei differenziali e che i suoi coefficienti sono indipendenti da t e da ρ, risultano immediatamente dalla variazione tre integrali intermedi. Ci si restringa pure al moto nel piano equatoriale ($\vartheta = 90^0,\ d\vartheta = 0$); allora questi integrali intermedi si scrivono:

(15) $$(1 - \alpha/R)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \alpha/R}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \text{ cost. } = h,$$

(16) $$R^2 \frac{d\phi}{ds} = \text{ cost. } = c,$$

(17) $$(1 - \alpha/R)\left(\frac{dt}{ds}\right) = \text{cost.} = 1 \quad \text{(determinazione dell'unità di tempo).}$$

Da qui segue

$$\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 + R^2\left(1-\alpha/R\right) = \frac{R^4}{c^2}\left[1-h\left(1-\alpha/R\right)\right]$$

ovvero con $1/R = x$

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3. \tag{18}$$

Se si introducono le notazioni $c^2/h = B$, $\left(1-h\right)/h = 2A$, essa è identica all'equazione (11) di Einstein nel luogo citato e dà l'osservata anomalia del perielio di Mercurio.

In generale si passa dall'approssimazione di Einstein per l'orbita alla soluzione esatta se si pone al posto di r la quantità

$$R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3} = r\left(1+\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{1/3}.$$

Poiché α/r è circa uguale al doppio del quadrato della velocità planetaria (unità la velocità della luce), la parentesi perfino per Mercurio è diversa da 1 solo per quantità dell'ordine di 10^{-12}. In pratica R è quindi identico ad r e l'approssimazione di Einstein sufficiente per le necessità più estreme della prassi.

Per concludere si deriverà ora la forma esatta della terza legge di Keplero per orbite circolari. Per la velocità angolare $n = d\phi/dt$ vale per le (16) e (17), quando si ponga $x = 1/R$

$$n = cx^2\left(1-\alpha x\right).$$

Per orbite circolari sia $dx/d\phi$ che $d^2x/d\phi^2$ devono esser nulli. Ciò dà per la (18)

$$0 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3,\ 0 = \frac{h\alpha}{c^2} - 2x + 3\alpha x^2.$$

L'eliminazione di h da queste due equazioni dà

$$\alpha = 2c^2x\left(1-\alpha x\right)^2.$$

Ne segue

$$n^2 = \frac{\alpha}{2}x^3 = \frac{\alpha}{2R^3} = \frac{\alpha}{2\left(r^3+\alpha^3\right)}.$$

Fino alla superficie solare la deviazione di questa formula dalla terza legge di Keplero è del tutto impercettibile. Tuttavia per un punto materiale ideale non risulta che la velocità angolare, come per la legge di Newton, cresca illimitatamente al diminuire del raggio dell'orbita, ma s'approssima ad un limite definito

$$n_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}.$$

(Per un punto con la massa solare la frequenza limite è circa 10^4 per secondo). Se per le forze molecolari valessero leggi analoghe, questa circostanza potrebbe in quel caso essere d'interesse.