Sull'ottica quantistica[1]

Gregor Wentzel a Monaco

(Ricevuto il 2 febbraio 1924)

Dal tempo della derivazione di Einstein della legge della radiazione di Planck si procura di assegnare nella statistica quantistica dei processi di emissione e di assorbimento certe probabilità, senza tuttavia fare su di esse affermazioni più precise. Proporremo qui un'ipotesi generale su queste probabilità, che appare adatta a contribuire a superare le contraddizioni che finora esistono in ottica teorica - teoria ondulatoria dell'interferenza e della polarizzazione da un lato, teoria quantistica delle righe spettrali dall'altro. Interpretiamo le interferenze come espressioni di leggi della statistica dei quanti che ne stanno alla base. La trattazione offre inoltre un significato quantistico alla fase della luce della teoria delle onde.

§1. La fase. Consideriamo il cammino di un raggio di luce da un sistema atomico emittente E ad un sistema atomico assorbente A. Per la teoria ondulatoria dell'interferenza è essenziale la fase:

$$\varphi = \int_E^A \frac{ds}{\lambda} = \frac{\nu}{c}\int_E^A n ds \tag{1}$$

(ν=frequenza, λ=lunghezza d'onda, n=indice di rifrazione, ds = elemento di cammino). Affermiamo che la fase φ può essere intesa quantisticamente come una pura quantità meccanica.

Si può ben considerare come il fondamento più importante della teoria dei quanti la legge che un sistema atomico non può irradiare finché si trova in stati meccanici, cioè che assorbimento ed emissione di radiazione sono sempre collegate a "transizioni" non meccaniche. Ma non solo gli atti di emissione e di assorbimento devono essere non meccanici; anche lungo il suo intero cammino la luce causerà continuamente negli atomi del mezzo interposto perturbazioni non meccaniche. Per fornire una misura invariante alla grandezza di queste perturbazioni, cioè alle deviazioni dalla meccanica hamiltoniana dei moti interni all'atomo, si descrivano i moti di tutti i sistemi atomici che risultano coinvolti dal processo di propagazione della luce mediante un sistema di coordinate canoniche d'impulso e di posizione α_k, β_k, nel caso più semplice uno tale che i suoi impulsi α_k siano costanti negli stati meccanici (α_k =costanti di integrazione della equazione differenziale alle derivate parziali hamiltoniana del sistema totale). La misura desiderata per le deviazioni dalla meccanica è allora l'integrale $\int \Sigma_k \beta_k d\alpha_k$, che va esteso su tutti i processi non meccanici, cioè su tutte le variazioni di α_k. Affermiamo che la fase φ, a meno di un fattore dimensionale universale h, il quanto d'azione di Planck, è identica a quell'integrale:

$$\varphi = \frac{1}{h}\int \sum \beta_k d\alpha_k. \tag{2}$$

È noto che secondo Jacobi si può introdurre come una delle coordinate dell'impulso (α_1) l'energia W; detto più precisamente, l'energia totale di tutti i sistemi

[1]Zur Quantenoptik, Zeitschr. f. Phys. **22**, 193-199 (1924).

atomici partecipanti, poiché noi li consideriamo tra loro accoppiati in linea di principio. Poiché la coordinata di posizione β_1 coniugata a W è il tempo, risulta in luogo della (2):

$$\varphi = \frac{1}{h}\left[\int t dW + \sum_2 \int \beta_k d\alpha_k\right]. \tag{3}$$

Trattiamo ora anzitutto i sistemi E ed A da soli, cioè consideriamo il caso della propagazione della luce nel vuoto. Si assumerà provvisoriamente che sia l'atto di emissione che quello di assorbimento avvengano istantaneamente. Al tempo t_E ha luogo l'emissione, cioè una diminuzione di energia (in E) di un certo ammontare $-\Delta W$; al tempo t_A il sistema deve, in conformità al principio dell'energia, ritornare alla sua energia originaria con la riassunzione dell'ammontare d'energia $+\Delta W$ (in A). La (3) dà quindi:

$$\varphi = \frac{1}{h}\left[\Delta W\,(t_A - t_E) + \sum_2 \int \beta_k d\alpha_k\right]. \tag{4}$$

Ma $t_A - t_E$ è uguale alla lunghezza del cammino della luce l divisa per la velocità della luce c (nel vuoto). Di conseguenza:

$$\varphi = \frac{\Delta W}{hc}\cdot l + \frac{1}{h}\sum_2 \int \beta_k d\alpha_k = \frac{l}{\lambda_0} + \cdots, \tag{5}$$

dove

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\Delta W} = \frac{c}{\nu} \tag{6}$$

indica la lunghezza d'onda nel vuoto corrispondente al principio $h\nu$ di Bohr.

L'ipotesi dell'istantaneità dell'emissione e dell' assorbimento è inessenziale; basta evidentemente assumere che ogni elemento infinitesimo d'energia dW impieghi il tempo l/c ad andare da E ad A; allora la (5) segue dalla (3). La sola proprietà qui essenziale dei "quanti di luce" è quindi la loro velocità di propagazione c.

Se si prescinde dai contributi dei gradi di libertà $k = 2, 3, \cdots$, dei quali ci occuperemo più in particolare nel §3, la (5) coincide con la (1) per $n = 1$. Se identifichiamo la (1) con la (2) anche per mezzi dispersivi arbitrari otteniamo, tenendo conto della (6):

$$n = \frac{c}{\Delta W}\cdot\frac{d}{ds}\sum_1 \int \beta_k d\alpha_k. \tag{7}$$

L'indice di rifrazione misura quindi quantisticamente le deviazioni dalla meccanica per unità di cammino e di energia. La sua dipendenza da ΔW e dal mezzo costituisce l'oggetto di una teoria quantistica della dispersione, che K.F. Herzfeld pubblicherà[2] prossimamente in questo giornale. Il principio di Fermat $\delta \int n ds = 0$

[2] L'autore deve alle discussioni con Herzfeld sulle possibilità di una teoria quantistica dell'interferenza e della dispersione molti suggerimenti per questo lavoro.

possiamo scriverlo $\delta \sum \int \beta_k d\alpha_k = 0$ e dunque affermiamo che lungo i cammini della luce dell'ottica geometrica la deviazione totale dalla meccanica è minima.

§2. La formula dell'interferenza. Sostituendo la fase classica dell'onda con la nostra fase quantistica, risulta ora facile tradurre la formula dell'interferenza della teoria ondulatoria nel linguaggio della statistica dei quanti: se il quanto di luce ha a disposizione diversi cammini s da E ad A, la probabilità che esso giunga ad A lungo uno qualsiasi dei cammini s e che ivi sia assorbito non è uguale alla somma delle probabilità a priori dei singoli cammini della luce s, ma è J volte tanto, dove

$$J = \frac{\mathfrak{F}\widetilde{\mathfrak{F}}}{|\mathfrak{F}_0|^2}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_s \mathfrak{f}_s, \;\; \mathfrak{F} = \sum_s \mathfrak{f}_s \exp(2\pi i \varphi_s). \tag{9}$$

Qui i φ_s indicano le fasi (2) prese sui singoli cammini s, e le $\mathfrak{f}_s$ le ampiezze vettoriali delle onde classiche, sul significato quantistico delle quali ritorniamo nel §3. In coordinate rettangolari x, y, z il fattore J si scrive:

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sx}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} + \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sy}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} \\ & + \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sz}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} \end{aligned} \tag{10}$$

La coincidenza formale del numeratore con il quadrato delle ampiezze delle onde sovrapposte assicura alla prescrizione (8) una validità senza eccezioni per quanto riguarda le descrizione di un qualsiasi fenomeno di interferenza. Rispetto alla teoria delle onde la nostra prescrizione ha tuttavia il vantaggio di garantire fin dall'inizio l'identità delle "lunghezze d' onda" misurate mediante l' interferenza e mediante l' effetto fotoelettrico. Che queste lunghezze d'onda mostrino anche il corretto spostamento Doppler, quando i sistemi E ed A siano in moto, lo ha mostrato Schrödinger[3].

Essenziale per la nostra ipotesi è l'assunzione che il sistema emittente e il sistema assorbente siano in linea di principio accoppiati tra loro, secondo una tesi generale da poco formulata da Smekal[4].

In primo luogo abbiamo dovuto assumere nel §1 un accoppiamento meccanico, per poter porre univocamente in relazione mutua l'evoluzione temporale nei diversi sistemi atomici. Inoltre la formula (8) pone in dipendenza mutua i processi quantistici in sistemi diversi. È particolarmente degno di nota che secondo la nostra concezione la presenza del sistema assorbente A è irrinunciabile per il verificarsi di una qualche interferenza; nel vuoto essa non solo non è accertabile, ma per principio non succede. Un'intensità della luce misurata mediante il numero dei "quanti di luce" per unità di tempo e di superficie non potrebbe mai rivelare interferenze trasversalmente al cammino della luce, come si riconosce facilmente nell'esempio delle onde stazionarie.

[3]Phys. Zeitschr. **23**, 301 (1922).

[4]Wiener Anzeiger 1922, Nr. 10, p. 79.

Secondo la nostra concezione le emissioni di due atomi distinti E, E' sono evidentemente in linea di principio incoerenti, a meno che un qualche cammino della luce che tocchi tutti e tre gli atomi E, E', A non giochi un ruolo particolare[5].

§3. Sulla teoria degli spettri. Tratteremo ora in particolare la dipendenza del fenomeno d' interferenza dal carattere dell'atomo emittente E. Per questo assumeremo in particolare che il sistema E sia condizionatamente periodico, e che quindi l'equazione differenziale alle derivate parziali che gli si riferisce sia separabile. Come coordinate di posizione β_k assumiamo ora in conformità allo scopo le cosidette variabili angolari w_k, che a prescindere della loro linearità nel tempo sono determinate dal fatto che il sistema è periodico in w_k con il periodo 1. Le costanti dell'impulso ad esse coniugate $\alpha_k = I_k$ sono com'è noto identiche agli "integrali di fase" $\left(\oint p_k dq_k\right)$ della teoria dei quanti.

Per decomporre la fase φ anche in queste coordinate secondo l'Eq. (3), facciamo uso della relazione

$$w_k = t \cdot \frac{\partial W}{\partial I_k} + u_k, \tag{11}$$

dove gli u_k indicano quantità di fase indeterminate. Allora l'espressione (2), per quanto riguarda il sistema E, si scrive:

$$\varphi = \frac{1}{h} \int \sum w_k dI_k = \frac{1}{h} \left[\int t dW + \sum \int u_k dI_k \right]. \tag{12}$$

Si assumerà ora che le quantità di fase u_k durante le transizioni (cioè quando gli I_k cambiano di ΔI_k) rimangano invariate[6]. Allora la (12) dà

$$\varphi = (1/h) \left[\int t dW + \sum u_k \Delta I_k \right] + \cdots \tag{13}$$

[5]Si può tener conto della lunghezza finita di coerenza dell'emissione di un atomo mediante un postulato aggiuntivo. Le differenze di fase che compaiono nella (8) e nella (9) per ogni coppia di cammini s ed s' si possono scrivere:

$$\varphi_s - \varphi_{s'} = \Delta W/hc \int n ds,$$

dove l'integrale va esteso alla curva scelta $E \to s \to A \to s' \to E$. Esigeremo ora che questa curva sia chiusa non solo spazialmente, ma anche temporalmente, nel senso che il quanto d'energia ΔW anche nei tempi $t_{Es} - t_{Es'}$ ovvero $t_{As} - t_{As'}$ sia presente nel sistema, cioè sia depositato nel sistema E ovvero A. Per questo è necessario che

$$|t_{Es} - t_{Es'}| < \tau_E, \; |t_{As} - t_{As'}| < \tau_A,$$

quando τ_E ovvero τ_A significano il tempo di permanenza del quanto ΔW nell'atomo E ovvero A. In generale $\Delta W/h$ non sarà nessuna frequenza propria del sistema A, τ_A sarà quindi praticamente nullo. I tempi di assorbimento t_A da sostituire nella (4) devono quindi praticamente coincidere, il che corrisponde alla circostanza, che nella teoria ondulatoria interferiscono i treni d' onda che arrivano simultaneamente in A. D'altra parte interferiscono solo quei raggi s, s' i cui tempi d'emissione t_E differiscono per meno di τ_E. La durata media dello stato iniziale di E gioca quindi il ruolo di una durata di coerenza. Di fatto l'equazione: Lunghezza di coerenza=durata $\times$ velocità della luce si accorda bene con i dati noti: 10^2cm= 10^{-8}sec $\cdot 10^{10}$cm/sec.

[6]Richiediamo quindi che, nel sistema di coordinate angolare, dei due sistemi di equazioni hamiltoniane

$$I_k = \text{cost.}, \; u_k = \text{cost.},$$

il secondo risulti valido anche durante le transizioni non meccaniche. Dobbiamo espressamente

Per valori assegnati di ΔI_k la transizione può pur sempre aver luogo con valori diversi di u_k. Di conseguenza dobbiamo generalizzare la nostra ipotesi sulla probabilità (§2) in modo che la probabilità di una transizione per un qualche valore di u_k sia diversa dalla somma delle singole probabilità di nuovo per un fattore J, nel quale ora si deve prendere la media non solo sui cammini della luce s, ma anche sulle quantità di fase u_k. Per i coefficienti vettoriali $\mathfrak{f}_s$ [nella (9)] possiamo scrivere in generale:

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{E}_s(u_k) du_1 du_2 \dots \tag{14}$$

Al posto della (9) risulta quindi:

$$\begin{gathered} \mathfrak{F}_0 = \sum_s \int \cdots \int du_1 du_2 \dots \mathfrak{E}_s\,(u_k)\,, \\ \mathfrak{F} = \sum_s \int \cdots \int du_1 du_2 \dots \mathfrak{E}_s\,(u_k) \exp\left[2\pi i \left(\Sigma u_k \Delta I_k / h + \int t dW/h + \cdots\right)\right] \end{gathered} . \tag{15}$$

Ma il sistema intero E è per ipotesi periodico con periodo 1 nei w_k e quindi per la (11) anche negli u_k. La funzione $\mathfrak{E}_s\,(u_k)$ si deve poter quindi sviluppare in serie di Fourier nel modo seguente:

$$\mathfrak{E}_s\,(u_k) = \sum_{n_k} \mathfrak{D}^{(s)}_{n_k} \exp\left[-2\pi i \Sigma n_k u_k\right] \tag{16}$$

(n_k intero). Si sostituisca la (16) nella (15) e si integri su tutti gli u_k da $-\infty$ a $+\infty$; sotto l'ipotesi

$$\sum_s \mathfrak{D}^{(s)}_0 \neq 0$$

l'espressione (8) della probabilità sarà nulla, a meno che tutti i ΔI_k non siano multipli interi di h. La nostra formula risulta quindi in accordo con la nota condizione quantica dei sistemi separabili, che l'impulso I_k salti solo di multipli interi di h:

$$\Delta I_k = n_k \cdot h. \tag{17}$$

Un atomo "quantizzato" una volta passerà dunque sempre ad un ulteriore stato quantizzato.

Sostituendo la (17) nella (15) ovvero nella (8), otteniamo una misura della probabilità di transizione tra stati quantizzati, cioè per l' intensità della riga spettrale corrispondente. Perchè in virtù delle (16) e (17) l'intero integrando della (15) è periodico in u_k, basta estendere l'integrazione sul cubo elementare $0 \leq u_k \leq 1$; si ottiene allora:

$$\mathfrak{F} = \sum_s \mathfrak{D}^{(s)}_{n_k} \exp\left[2\pi i \int t dW/h + \cdots\right] = \sum_s \mathfrak{D}^{(s)}_{n_k} \exp\left[2\pi i \int \frac{ds}{\lambda}\right]. \tag{18}$$

---

limitare questa condizione alle transizioni spontanee; se la estendessimo per esempio anche ai processi che la luce genera negli atomi di un mezzo rifrangente (§1), l'indice di rifrazione (7) risulterebbe sempre uguale a 1. In contrapposizione a quelli spontanei si possono considerare i processi adiabatici, nei quali gli I_k sono mediamente costanti su tempi lunghi, ma gli u_k sono in generale variabili (nota aggiunta durante la correzione).

Il coefficiente $\mathfrak{D}^{(s)}$ che interviene qui è l'ampiezza di una data oscillazione armonica nella (16), cioè quella di ordine $n_k = \Delta I_k/h$. La formula (18) è quindi identica al principio di corrispondenza di Bohr per l' intensità e per la polarizzazione, quando si identifichi il vettore $\mathfrak{E}_s$ nella (14) e nella (16) con il vettore della luce della teoria ondulatoria, che è irraggiato dal sistema E nella posizione $w_k = u_k$ sul cammino s verso A. Secondo Bohr resta indeterminato se la radiazione classica (16) si debba calcolare per lo stato iniziale, per lo stato finale o per uno stato intermedio. Se l'ampiezza $\mathfrak{D}$ dell'oscillazione armonica considerata è uguale a zero per tutti gli stati intermedi, il principio di corrispondenza si rafforza in una regola di selezione.

Ora l'espressione (18) coincide interamente dal punto di vista formale con il vettore della luce periodico classico; soltanto, la frequenza meccanica è sostituita dalla frequenza quantistica $\Delta W/h$, quella che risulta dall'integrazione su u_k, e questa viene introdotta tramite la legge di probabilità. Nella formula d'interferenza (10) si possono sostituire direttamente i vettori $\mathfrak{f}_s$ con le ampiezze classiche della luce $\mathfrak{D}^{(s)}_{n_k}$. Ciò offre la possibilità di introdurre le condizioni al contorno classiche per $\mathfrak{D}^{(s)}$ sulle superfici di separazione di mezzi diversi (superfici di discontinuità di n) secondo il principio di corrispondenza; allora evidentemente valgono le leggi della rifrazione, della riflessione, della doppia rifrazione (polarizzazione) proprio come nella teoria ondulatoria. Di fatto il principio di Huygens si fonda proprio sull'interferenza.

L'estensione delle presenti considerazioni ad un sistema E non periodico si scontra per ora con la difficoltà, che in questo non si può definire facilmente un sistema privilegiato di coordinate di posizione analogo alle variabili angolari. Si avrebbe bisogno soltanto di fissare univocamente un sistema di coordinate normali, le cui costanti di fase u_k (vedi sopra) durante la transizione restassero costanti. L'autore ha pensato di discutere prossimamente questo problema in un altro lavoro nell'esempio di uno spettro Röntgen continuo.

Mentre nella teoria quantistica considerata finora si fa uso del quanto d'azione di Planck h in due punti essenzialmente distinti, cioè nel principio $h\nu$ e nelle condizioni quantiche, qui è stato introdotto solo una volta, cioè nell'espressione (2) per la fase φ. Abbiamo ottenuto qui il principio $h\nu$, le condizioni quantiche ed il principio di corrispondenza dalla sola espressione (2) assieme alle leggi di probabilità (8, 15); il principio $h\nu$ senza ipotesi restrittive, le condizioni quantiche e il principio di corrispondenza con l'assegnazione del sistema di coordinate angolari.

München, Institut für theoretische Physik, gennaio 1924.