

La regola dei quanti di Sommerfeld ed Epstein¹

di A. Einstein

(comunicata nella seduta dell'11 maggio)

§ 1. Formulazione precedente. Non sussiste più alcun dubbio che per sistemi meccanici periodici con un grado di libertà la condizione quantica si scriva

$$\int p dq = \int p \frac{dq}{dt} dt = nh \quad (1)$$

(Sommerfeld e Debye). In essa l'integrale va esteso su un intero periodo del moto; q indica la coordinata, p la corrispondente coordinata d'impulso del sistema. Inoltre i lavori sulla teoria degli spettri di Sommerfeld provano con certezza che in sistemi con più gradi di libertà al posto di questa condizione quantica singola devono comparire più condizioni quantiche, in generale tante (m) quanti sono i gradi di libertà che il sistema possiede. Per Sommerfeld queste m condizioni si scrivono immediatamente

$$\int p_i dq_i = n_i h . \quad (2)$$

Poichè questa formulazione non è indipendente dalla scelta delle coordinate, può essere valida solo per una determinata scelta delle stesse. Solo quando questa scelta è compiuta e le q_i sono funzioni periodiche del tempo il sistema (2) contiene un'asserzione determinata sul moto.

Un ulteriore progresso di principio lo dobbiamo ancora ad Epstein (e Schwarzschild). Il primo fonda la sua regola per la scelta delle coordinate di Sommerfeld q_i sul teorema di Jacobi, che notoriamente si enuncia così: Sia $H (H[q_i, p_i])$ la funzione di Hamilton di q_i, p_i e t , che compare nelle equazioni canoniche

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4)$$

e che - nel caso che non contenga esplicitamente il tempo t - è

¹Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft **19**, 82 (1917).

identica alla funzione dell'energia²; se $J(t, q_1 \dots q_m, \alpha_1 \dots \alpha_m)$ è un integrale completo dell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial J}{\partial q_i}) = 0 \quad , \quad (5)$$

la soluzione delle equazioni canoniche si scrive

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad , \quad (6)$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i \quad . \quad (7)$$

Se H non contiene esplicitamente il tempo, cosa che supponiamo nel seguito, si può soddisfare la (5) con l'ansatz

$$J = J^* - ht \quad , \quad (8)$$

dove h indica una costante e J^* non dipende più esplicitamente dal tempo. Al posto delle (5), (6) e (7) appaiono allora le equazioni

$$H(q_i, \frac{\partial J^*}{\partial q_i}) = h \quad (5a)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad , \quad \frac{\partial J^*}{\partial h} = t - t_0 \quad , \quad (6a)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial q_i} = p_i \quad , \quad (7a)$$

dove però la prima delle (6a) rappresenta solo $m-1$ equazioni; inoltre al posto di α_m è comparsa la costante h , al posto di β_m la costante $-t_0$.

Per Epstein si devono ora scegliere le coordinate q_i in modo tale che esista un integrale completo della (5a) della forma

$$J^* = \sum_i J_i(q_i) \quad , \quad (8a)$$

dove J_i dipende da q_i , ma è indipendente dalle restanti q . Le condizioni quantiche di Sommerfeld (2) devono allora valere per queste coordinate q_i , nel caso che le q_i siano funzioni periodiche di t . Accanto al grande successo che ha riportato l'estensione di Sommerfeld-Epstein della regola quantica a sistemi con più gradi

2

Infatti in questo caso si ha $\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0$.

di libertà, rimane tuttavia insoddisfacente che si sia vincolati ad una separazione delle variabili secondo la (8), che di per sé non ha proprio niente a che fare con il problema quantistico. Nel seguito si proporrà una piccola modifica della condizione di Sommerfeld-Epstein che evita questo inconveniente. Esporrò qui in breve l'idea fondamentale e la svilupperò poi nel seguito.

§ 2. *Formulazione modificata.* Mentre pdq in sistemi con un grado di libertà è un invariante, ossia è indipendente dalla scelta della coordinata q , i singoli prodotti $p_i dq_i$ in un sistema con più gradi di libertà non sono invarianti; perciò la condizione quantica (2) non assume alcun significato invariante. Invariante è solo la somma estesa a tutti gli m gradi di libertà $\sum_i p_i dq_i$. Per derivare da questa somma una molteplicità di condizioni quantiche invarianti si può procedere nel modo seguente. Si considerino le p_i come funzioni delle q_i . Con linguaggio geometrico, si possono trattare le p_i come un vettore (di carattere "covariante") nello spazio m -dimensionale delle q_i . Traccio nello spazio delle q_i una curva chiusa qualsiasi, che non ha affatto bisogno d'essere una "traiettoria" del sistema meccanico; allora l'integrale di linea esteso alla stessa

$$\int \sum_i p_i dq_i \quad (9)$$

è un invariante. Se le p_i sono funzioni qualsiasi delle q_i , ad ogni curva chiusa corrisponde in generale un valore diverso dell'integrale (9). Ma se il vettore p_i è derivabile da un potenziale J^* , cioè se valgono le relazioni

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \quad (10)$$

ovvero

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}, \quad (10a)$$

l'integrale (9) ha lo stesso valore per tutte le curve chiuse che si possono trasportare l'una sull'altra con continuità. Per tutte le curve che si possono ridurre ad un punto con una variazione continua l'integrale (9) allora si annulla. Ma se lo spazio delle q_i preso in considerazione è a connessione multipla esistono

cammini chiusi che non si possono ridurre ad un punto con una variazione continua; allora J^* non è una funzione delle q_i ad un sol valore (ma ad ∞ valori) e l'integrale (9) per una curva siffatta sarà in generale diverso da zero. Vi sarà però nello spazio delle q un numero finito di linee chiuse, alle quali si possono ridurre mediante variazioni continue tutte le linee chiuse. In questo senso si può prescrivere un numero finito di condizioni

$$\int \sum_i p_i dq_i = n_i h \quad (11)$$

come condizioni quantiche. Secondo me queste devono comparire al posto delle condizioni quantiche (2). Abbiamo da aspettarci che il numero delle equazioni (10) che non si riconducono l'una all'altra sia uguale al numero dei gradi di libertà del sistema. Se è più piccolo, siamo davanti a un caso di "degenerazione".

L'idea fondamentale prima delineata (in modo volutamente sommario) sarà esposta in seguito in modo più approfondito.

§ 3. *Derivazione intuitiva dell'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi.* Sia dato un punto P dello spazio delle coordinate con le coordinate Q_i , e sia data la velocità corrispondente, cioè anche le coordinate d'impulso corrispondenti P_i ; allora mediante le equazioni canoniche (3) e (4) il moto è completamente determinato³. Ad ogni punto della traiettoria L corrisponde una certa velocità, cioè lungo L le p_i sono date in funzione delle q_i . Se si pensa che in ogni punto P su una "superficie" ad $m-1$ dimensioni dello spazio delle coordinate siano date le Q_i e le P_i che gli corrispondono, ad ognuno dei punti compete un moto con una traiettoria L nello spazio delle coordinate. Se le P_i sulla superficie sono funzioni continue delle Q_i , queste traiettorie riempiranno con continuità lo spazio delle coordinate (o una parte dello stesso). Si condurrà per ogni punto (q_i) dello spazio delle coordinate una data traiettoria; a questo punto verranno quindi associate anche coordinate d'impulso p_i determinate. Così nello spazio delle coordinate delle q_i viene dato un campo vettoriale delle p_i . Ci proponiamo lo scopo di determinare la legge di questo

³Si assuma che H non dipenda esplicitamente dal tempo t .

campo vettoriale.

Nel sistema d'equazioni canoniche (3) consideriamo le p_i come funzioni delle q_i ; allora dobbiamo sostituire i primi membri con

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}$$

al posto delle quali secondo la (4) si può porre anche

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} .$$

Otteniamo quindi in luogo della (3)

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 . \quad (12)$$

Questo è un sistema di m equazioni differenziali lineari che devono soddisfare le p_k in funzione delle q_k .

Ci chiediamo ora se esista un campo vettoriale tale che per esso esista un potenziale J^* , cioè per il quale siano soddisfatte le condizioni (10) e (10a). In questo caso per la (10) la (12) assume la forma

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 .$$

Quest'equazione afferma che H è indipendente dalle q_i . Esistono quindi campi di potenziale del tipo cercato, e il cui potenziale J^* soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi (5a), e rispettivamente J l'equazione (5).

È così dimostrato che le equazioni (3) possono essere sostituite dalle (7a) e (5a) ovvero (7) e (5). Mostreremo inoltre che mediante le (6a) ovvero le (6) il sistema d'equazioni (4) può essere soddisfatto, anche se ciò è irrilevante per l'argomento successivo. Se mediante integrazione delle (5a) si sono espresse grazie alle (7a) le p_i in funzione delle q_i , le equazioni (4) costituiscono un sistema di equazioni differenziali totali per la determinazione delle q_i in funzione del tempo. Secondo la teoria delle equazioni differenziali del prim'ordine questo sistema di equazioni differenziali totali è equivalente all'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 . \quad (13)$$

Ma quest'ultima sarà soddisfatta da

$$\varphi = \frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$$

nel caso che J sia un integrale completo della (5). Se si pone infatti questo valore di φ al primo membro della (13) si ottiene, tenendo conto della (7)

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial q_k} \right)} - \frac{\partial^2 J}{\partial q_k \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ H \left(q_k, \frac{\partial J}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\},$$

quantità che secondo le (5) si annullano. Da qui segue che le equazioni (4) vengono integrate mediante le (6) ovvero (6a).

§ 4. *Il campo p_i di una traiettoria singola.* Veniamo ora ad un punto assai importante, sul quale ho volutamente taciuto nello schizzo provvisorio dell'idea fondamentale nel § 2. Secondo le considerazioni del § 3 abbiamo pensato il campo p_i generato da moti tra loro indipendenti, di molteplicità ω^{m-1} , che sarebbero rappresentati nello spazio q_i mediante altrettante traiettorie. Ma pensiamo ora d'aver seguito per un tempo infinitamente lungo il moto imperturbato di un sistema singolo e di aver tracciato la corrispondente traiettoria nello spazio delle q_i . Possono verificarsi in proposito due casi:

1. Esiste una parte dello spazio q_i tale che la traiettoria col passar del tempo si avvicini arbitrariamente a ogni punto di questa parte dello spazio (m -dimensionale).

2. La traiettoria si può collocare interamente in un continuo con meno di m dimensioni. A questo appartiene come caso particolare il moto su un cammino esattamente chiuso.

Il caso 1 è il più generale; i casi 2 risultano dal caso 1 per specializzazione. Come esempio di 1 pensiamo al moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale, descritto mediante due coordinate, che fissano la posizione del punto nel piano della traiettoria (per esempio le coordinate polari r e φ). Il caso 2 si verifica per esempio quando la legge d'attrazione è

esattamente proporzionale a $1/r^2$, e quando le deviazioni dal moto di Keplero richieste dalla teoria della relatività siano trascurabili; il cammino è allora chiuso, i suoi punti costituiscono un continuo con solo una dimensione. Considerato nello spazio tridimensionale il moto centrale è sempre un moto di tipo 2, poichè la traiettoria può essere collocata interamente in un continuo a due dimensioni; nella trattazione tridimensionale il moto centrale si deve vedere come caso particolare di un moto che è definito mediante una legge di forza complicata (per esempio il moto studiato da Epstein nella teoria dell'effetto Stark).

La trattazione seguente si riferisce al caso generale 1. Si consideri un elemento $d\tau$ dello spazio q_i . La traiettoria del processo di moto in questione l'attraversa infinite volte. Ad ogni attraversamento siffatto corrisponde un sistema (p_i) di coordinate d'impulso. Sono possibili a priori due tipi di cammino, che evidentemente differiscono in modo fondamentale. Tipo a): i sistemi p_i si ripetono, sicchè a $d\tau$ appartiene solo un numero finito di sistemi p_i . Allora per il processo di moto in esame le p_i si possono rappresentare come funzioni delle q_i a uno o a più valori.

Tipo b): nella posizione considerata si hanno infiniti sistemi p_i . In questo caso non si possono rappresentare le p_i come funzioni delle q_i .

Si osserva immediatamente che il tipo b) esclude la condizione quantica (11) formulata nel § 2. D'altra parte la meccanica statistica classica si riferisce essenzialmente solo al tipo b); infatti solo in questo caso l'insieme microcanonico è equivalente all'insieme temporale che si riferisce ad un sistema⁴.

Riassumendo possiamo dire: l'uso della condizione quantica (11) richiede che esistano cammini tali che il cammino singolo determini un campo p_i per il quale esista un potenziale J^* .

§ 5. Lo "spazio delle coordinate razionale". È già stato osservato che le p_i sono in generale funzioni a più valori delle

⁴Nell'insieme microcanonico sono presenti sistemi che per q_i dati posseggono p_i dati in modo arbitrario (compatibilmente col valore dell'energia).

q_1 . Consideriamo di nuovo come esempio semplice il moto orbitale piano di un punto sotto l'azione attrattiva di un centro fisso. Il punto si muove in modo tale che la sua distanza r dal centro d'attrazione oscilli periodicamente tra un valore minimo r_1 ed un valore massimo r_2 . Se si considera un punto dello spazio delle q_1 , cioè un punto della superficie anulare limitata dai raggi r_1 e r_2 , col passar del tempo l'orbita verrà arbitrariamente vicino ad esso infinite volte, ovvero - esprimendosi in modo un po' inesatto - vi passerà. Ma a seconda che il passaggio avvenga su una parte dell'orbita con r crescenti oppure su una parte con r decrescenti la componente radiale della velocità ha segni diversi; le p_v sono funzioni a due valori delle q_1 .

La scomodità nella rappresentazione a ciò legata si evita nel modo migliore col noto metodo introdotto da Riemann nella teoria delle funzioni. Pensiamo la superficie dell'anello circolare sdoppiata, di modo che si sovrappongano due facce congruenti, a forma d'anello circolare. Pensiamo disegnate sull'anello superiore le parti dell'orbita con dr/dt positivo, su quello inferiore quelle con dr/dt negativo, assieme al sistema di vettori delle p_v corrispondente. Immaginiamoci le due facce unite tra loro lungo le due linee circolari, di modo che l'orbita deve sempre passare da una faccia all'altra quando tocca uno dei due cerchi limite. Lungo questi cerchi le p_v delle due facce coincidono, come si vede facilmente. Intese su questa superficie doppia le p_v sono funzioni delle q_1 , non solo continue, ma anche ad un sol valore; qui sta la loro importanza.

Su questa superficie doppia esistono evidentemente due tipi di curve chiuse, che per variazione continua o si riducono ad un punto, o si riportano l'una sull'altra. La sottostante Fig. 1 mostra un esempio per ciascuno dei due tipi di queste (L_1 ed L_2); le parti di una linea che stanno sulla faccia inferiore sono tratteggiate. Tutte le altre curve chiuse si possono, mediante variazione continua sulla superficie doppia, o ridurre ad un punto, o riportare in uno o più giri del tipo L_1 ed L_2 . La regola quantica (11) dovrebbe applicarsi qui ai due tipi di linee L_1 ed L_2 .

È chiaro che queste considerazioni si generalizzano a tutti i moti che soddisfano la condizione del § 4. Si deve sempre pensare lo spazio delle fasi suddiviso in un certo numero di "ali" che si

raccordano lungo "superfici" ad $m-1$ dimensioni in modo che, intese su figure così costituite, le p_i siano funzioni a un sol valore e continue (anche al passaggio da un'ala all'altra); indicheremo questa costruzione geometrica ausiliaria come "spazio delle fasi razionale". La regola quantica (11) si deve riferire a tutte le linee che siano chiuse nello spazio delle coordinate razionale.

Perchè in questa interpretazione le regole quantiche assumano un significato esatto l'integrale $\int \sum p_i dq_i$, esteso a tutte le curve chiuse dello spazio delle q_i razionale che possono essere portate l'una sull'altra con continuità, deve avere lo stesso valore. La dimostrazione si dà interamente nel modo consueto. Siano (vedi lo schema della Fig. 2) L_1 ed L_2 delle curve chiuse nello spazio razionale delle q_i che possono esser portate a coincidere con continuità rispettando il senso di circolazione segnato. Allora il tracciato dato nella figura è una curva chiusa che può essere ridotta ad un punto con continuità. Da qui segue secondo la (10) che l'integrale esteso al tracciato è nullo. Si consideri inoltre che gli integrali estesi alle linee di raccordo $\overline{A_1 A_2}$ e $\overline{B_1 B_2}$ infinitamente vicine sono tra loro uguali perchè le p_i nello spazio delle q_i razionale sono ad un sol valore; ne risulta l'uguaglianza degli integrali estesi ad L_1 ed L_2 .

Il potenziale J^* è ad infiniti valori anche nello spazio delle q_i razionale; ma secondo le regole quantiche questa molteplicità è la più semplice immaginabile. Se infatti J^* è il valore del potenziale che corrisponde ad un punto dello spazio delle q_i razionale, altrettanto lo sono gli altri valori $J^* + nh$, dove n è un numero intero.

Aggiunta alla correzione. Ulteriori riflessioni hanno mostrato che la seconda delle condizioni date nel § 4 per l'applicabilità della formula (11) dev'essere sempre soddisfatta automaticamente, cioè vale la legge: se un moto produce un campo p_i , questo possiede necessariamente un potenziale J^* .

Per la legge di Jacobi ogni moto di un sistema può essere derivato da un integrale completo J^* della (5a). Esiste quindi in ogni caso almeno una funzione J^* delle q_i dalla quale si possono calcolare in base alle equazioni

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}$$

le coordinate dell'impulso p_i del moto di un sistema preso in considerazione per ogni punto della sua traiettoria.

Dobbiamo ricordarci ora che J^* si ottiene per mezzo di un'equazione differenziale alle derivate parziali, cioè secondo una prescrizione su come si deve continuare la funzione J^* nello spazio delle q_i . Se vogliamo quindi sapere come J^* varia per un sistema nel corso del moto di questo, dobbiamo pensare di continuare J^* lungo la traiettoria (compreso il suo intorno) secondo l'equazione differenziale. Se ora il cammino ad un certo tempo (assai grande) ritorna con grande approssimazione ad un punto P dal quale la traiettoria era già passata in precedenza, $\partial J^*/\partial q_i$ ci dà le coordinate d'impulso per entrambi i tempi, se abbiamo continuato ad integrare J^* lungo l'intero tratto intermedio della traiettoria. Che con questa continuazione si ritorni ai valori precedenti di $\partial J^*/\partial q_i$ non c'è da aspettarselo affatto; c'è piuttosto da aspettarsi in generale che, tutte le volte che nel corso del moto si raggiunga di nuovo approssimativamente la configurazione considerata delle coordinate q_i , appaia un sistema delle p_i totalmente diverso, di modo che per un moto proseguito all'infinito sia in generale impossibile rappresentare le p_i in funzione delle q_i . Ma quando le p_i - rispettivamente un numero finito di sistemi di valori di queste grandezze - si ripetono al ripetersi della configurazione delle coordinate, le $\partial J^*/\partial q_i$ sono rappresentabili come funzioni delle q_i per il moto proseguito all'infinito. Se quindi esiste per il moto proseguito all'infinito un campo p_i , esiste anche sempre un potenziale corrispondente J^* .

Perciò possiamo affermare quanto segue: se esistono m integrali delle $2m$ equazioni del moto della forma

$$R_k(q_i, p_i) = \text{cost.} , \quad (14)$$

dove le R_k sono funzioni algebriche delle p_i , allora $\sum p_i dq_i$ è sempre un differenziale esatto, se si pensano le p_i espresse mediante le q_i grazie alla (14). La condizione quantica afferma che l'integrale $\int \sum_i p_i dq_i$ esteso ad una curva irriducibile deve essere un multiplo di h . Questa condizione quantica coincide con quella di Sommerfeld-Epstein se in particolare ogni p_i dipende solo dalla q_i corrispondente.

Se esistono meno di m integrali del tipo (14), come per esempio succede secondo Poincaré nel problema dei tre corpi, le p_i

non sono esprimibili mediante le q_i , e la condizione quantica di Sommerfeld-Epstein fallisce anche nella forma più estesa qui data.