Sulla teoria della propagazione della luce nei mezzi dispersivi[1]

A. Einstein

In una Nota apparsa recentemente in questi Rendiconti ho proposto un esperimento ottico, per il quale secondo il mio ragionamento la teoria ondulatoria dà risultato diverso rispetto alla teoria dei quanti. Il ragionamento è il seguente. Una particella di raggi canale che si muova nel piano focale di una lente produce luce con superfici di ugual fase eccentriche, che per la rifrazione della lente si convertono in piani non paralleli (sistema di piani disposto "a ventaglio"). In una tale luce la frequenza, quindi anche la velocità di propagazione è una funzione del punto. Se si fa passare una tale onda in un mezzo disperdente, in esso la velocità di propagazione delle superfici d’egual fase è una funzione del punto; le superfici di egual fase subiscono così nel corso della loro propagazione in un mezzo dispersivo una rotazione, che dev’essere rivelabile otticamente come una deviazione della luce.

Poichè Ehrenfest e Laue dubitano della forza probante di questo ragionamento, ho esaminato più accuratamente secondo la teoria delle onde la propagazione della luce in mezzi dispersivi e ho di fatto trovato che un tale ragionamento non porta ad un risultato corretto. Il punto è, come anche Ehrenfest ha correttamente osservato, che seguendo un fronte d’onda in un mezzo dispersivo si può arrivare in posti che stanno al di fuori del gruppo d’onda considerato; il fronte d’onda è allora davvero ruotato, ma non esiste più fisicamente; al suo posto se ne ha in un altro luogo uno nuovo con orientazione diversa.

Il nostro scopo è di trovare una rappresentazione matematica esatta dal punto di vista della teoria ondulatoria per la situazione che si verifica in un mezzo dispersivo. Per far questo possiamo fin dall’inizio limitarci a trattare il caso bidimensionale, cioè quello per il quale le componenti del campo

[1] S.B. Preuss. Akad. Wiss. **3**, 18 (1922).

sono indipendenti dalla coordinata z. Troviamo così che i mezzi dispersivi, relativamente al puro caso ideale, si comportano esattamente come quelli non dispersivi. Sia ϕ una funzione che soddisfi l'equazione delle onde, per esempio la componente z dell'intensità del campo elettrico, sia quindi

$$\phi=(A/r^{1/2})e^{j[\omega(t-r/V)+\alpha]} \tag{1}$$

una soluzione dell'equazione delle onde per tutti gli r, che siano grandi rispetto alla lunghezza d'onda $2\pi V/\omega=\lambda$; ϕ indica l'ampiezza al tempo t in un punto (x,y) la cui distanza da un punto fisso (ξ,η) sia uguale a r. A,ω,V e α sono costanti reali; ω e V sono legate da una relazione che rispecchia le caratteristiche ottiche del mezzo. Ogni termine del tipo (1) aggiunto alla soluzione dà luogo, per la linearità delle equazioni differenziali, ancora ad una soluzione.

Pensiamo ora di considerare uno sviluppo continuo, che fornisca onde del tipo (1), distribuite con continuità lungo una prefissata curva nel piano x-y. I punti fissi (ξ,η) sono da trattarsi come dati in funzione della lunghezza s dell'arco misurato lungo la curva. A sufficiente distanza dalla curva, l'integrale esteso alla curva

$$\phi=\int Ar^{-1/2}e^{jH}ds, \qquad H=\omega(t-r/V)+\alpha, \tag{2}$$

è sempre una soluzione delle equazioni. A,ω,α e V sono da considerarsi come lentamente variabili lungo la curva, di modo che le loro variazioni siano infinitamente piccole per un avanzamento lungo la curva di λ. La lunghezza d'onda dev'essere assai piccola rispetto alla lunghezza della curva e questa dev'essere inoltre piccola rispetto alla distanza r del punto d'osservazione rispetto ai punti della curva. Il calcolo degll'integrale (2) produce una teoria della propagazione della luce che include i fenomeni della diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel nel caso cilindrico qui trattato, quando si ponga ω costante. Nel caso che ω dipenda da s si ottengono soluzioni non stazionarie, cioè tali che per esse l'intensità della radiazione dipenda dal tempo.

Non ci interessa qui il problema della diffrazione, ma solo il problema ottico trascurando la diffrazione. Chiediamo: quali punti sono al tempo t illuminati e quali no, e inoltre trascurando il fenomeno della diffrazione. A questa domanda è facile rispondere con soluzioni della forma (2). H dipende dalla scelta del punto d'osservazione e del punto sulla curva, e varia in generale rapidamente, quando il punto sulla curva la percorre; perciò e^{jH} è una funzione rapidamente oscillante. Possono quindi contribuire sostanzialmente all'integrale solo quelle parti della curva per le quali $\partial H/\partial s$ si annulla. Se ne esistono rispetto al punto e al tempo d'osservazione considerati, allora c'è "luce", altrimenti c'è "buio".

Scegliamo ora come curva il tratto dell'asse x tra $\xi=-b$ e $\xi=+b$ e consideriamo la soluzione solo per punti d'osservazione con y positivo. Ci interessiamo solo dell'asse del fascio di raggi, e lo assumiamo infinitamente sottile, di modo che è evidentemente sufficiente fornire la condizione di illuminazione per il punto di mezzo $\xi=0$. Otteniamo quindi per l'intensità della radiazione la condizione

$$(\partial H/\partial \xi)_{\xi=0}=0\ . \qquad (3)$$

Sotto le condizioni geometriche considerate la normale d'onda ha evidentemente la direzione del raggio vettore spiccato dall'origine delle coordinate al punto d'osservazione.

Il caso che ci interessa è un fascetto in un mezzo dispersivo, che muta la sua direzione di radiazione con velocità angolare costante. Ci approssimiamo gradualmente a questo caso trattando un caso più semplice.

I. Treno d'onde di direzione costante. Specializziamo la (2) con le condizioni

$$\partial\omega/\partial\xi=0, \quad \partial\alpha/\partial\xi=0.$$

Poniamo inoltre che qui come nel seguito sia sufficiente

$$r=r_o-x\xi/r_o, \qquad (4)$$

dove si è posto $r_o=(x^2+y^2)^{1/2}$. La condizione (3) dà

$$x=0.$$

La propagazione della luce avviene lungo l'asse y.

II. Treno d'onde di direzione variabile in un mezzo non dispersivo. Poniamo

$$\partial\omega/\partial\xi=\gamma, \quad \partial\alpha/\partial\xi=0.$$

Allora

$$H=(\omega_o+\gamma\xi)(t-r_o/V+x\xi/Vr_o)+\alpha.$$

La velocità V in questo caso è indipendente dalla frequenza $\omega/2\pi$. L'equazione (3) dà

$$\gamma(t-r_o/V)+\omega_o x/Vr_o=0. \qquad (5)$$

Che si tratti veramente di un raggio di direzione variabile, lo si riconosce come segue. La luce, che al tempo t illumina il punto d'osservazione, passa dall'origine delle coordinate al tempo $t'=t-r_o/V$. I punti di osservazione illuminati stanno sulla direzione

$$x/r_o=-\gamma Vt'/\omega_o.$$

Questa direzione quindi cambia con il tempo t'. La luce passante a un dato tempo t' dall'origine delle coordinate si propaga rettilineamente.

III. Treno d'onde di direzione variabile in un mezzo dispersivo. Poniamo ancora

$$\partial\omega/\partial\xi=\gamma, \quad \partial\alpha/\partial\xi=0.$$

Si considera ora tuttavia che V dipenda da ω. Poniamo n=c/V, quindi

$$n=n_o+(dn/d\omega)d\omega=n_o+(dn/d\omega)\gamma\xi,$$

pertanto

$$1/V=(n_o+(dn/d\omega)\gamma\xi)/c$$

e allora

$$H=(\omega_o+\gamma\xi)[t-(r_o-x\xi/r_o)/c](n_o+(dn/d\omega)\gamma\xi)+\alpha.$$

La condizione (3) dà ora

$$\gamma[t-r_o(n_o+\omega(dn/d\omega))/c]+\omega_o n_o x/cr_o=0. \qquad (6)$$

Ci chiediamo ora: che ne è di un gruppo d'onde, che in un breve intervallo di tempo attorno a $t=0$ passa la superficie $y=0$? Evidentemente un tale gruppo non si propaga con la velocità $V=c/n$, ma con la velocità di gruppo $V_g=c/(n+\omega(dn/d\omega))$. Per il punto d'osservazione illuminato da questo gruppo dev'essere soddisfatta la condizione

$$t-r_o/V_g=t-r_o(n+\omega(dn/d\omega)/c=0.$$

L'equazione (6) dà quindi anche in questo caso

$$x=0\ . \qquad (7)$$

Il gruppo d'onde si propaga quindi rettilineamente lungo l'asse y e la normale d'onda ha la stessa direzione.

Perciò è dimostrato che la luce generata da particelle di raggi canale non subisce deviazione in mezzi dispersivi, in contrasto con il precedente ragionamento elementare. Ciò ha dato anche la ricerca che, secondo l'amichevole comunicazione di E. Warburg, è stata condotta da Geiger e Bothe nell'Istituto Fisico-Tecnico di Stato. Conclusioni più profonde sulla natura del processo elementare di emissione, secondo questi risultati della trattazione teorica, non si possono trarre dall'esperimento.

E' da osservare che una deviazione della luce nei mezzi dispersivi in dipendenza dallo stato di moto della molecola emittente porterebbe ad una contraddizione con il secondo principio della termodinamica, come mi ha fatto osservare Laue. Ma poichè non ci si deve aspettare una tale curvatura anche secondo la teoria ondulatoria, risulterebbe non necessario approfondire questo punto.

E' mio sentito dovere esprimere in questo luogo il mio sincero ringraziamento a Warburg, Geiger e Bothe.