La diffusione di luce da luce nella teoria di Dirac[1]

Hans Euler

(con 3 figure)

Sommario: Introduzione. I parte. §1. Presentazione preliminare di una espressione intuitiva dell'interazione $\bar{U}_1$ della luce con la luce, che porta alla trasformazione di due quanti di luce g_1, g_2 in due altri $-g_3$, $-g_4$:

$$((g_1 g_2|\bar{U}_1|-g_3-g_4)=H^4_{in});$$

§2. Valutazione più accurata dell'interazione $\bar{U}_1$ della luce con la luce dall'invarianza delle rispettive equazioni di Maxwell corrette:

$$(\bar{U}_1=(\hbar c/e^2E_0^2)\int[\alpha(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D}^2)^2+\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2]dV);$$

§3. Discussione delle relazioni di commutazione per le intensità di campo nel sistema di equazioni di Maxwell corrette.

II parte: §4. Schema generale di perturbazione che sarà usato per il calcolo della diffusione di luce da luce; §5. Costruzione della matrice H^4_{in} della teoria di Dirac per la diffusione di luce da luce; §6. Sviluppo in frequenza all'ordine zero di questa matrice H^4_{in} e confronto con il termine di sottrazione di Heisenberg; §7. Dimostrazione dell'identità della matrice H^4_{in} che deriva dalla teoria di Dirac con l'energia di interazione dei quanti di luce $\bar{U}_1$ prima introdotta.

III parte: §8. Calcolo degli elementi di matrice per la diffusione di luce da luce (fino a termini al quart'ordine dello sviluppo rispetto alla frequenza della luce) per due casi particolari nella valutazione dei coefficienti numerici α,β dell'interazione della luce con la luce ($\alpha=-1/(360\pi^2)$, $\beta=-7/(360\pi^2)$); §9. Verifica del metodo; §10. Discussione dei risultati.

[1]Dissertazione della facoltà di filosofia dell'università di Lipsia. Il presente lavoro è lo sviluppo di una nota di Euler e Kockel su "Naturwissenschaften", **23**, 246, 1935. Le parti II e III sono state sviluppate assieme a Kockel, il §5 prevalentemente da Kockel.

Introduzione

Halpern[2] e Debye[3] hanno osservato che nella teoria di Dirac ci si deve aspettare una *diffusione di luce da luce*. Due quanti di luce possono generare una coppia, un positrone ed un elettrone, e questa coppia può subito reirraggiare; due quanti di luce si possono quindi spontaneamente mutare in altri due quanti di luce (con la conservazione dell'energia e dell'impulso totale).

Per questo processo bisogna distinguere due casi:

Le energie cg^1 e cg^2 dei due quanti di luce e l'angolo tra i loro impulsi $\mathfrak{g}^1$ e $\mathfrak{g}^2$ sono così grandi, che la legge dell' energia e dell'impulso consente la generazione di una coppia *reale* ($g^1g^2-(\mathfrak{g}^1\mathfrak{g}^2)>2(mc)^2$). Si ottiene allora la probabilità della diffusione reciproca dei quanti di luce, se si moltiplica la probabilità della generazione di coppie per quella di reirraggiamento e si somma su tutte le possibilità. Questo è stato sviluppato da Breit e Wheeler[4].

L'energia e l'impulso di due quanti di luce *non* raggiungono la generazione di una coppia reale

$$g^1g^2-(\mathfrak{g}^1\mathfrak{g}^2)<2(mc)^2, \qquad (0,1)$$

cioè in un sistema di riferimento opportuno $g^1<mc$, $g^2<mc$. Allora i due quanti di luce g^1, g^2 possono mutarsi in due altri quanti di luce mediante la possibilità *virtuale* di generazione di coppie e anche in questo caso (all'incirca della luce visibile) si deve avere una diffusione di luce da luce. La sua sezione efficace sarà qui calcolata (§10, formule 9 e 10).

I parte

La probabilità della trasformazione di due quanti di luce $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ in due altri $-\mathfrak{g}_3$ e $-\mathfrak{g}_4$ è data dal quadrato di un elemento di matrice H^4_{in} della teoria di Dirac (che, come sarà mostrato più

[2] O. Halpern, Phys. Rev. **44**, 885, 1934.

[3] P. Debye, in una discussione orale con il Prof. Heisenberg.

[4] G. Breit e J. Wheeler, Phys. Rev. **46**, 1087, 1934.

oltre, è del quart'ordine nella carica elettronica).

Il calcolo diretto di questa matrice H^4_{in} della teoria di Dirac (parti II e III), [cioè, degli elementi di matrice per il caso generale di arbitrarie direzioni di diffusione e di polarizzazione] è assai laborioso. Ci si può ridurre tuttavia al problema più facile del calcolo di due elementi di matrice [cioè al calcolo di H^4_{in} per due direzioni *speciali* della diffusione e della polarizzazione] attraverso la seguente trattazione generale (parte I).

§1. Presentazione preliminare di una espressione intuitiva dell'interazione $\bar{U}_1$ della luce con la luce, che porta alla trasformazione di due quanti di luce g_1, g_2 in due altri $-g_3$, $-g_4$.

$$((g_1 g_2|\bar{U}_1|-g_3 -g_4)=H^4_{in}).$$

Quando due onde luminose si diffondono reciprocamente, invece di compenetrarsi indisturbate, si ha uno scostamento dal principio di sovrapposizione. Il principio ottico di sovrapposizione è espresso dalla linearità delle equazioni di Maxwell per il vuoto. La diffusione di luce da luce deve poter essere descritta mediante un'aggiunta non lineare alle equazioni di vuoto di Maxwell, nel caso che una descrizione intuitiva sia possibile. Questa descrizione intuitiva, della cui possibilità ci occuperemo in seguito (§7), è suggerita dalla seguente analogia che esiste nella teoria di Dirac tra quanti di luce ed elettroni:

Due elettroni possono scambiarsi quanti di luce e quindi porsi in interazione reciproca, il che all'incirca si manifesta nella deflessione mutua degli elettroni, e per questa esiste in una certa approssimazione un'espressione intuitiva, la legge di Coulomb.

Parimenti due quanti di luce possono dar luogo virtualmente ad una quantità di coppie e pertanto tra di essi si stabilisce un'interazione, che dà luogo alla diffusione di luce da luce. Anche per questa interazione dei quanti di luce tra loro ci si deve aspettare un'espressione semplice e intuitiva analoga alla legge di Coulomb.

L'interazione coulombiana in un campo materiale, che è descritto dall'operatore densità $\psi^* \psi$, è

$$(1,1) \qquad \bar{U}'=(e^2/2)\int\int[\psi^*(\xi)\psi(\xi)\psi^*(\xi')\psi(\xi')/(\xi-\xi')]dVdV'$$

La probabilità per la diffusione di un elettrone da un altro si ottiene dal quadrato dell'elemento di matrice di (1,1) per una transizione in un campo materiale, che significa la diffusione reciproca di due elettroni.

Per trovare l'interazione dei quanti di luce analoga alla (1,1) si deve cercare una funzione $\bar{U}_1$ dei gradi di libertà del campo di radiazione, quindi delle intensità di campo F_{ik}, il cui elemento di matrice per una transizione nel campo di radiazione, che significa la diffusione reciproca di due quanti di luce, sia uguale all'elemento di matrice H^4_{in}, prima menzionato e da calcolarsi nel seguito, della teoria di Dirac per questo processo.

Su questa interazione $\bar{U}_1$ dei quanti di luce in funzione delle intensità di campo si può dire quanto segue:

Poichè essa deve portare a processi, nei quali due quanti di luce spariscono e due compaiono,si devono includere le intensità di campo o le loro derivate alla quarta potenza:

$$\bar{U}_1=\text{cost}\int[FFFF+\text{cost}'(\partial F/\partial x)(\partial F/\partial x)FF+...]$$

(gli indici dei tensori e dei vettori sono qui e nel seguito tralasciati o rappresentati mediante indici speciali, per rendere esplicito il loro accoppiamento in uno scalare).

Poichè l'interazione $\bar{U}_1$ ha le dimensioni di un'energia ma (come termine del quart'ordine della teoria di Dirac) la carica dell'elettrone deve apparirvi alla quarta potenza (e poichè dalle quattro unità universali e,m,c,h si può costruire un solo numero adimensionale, la costante di struttura fine di Sommerfeld $e^2/\hbar c\cong 1/137$), la costante è fissata a meno di un fattore numerico da:

$$(1,2) \qquad \text{cost}=\hbar c/(e^2E_0^2)$$

con $E_0=e/(e^2/mc^2)^2$="intensità del campo al bordo dell'elettrone".

Allo stesso modo i termini con le derivate delle intensità di campo comportano come fattore aggiuntivo una lunghezza indipendente dalla carica dell'elettrone, quindi la lunghezza d'onda di Compton h/mc.

Ci si può stupire che nell'elettrodinamica del vuoto debba intervenire la massa dell'elettrone, mentre si presuppone che si abbia a che fare solo con quanti di luce e non con elettroni. Ma sebbene i termini qui trattati siano validi quando non si genera alcuna coppia reale, essi si realizzano mediante la possibilità virtuale di generazione di coppie, e ciò implica la comparsa della massa dell'elettrone.

Ci si aspetta oltre all'energia di Maxwell dei singoli quanti di luce un'interazione mutua dei quanti di luce della forma

$$\bar{U}_1=(\hbar c/(e^2E_0^2))\int[FFFF+((\hbar/mc)\partial F/\partial x)((\hbar/mc)\partial F/\partial x)FF+...]dV \tag{1,3}$$

Si mostrerà nel seguito che il suddetto elemento di matrice H^4_{in}, che discende dalla teoria di Dirac, si può trasformare effettivamente nell'elemento di matrice di una tale espressione (1,3).

Poichè limiteremo la (0,1) al caso di radiazione luminosa molle ($|g|<mc$), quindi a campi lentamente variabili ($|(\hbar/mc)\partial F/\partial x|<|F|$), possiamo tralasciare nella (1,3) i termini con le derivate delle intensità di campo.

Assumeremo quindi, a prescindere da ulteriori considerazioni (§7), che la diffusione di luce molle da luce a causa di una densità d'energia del campo di radiazione aggiuntiva (a quella di Maxwell) della forma

$$U_1=(\hbar c/e^2E_0^2)FFFF \tag{1,4}$$

si possa scrivere:

$$H^4_{in}=(g_1g_2|\int U_1dV|-g_3-g_4). \tag{1,5}$$

(F_{ik} intensità di campo, V volume dello spazio di radiazione,
$E_0=e/(e^2/mc^2)^2$,
g_1 e g_2 quanti di luce prima dell'urto,
$-g_3$ e $-g_4$ quanti di luce dopo l'urto,
$(g_1g_2|O|-g_3-g_4)$ elemento di matrice dell'operatore O,
H^4_{in} elemento di matrice della teoria di Dirac.
(per questa transizione).

§2. **Valutazione più accurata dell'interazione $\bar{U}_1$ della luce con la**

luce dall’invarianza delle rispettive equazioni di Maxwell corrette

$$(\bar{U}_1=(\hbar c/e^2E_0^2)\int[\alpha(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D}^2)^2+\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2]dV)$$[5].

Determineremo ulteriormente la forma (1,4) di questa interazione U_1 della luce con la luce mediante l’imposizione dell’invarianza relativistica.

Nella teoria quantistica generale della luce e della materia[6] il tensore dell’intensità di campo elettrico e dell’induzione magnetica, che saranno qui indicati con $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, soddisfa alle equazioni:

(2,1) $\qquad (1/c)\dot{\mathfrak{B}}+\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{B}=0,$

che equivalgono all’esistenza del potenziale $\mathfrak{U}$:

(2,2) $\qquad \mathfrak{E}=-(1/c)\dot{\mathfrak{U}}, \qquad \mathfrak{B}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{U},$

e alle equazioni

(2,3) $\qquad -(1/c)\dot{\mathfrak{E}}+\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}=4\pi i/c, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{E}=4\pi\rho,$

che accoppiano il campo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ con la materia di densità ρ e di corrente i. La materia è a sua volta determinata nella sua evoluzione e nella sua reazione al campo dall’equazione di Dirac. L’insieme complessivo (2,1; 2,2; 2,3) si applica alla teoria delle buche. Di nuovo tuttavia nella teoria delle buche c’è la seguente *specializzazione*.

Quando non è presente nessun elettrone, *nella teoria delle buche* si possono cancellare ρ e i e valgono le equazioni di Maxwell per il vuoto: (2,1) o (2,2) e

[5] Le dimostrazioni matematiche di questo paragrafo sono identiche a quelle di Born (M. Born, M. Born e L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London A**143**, 410, 1933; A**144**, 425, 1934; A**147**, 522, 1934. Esse saranno ripetute, perchè qui si trattano presupposti fisici diversi. Vedi anche p. 446.

[6] W. Heisenberg e W. Pauli, Ztschr. f Phys. **56**, 1, 1930; **59**, 168, 1930.

(2,4) $-(1/c)\dot{\mathfrak{E}}+\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}=0, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{E}=0.$

(2,5) Tuttavia *nella teoria delle buche* succede, anche quando non vi è alcun elettrone e anche quando l'energia del campo di radiazione non è sufficiente, che si generino elettroni e positroni,

esiste, come diciamo, la possibilità virtuale di generazione di materia nel comportamento del campo.

Le equazioni per questo caso particolare (2,5) devono da un lato accordarsi con le equazioni generali (2,1; 2,2; 2,3), dall'altro implicare solo le intensità di campo; possono risultare anche solo dalle (2,1; 2,2; 2,3), purchè la corrente ρ, i sia sostituita da funzioni assegnate delle intensità di campo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, che possano significare la "materia generata virtualmente dal campo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$".

Cioè: per il nostro caso particolare (2,5) le equazioni (2,1; 2,2) restano valide, ma le equazioni di Maxwell del vuoto (2,4) sono corrette da certi termini aggiuntivi, che possono essere trascurati solo per campi piccoli (rispetto ad E_0).

Assumiamo che le equazioni di campo modificate si possano prescrivere mediante una *funzione di Hamilton* $\bar{U}$ e le sue equazioni canoniche. Come *coordinate* del sistema possiamo scegliere (secondo le 2,2) il negativo del potenziale vettore $-\mathfrak{A}$. L'*impulso* canonicamente coniugato a $-\mathfrak{A}$ lo chiameremo $\mathfrak{D}/4\pi c$, quindi sarà definito da

$$\mathfrak{D}_i(\xi)\mathfrak{A}_k(\xi')-\mathfrak{A}_k(\xi')\mathfrak{D}_i(\xi)=2hci\delta(\xi-\xi')\delta_{ik} \tag{2,6}$$

ovvero da

$$\mathfrak{D}_i(\xi)\mathfrak{B}_k(\xi')-\mathfrak{B}_k(\xi')\mathfrak{D}_i(\xi)=2hci(\partial\delta(\xi-\xi')/\partial\xi'_l) \tag{2,7}$$

(con ikl cicliche). L'energia $\bar{U}$ è allora una funzione di tutte le coordinate e dell'impulso,

$$\bar{U}=\int U dV \tag{2,8}$$

che deve contenere solo le intensità di campo, non anche le loro derivate:

$$(2,9)\qquad U=U(\mathfrak{B},\mathfrak{D}).$$

Le *equazioni canoniche* della funzione di Hamilton $\bar{U}$ sono ora:

$$\dot{\mathfrak{B}}_k(\xi')=(i/\hbar)\int[U(\mathfrak{B}(\xi),\mathfrak{D}(\xi))\mathfrak{B}_k(\xi')-\mathfrak{B}_k(\xi')U(\mathfrak{B}(\xi),\mathfrak{D}(\xi))]d\xi$$

$$=-4\pi c\ \mathrm{rot}_k(\partial U/\partial\mathfrak{D})$$

ovvero con la (2,1):

$$(2,10)\qquad \partial U/\partial\mathfrak{D}=\mathfrak{E}/4\pi$$

e

$$\dot{\mathfrak{D}}_k(\xi')=(i/\hbar)\int[U(\mathfrak{B}(\xi),\mathfrak{D}(\xi))\mathfrak{D}_k(\xi')-\mathfrak{D}_k(\xi')U(\mathfrak{B}(\xi),\mathfrak{D}(\xi))]d\xi$$

$$=4\pi c\ \mathrm{rot}_k(\partial U/\partial\mathfrak{B})$$

ovvero con la definizione

$$(2,11)\qquad \partial U/\partial\mathfrak{B}=\mathfrak{H}/4\pi,$$

$$(2,12)\qquad -(1/c)\dot{\mathfrak{D}}+\mathrm{rot}\mathfrak{H}=0$$

che inoltre permette

$$\mathrm{div}\mathfrak{D}=0.$$

Pertanto per ogni energia U le equazioni di campo sono fissate: la (2,1) e la (2,12) danno la dipendenza temporale dei campi, la (2,10) e la (2,11) accoppiano le intensità di campo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ con le funzioni di campo $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$. Come mostrano le equazioni (2,12) e (2,1), $\mathfrak{D}$ indica lo spostamento elettrico, $\mathfrak{B}$ l'induzione magnetica e come tale la forza sulla corrente vera[7].

[7] L'introduzione nelle equazioni (2,1; 2,12) di correnti vere, cioè di elettroni reali tali che, a differenza di quelli virtuali qui trattati (2,3), si possano vedere nella camera di Wilson, ma che non partecipino all'irraggiamento del campo e che in questa teoria possano intervenire solo come corpi di prova, mostrerebbe che $\mathfrak{D}$ descrive le linee di sorgente delle cariche vere, $\mathfrak{H}$ le linee di circuitazione delle correnti vere, e confermerebbe che $\mathfrak{E}$

Lo schema generale (2,1; 2,2; 2,12; 2,10; 2,11), che si fonda solo sulla legge dell'induzione (2,1) e sulla dipendenza dell'energia dalle sole intensità di campo, riceve il suo contenuto mediante l'assunzione di una determinata funzione di Hamilton U.

Sia $U=(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{D}^2)/8\pi$, allora per la (2,10) $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}$ e per la (2,11) $\mathfrak{H}=\mathfrak{B}$ e le (2,12) divengono le equazioni (2,4) del campo di vuoto maxwelliano non corretto, che vale solo in prima approssimazione per campi deboli. In approssimazione più alta la funzione di Hamilton secondo la (1,4) si scrive

$$U=(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{D}^2)/8\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)f(\mathfrak{B},\mathfrak{D})=U_0+U_1 \tag{2,13}$$

dove f è una funzione di quarto grado in $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{D}$.

Ma un dato termine aggiuntivo f dev'essere in accordo con il principio di relatività. Lo determiniamo mostrando come le equazioni di campo (2,1; 2,2; 2,12; 2,10; 2,11) si possano derivare anche da un principio variazionale, e richiedendo che la funzione di Lagrange L, di cui in questo principio variazionale si fa l'estremo, sia un'invariante per trasformazioni di Lorentz.

Perciò definiamo in analogia con il procedimento generale della meccanica la funzione

$$L/4\pi=(\mathfrak{E}\mathfrak{D})/4\pi-U \tag{2,14}$$

e calcoliamo le sue derivate parziali rispetto a $\mathfrak{B}$ e ad $\mathfrak{E}$: troviamo (per una variazione dei campi $\delta\mathfrak{E}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{D}$, $\delta\mathfrak{H}$):

$$\delta L/4\pi=(\mathfrak{E}\delta\mathfrak{D}+\mathfrak{D}\delta\mathfrak{E})/4\pi-(\partial U(\mathfrak{B},\mathfrak{D})/\partial\mathfrak{B})\delta\mathfrak{B}-(\partial U(\mathfrak{B},\mathfrak{D})/\partial\mathfrak{D})\delta\mathfrak{D}$$

ovvero per la (2,10):

$$\delta L/4\pi=\mathfrak{D}\delta\mathfrak{E}/4\pi-(\partial U(\mathfrak{B},\mathfrak{D})/\partial\mathfrak{B})\delta\mathfrak{B},$$

quindi:

$$\partial L(\mathfrak{B},\mathfrak{E})/\partial\mathfrak{E}=\mathfrak{D} \tag{2,15}$$

rappresenta la forza sulla carica vera e $\mathfrak{B}$ la forza sulla corrente vera. Vedi anche C.F. v.Weizsäcker, Ann. d. Phys. **17**, 869, 1933.

e per la (2,11):

$$(2,16)\qquad \partial L(\mathfrak{B},\mathfrak{E})/\partial\mathfrak{B}=-\mathfrak{H}$$

e vediamo che queste derivate parziali di L sono accoppiate mediante l'equazione (2,12) in un'equazione differenziale per L

$$(2,17)\qquad \partial(\partial L/\partial\mathfrak{E})/\partial ct+\mathrm{rot}(\partial L/\partial\mathfrak{B})=0,$$

che è equivalente al principio variazionale:

$$(2,18)\qquad \int\int L(\mathfrak{B},\mathfrak{E})dVdt=\text{estremo}$$

per la *funzione di Lagrange* $L=L(\mathfrak{B},\mathfrak{E})$ sotto le condizioni aggiuntive (2,1) o (2,2). Le equazioni lagrangiane (2,1; 2,15; 2,16; 2,18) che fissano l'evoluzione del campo allo stesso modo delle equazioni hamiltoniane (2,1; 2,10; 2,11; 2,12), riceveranno ora il loro contenuto mediante la costruzione di una funzione di Lagrange che dev'essere invariante per trasformazioni di Lorentz e per riflessione.

Tutti gli invarianti di Lorentz del tensore antisimmetrico $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$ devono essere funzione dei due invarianti di Lorentz $\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2$ ed $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})$, dei quali tuttavia il secondo non è invariante per riflessione.

Al grado più basso, il secondo, si ha solo l'invariante per trasformazioni di Lorentz e per riflessione $\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2$, che come funzione di Lagrange porta, secondo le (2,15; 2,16; 2,18), alle note equazioni lineari di Maxwell $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{B}$ e (2,4).

All'ordine subito più alto, il quarto, si possono costruire solo gli invarianti per trasformazioni di Lorentz e per riflessione $(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2)^2$ ed $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2$. Così all'hamiltoniana corretta più generale al quart'ordine nelle intensità di campo corrisponde una funzione di Lagrange

$$(2,19)\qquad L/4\pi=(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2)/8\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[-\alpha(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2)^2-\beta(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2]=(L_0+L_1)/4\pi$$

dove $-\alpha$ e $-\beta$ sono coefficienti numerici.

Per questa funzione di Lagrange le equazioni di accoppiamento delle intensità di campo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ con le quantità $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ (2,15; 2,16) sono:

$$\mathfrak{D}/4\pi=\mathfrak{E}/4\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[-4\alpha(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2)\mathfrak{E}-2\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{E})\mathfrak{B}]$$

(2,20a)

$$\mathfrak{H}/4\pi=\mathfrak{B}/4\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[-4\alpha(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2)\mathfrak{B}+2\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{E})\mathfrak{E}]$$

le cui inverse (tralasciando coerentemente le potenze più elevate della quarta nelle intensità di campo) si scrivono

$$\mathfrak{E}/4\pi=\mathfrak{D}/4\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[+4\alpha(\mathfrak{D}^2-\mathfrak{H}^2)\mathfrak{D}+2\beta(\mathfrak{H}\mathfrak{D})\mathfrak{H}]$$

(2,20b)

$$\mathfrak{B}/4\pi=\mathfrak{H}/4\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[+4\alpha(\mathfrak{D}^2-\mathfrak{H}^2)\mathfrak{H}-2\beta(\mathfrak{H}\mathfrak{D})\mathfrak{D}]$$

Alla funzione di Lagrange (2,19) corrisponde secondo (2,14; 2,20) la funzione di Hamilton

(2,21) $$U=(\mathfrak{D}^2+\mathfrak{B}^2)/8\pi+(\hbar c/e^2E_0^2)[\alpha(\mathfrak{D}^2-\mathfrak{B}^2)^2+\beta(\mathfrak{D}\mathfrak{B})^2]=(U_0+U_1)$$

Pertanto l'energia d'interazione U_1 dei quanti di luce è data a meno di due costanti numeriche α e β. Queste saranno fissate nel §8 mediante il calcolo degli elementi di matrice di Dirac H^4_{in} in due casi speciali i più semplici possibile e mediante il confronto con la (2,21).

.
.
.
.