L'effetto Compton secondo la teoria di Schroedinger[1]

W. Gordon a Berlino
(ricevuto il 29 settembre 1926.)

Si calcolano secondo la teoria di Schroedinger le frequenze e le intensità irraggiate nell'effetto Compton. Le quantità della teoria dei quanti si ottengono come media geometrica sulle quantità classiche degli stati iniziale e finale del processo.

1. Presentazione dell'equazione differenziale per ψ. Heisenberg e Schrödinger hanno dato dei metodi per la determinazione delle frequenze quantiche e delle intensità. L'effetto Compton è già stato calcolato da Dirac[2] con il metodo di Heisenberg. Qui lo stesso problema sarà trattato secondo Schrödinger. Il procedimento di Schrödinger ha il vantaggio di servirsi di mezzi matematici consueti. Esso si fonda sulla determinazione di una quantità ψ, che per un solo elettrone è una funzione delle coordinate spaziali cartesiane x_1, x_2, x_3 e del tempo t. Schrödinger ha dato due regole per la determinazione dell'equazione differenziale alle derivate parziali lineare del second'ordine che ψ deve soddisfare. Entrambe stanno in una certa relazione con la prescrizione classica, secondo la quale si ottiene l'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi per la funzione d'azione W: nella relazione $f(x,t,p,E)=0$, che definisce l'energia E, si sostituiscono al posto degli impulsi p_1, p_2, p_3 le derivate di W rispetto alle coordinate corrispondenti, e al posto di E la derivata rispetto al tempo con il segno negativo. Secondo una delle regole di Schrödinger[3] si sostituiscono al posto delle derivate i loro simboli moltiplicati per $h/2\pi i$ e si applica a ψ l'operatore differenziale così risultante (dove per evitare indeterminazioni si devono fare assunzioni di simmetrizzazione). La prescrizione classica e quella quantistica

$$p_k=\partial W/\partial x_k, \quad E=-\partial W/\partial t; \qquad p_k=-i\hbar\partial/\partial x_k, \quad E=i\hbar\partial/\partial t, \tag{1}$$

quando in modo noto si introducano le quantità immaginarie

[1] Zeitschr. f. Phys. **40**, 117 (1926).

[2] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **111**, 405 (1926).

[3] E: Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 734 (1926).

$$x_4=ict, \quad p_4=iE/c \tag{2}$$

si scrivono nella forma simmetrica

$$p_\alpha=\partial W/\partial x_\alpha; \quad p_\alpha=-i\hbar\partial/\partial x_\alpha; \tag{1a}$$

qui e nel seguito k indica 1,2,3 e α 1,2,3,4.

L'equazione di definizione per l'energia cinetica in meccanica relativistica si scrive

$$\sum p_k^2 -E^2/c^2+m^2c^2=0 \tag{3}$$

(m massa dell'elettrone, c velocità della luce) ovvero per la (2)

$$\sum p_\alpha^2+m^2c^2=0. \tag{3a}$$

L'elettrone si trovi ora in un campo elettromagnetico con le componenti del potenziale vettore Φ_1, Φ_2, Φ_3 e con il potenziale scalare ϕ_0, tra i quali sussiste la relazione

$$\sum \partial\Phi_k/\partial x_k+\partial\Phi_0/\partial ct=0 \tag{4}$$

e da essi le intensità del campo elettrico e magnetico si calcolano secondo le formule

$$E_k=-\partial\Phi_0/\partial x_k-\partial\Phi_k/\partial ct, \quad H_1=\partial\Phi_3/\partial x_2-\partial\Phi_2/\partial x_3 \tag{5}$$

e permutazioni cicliche. Poniamo

$$\Phi_4=i\Phi_0; \tag{6}$$

allora le (4) e (5) tenendo conto della (2_1) assumono la forma

$$\sum \partial\Phi_\alpha/\partial x_\alpha=0, \tag{4a}$$

$$E_k=i(\partial\Phi_4/\partial x_k-\partial\Phi_k/\partial x_4), \quad H_1=\partial\Phi_3/\partial x_2-\partial\Phi_2/\partial x_3. \tag{5a}$$

Queste formule mostrano che Φ_α è determinata a meno di una espressione additiva della forma $\partial f/\partial x_\alpha$, dove f soddisfa all'equazione delle onde $\sum\partial^2 f/\partial x_\alpha^2=0$.

Trattandosi di un campo, per energia si intende: energia cinetica più energia di campo $e\Phi_0$ (e carica dell'elettrone), e allora per ragioni d'invarianza come impulso: impulso cinetico più "impulso di campo" $(e/c)\Phi_k$. Dalla (3) e dalla (3a) risulta così

$$\sum (p_k-(e/c)\Phi_k)^2-(E-e\Phi_0)^2/c^2+m^2c^2=\sum (p_\alpha-(e/c)\Phi_\alpha)^2+m^2c^2=0. \qquad (7)$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi e l'equazione differenziale di Schrödinger sono quindi secondo la (1a)

$$\sum (\partial W/\partial x_\alpha-(e/c)\Phi_\alpha)^2+m^2c^2=0 \qquad (8)$$

e rispettivamente

$$\left\{\sum (-i\hbar\partial/\partial x_\alpha-(e/c)\Phi_\alpha)^2+m^2c^2\right\} \psi=0$$

ovvero sviluppando i quadrati e moltiplicando per $-4\pi^2/h^2$

$$\sum \partial^2\psi/\partial x_\alpha^2-(4\pi ie/hc)\sum \Phi_\alpha\partial\psi/\partial x_\alpha-(4\pi^2/h^2)((e^2/c^2)\sum \Phi_\alpha^2+m^2c^2)\psi=0; \qquad (9)$$

l'incertezza che subito compare, se si debba scrivere $\sum \Phi_\alpha\partial\psi/\partial x_\alpha$ oppure $\sum \partial(\Phi_\alpha\psi)/\partial x_\alpha$ si risolve in base alla (4a). Un incremento a Φ_α di $\partial f/\partial x_\alpha$ corrisponde ad un incremento di W di $(e/c)f$ e ad una moltiplicazione di ψ per $\exp(ief/\hbar c)$.

L'equazione differenziale (9) si può ottenere assieme a quella per la funzione complessa coniugata $\bar{\psi}$ per variazione dell'integrale

$$J=\int H dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

$$H=\sum \partial\psi/\partial x_\alpha\partial\bar{\psi}/\partial x_\alpha+(ie/\hbar c)\sum (\bar{\psi}\partial\psi/\partial x_\alpha-\psi\partial\bar{\psi}/\partial x_\alpha)\Phi_\alpha \qquad (10)$$
$$+(4\pi^2/h^2)((e^2/c^2)\sum \Phi_\alpha^2+m^2c^2)\psi\bar{\psi},$$

quando si trattino ψ e $\bar{\psi}$ come funzioni indipendenti, le cui variazioni si annullano ai limiti d'integrazione. Da qui risulta la generalizzazione dell'altra regola di Schrödinger[4]: si hermitianizza l'equazione di Hamilton-Jacobi (8)

$$\sum (\partial W/\partial x_\alpha-(e/c)\Phi_\alpha)(\partial\bar{W}/\partial x_\alpha-(e/c)\Phi_\alpha)+m^2c^2=0$$

e si compie in essa la sostituzione $W=-i\hbar\log\psi$; con ciò il primo membro previa moltiplicazione per $\psi\bar{\psi}/\hbar^2$ va a coincidere con

[4]E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361 (1926).

l'espressione di H nella (10). Ma invece di porre H=0, si pone uguale a zero la variazione dell'integrale $\int H dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Nel limite h=0 W sarà reale e la (9) coinciderà con la (8).

Se il potenziale è indipendente dal tempo, in accordo con la (1) si può porre

$$\psi = u \exp(-iEt/\hbar) \qquad (11)$$

con u indipendente dal tempo. Dalla (9) e dalla (10) risulta allora

$$\sum \partial^2 u/\partial x_k^2 - (4\pi ie/hc)\sum \Phi_k \partial u/\partial x_k$$
$$-(4\pi^2/h^2)\left\{(e^2/c^2)\sum \Phi_k^2 - (E-e\Phi_0)^2/c^2 + m^2c^2\right\} u=0, \qquad (9a)$$

$$J=\int H dx_1 dx_2 dx_3$$

$$H=\sum \partial u/\partial x_k \partial \bar{u}/\partial x_k + (ie/\hbar c)\sum (\bar{u}\partial u/\partial x_k - u\partial \bar{u}/\partial x_k)\Phi_k \qquad (10a)$$
$$+(4\pi^2/h^2)\left\{(e^2/c^2)\sum \Phi_k^2 - (E-e\Phi_0)^2/c^2 + m^2c^2\right\} u\bar{u}.$$

Nel caso della meccanica classica si deve sostituire E con $E+mc^2$ e passare al limite per $c=\infty$; tuttavia $(e/c)\Phi_k$ rimane immutato, poichè in esso c dipende dal fatto che e si intende misurato in unità elettrostatiche. In questo senso nella (9) e nella (10) si deve sostituire $\partial/\partial t$ con $\partial/\partial t - imc^2/\hbar$, nella (9a) e nella (10a) $(E-c\Phi_0)^2/c^2 - m^2c^2$ con $2m(E-c\Phi_0)$. Le due ultime equazioni assumono dunque per $\Phi_k=0$ la forma che è stata comunicata da Schrödinger[5].

2. Determinazione dalla radiazione da ψ. Classicamente si calcola la radiazione per mezzo del moto dell'elettrone. Da un integrale completo della (8) con le tre costanti c_k si ottiene il moto nello stato definito da queste costanti mediante le formule

$$\partial W/\partial c_k = d_k, \qquad (12)$$

dove le d_k sono tre ulteriori costanti. Le (12) risolte danno le coordinate in funzione del tempo.

[5]E. Schrödinger, Ann. d. Phys., l.c. e **79**, 489 (1926).

Nella teoria quantistica non si può parlare del moto in uno stato, ma tutti i moti sono tra loro accoppiati. Le radiazioni possibili sono quelle di un sistema di cariche e di correnti distribuito spazialmente, che si derivano dalla funzione ψ nel modo seguente. Moltiplichiamo la (9) per $\bar{\psi}$ e per ψ l'equazione complessa coniugata che vale per $\bar{\psi}$, e sottraiamo un'equazione dall'altra; tenendo conto della (4a) otteniamo

$$\sum \partial s_\alpha/\partial x_\alpha=0 \tag{13}$$

con

$$s_\alpha=-i\left(\bar{\psi}\partial\psi/\partial x_\alpha-\psi\partial\bar{\psi}/\partial x_\alpha-(4\pi ie/hc)\Phi_\alpha\psi\bar{\psi} \right). \tag{14}$$

Poniamoci nella rappresentazione reale con la sostituzione

$$s_k=s_k, \quad s_4=ic\rho; \tag{15}$$

allora la (13) si scrive

$$\sum \partial s_k/\partial x_k+\partial\rho/\partial t=0. \tag{13a}$$

Siamo autorizzati a parlare della s_k come di componenti di una densità di corrente e di ρ come di una densità di carica; allora tra queste quantità sussiste l'equazione di continuità (13a) e a priori queste quantità non devono soddisfare nessun'altra condizione per poter fungere da sorgenti di un campo elettromagnetico nelle equazioni di Maxwell. Si è introdotto nella (14) il fattore -i, quindi le s_k e ρ sono reali. Si determina facilmente che queste quantità sono indipendenti dalla summenzionata indeterminazione nei potenziali Φ_α. Esse si ottengono anche dalla funzione di Hamilton H (10) per derivazione rispetto ai potenziali, come succede anche nella teoria della materia di Mie[6]. Cioè

$$s_\alpha=-(e\hbar/c)\partial H/\partial\Phi_\alpha. \tag{16}$$

Il campo generato dalle densità si ottiene dai potenziali ritardati

[6] *Vedi per esempio* M. v. Laue, Relativitätstheorie II, Eq. (271).

$$\Phi_\alpha=(1/c)\int[s_\alpha]dx/R, \quad dx=dx_1dx_2dx_3 \tag{17}$$

per mezzo delle formule (5a). R è la distanza del punto potenziato dall'elemento di volume dx, e le parentesi quadre stanno ad indicare che a t si è sostituito t-R/c. La radiazione è uguale a quella che origina dal baricentro elettrico delle cariche. Il baricentro è definito da

$$eX_k=\int x_k\rho dx, \quad e=\int\rho dx, \tag{18}$$

e ponendo $X_4=ict$ si può scrivere complessivamente

$$eX_\alpha=\int x_\alpha\rho dx. \tag{18a}$$

Dall'equazione di continuità (13a) segue, quando la corrente si annulla in modo appropriato ai confini dello spazio:

$$0=\sum_k\int\partial s_k/\partial x_k dx=-\int\partial\rho/\partial t dx,$$

$$0=\sum_r\int\partial(x_ks_r)/\partial x_r dx=-\int x_k\partial\rho/\partial t dx+\int s_k dx.$$

La prima equazione afferma, come dev'essere, che la carica totale è costante nel tempo, la seconda, che la velocità del baricentro è data da

$$edX_k/dt=\int s_k dx \tag{19}$$

ovvero assieme all'ultima equazione (18)

$$edX_\alpha/dt=\int s_\alpha dx^{7}. \tag{19a}$$

Poichè per h=0 il campo è quello classico (principio di

[7] *Nota aggiunta in correzione. Si può con Madelung* (Naturwiss. **14**, 1004 (1926)) *considerare la corrente come elettricità che si muove con la velocità* $\mathfrak{u}=\mathfrak{s}/\rho$ *(*$\mathfrak{s}=s_1,s_2,s_3$*). La sua densità di massa è allora* $m\sigma = m\rho/e$. X_k *e* dX_k/dt *sono allora la posizione e la velocità del baricentro della massa. - Tralasciando il campo magnetico e la relatività la (14) dà* $\mathfrak{s}=-i(\bar\psi\mathrm{grad}\psi-\psi\mathrm{grad}\bar\psi)=2\psi\bar\psi\mathfrak{a}''$ *(con la notazione di Madelung),* $\rho=(4\pi m/h)\psi\bar\psi$*, di modo che* $\mathfrak{u}=(\hbar/m)\mathfrak{a}''$*, come per Madelung.*

corrispondenza), la (18) per h=0 deve coincidere con la totalità dei moti classicamente possibili[8]. In particolare la carica complessiva dev'essere uguale alla carica dell'elettrone, come ben abbiamo indicato con la notazione.

Assumiamo ora che l'equazione (9) per condizioni al contorno naturali possieda una serie di soluzioni discrete ψ_1, ψ_2,..., che riassumiamo nella somma

$$\psi=\sum_m z_m\psi_m. \tag{20}$$

Le costanti (reali) z_m sono una misura del peso dello stato m. Le densità (14) sono

$$s_\alpha=\sum_{mn} z_m z_n s_\alpha^{(mn)}, \tag{21}$$

con

$$s_\alpha^{(mn)}=-i\left(\bar{\psi}_n\partial\psi_m/\partial x_\alpha-\psi_m\partial\bar{\psi}_n/\partial x_\alpha-(4\pi ie/hc)\Phi_\alpha\psi_m\bar{\psi}_n\right). \tag{21a}$$

Gli $s_\alpha^{(mn)}$ costituiscono gli elementi di una matrice hermitiana, e si derivano alla maniera (16) da una matrice hermitiana $H^{(mn)}$, la quale consiste nell'H della (10) con ψ sostituito da ψ_m e $\bar{\psi}$ con ψ_n. Il moto è rappresentato secondo le (18), (19) e (21) da

$$X_k=\sum_{mn} z_m z_n X_k^{(mn)},\quad dX_k/dt=\sum_{mn} z_m z_n dX_k^{(mn)}/dt, \tag{22}$$

con

$$eX_k^{(mn)}=\int x_k\rho^{(mn)}dx,\qquad edX_k^{(mn)}/dt=\int s_k^{(mn)}dx. \tag{22a}$$

Le $X_k^{(mn)}$ sono le matrici di Heisenberg, nel caso che le funzioni ψ_m siano opportunamente normalizzate. Nel caso (11) segue dalla (22a) la rappresentazione di Schrödinger[9].

Quando l'indice m è capace di valori continui, al posto delle somme compaiono integrali.

.
.

3. Applicazione all'effetto Compton.

[8] *In questa definizione rimane la possibilità di termini aggiuntivi che si annullino per* h=0. *(Vedi nota 1, pag. 127.)*

[9] E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 734 (1926).