Fenomeni di fluttuazione e meccanica quantistica[1]

W. Heisenberg a Copenaghen

La nota presente cerca di mostrare che la meccanica quantistica è sempre in accordo con le formule di fluttuazione prescritte dalla teoria della discontinuità.

Il grande significato fisico dei fenomeni di fluttuazione consiste nel fatto che essi stanno tra le conseguenze più semplici e immediate della discontinuità che si manifesta su spazi e tempi piccoli. Per esempio secondo Einstein si può considerare il moto browniano come una conseguenza diretta della struttura atomistica della materia, le fluttuazioni d’energia e d’impulso nella radiazione di una cavità portano immediatamente all’idea dei quanti di luce di Einstein, le fluttuazioni d’energia in un reticolo cristallino sono strettamente legate all’esistenza di stati stazionari discreti di un sistema meccanico. Poichè mediante la meccanica quantistica la teoria dei sistemi meccanici è stata resa accessibile a una trattazione quantitativa, deve sussistere tra la meccanica quantistica e il tipo prima ricordato di fenomeni di fluttuazione una connessione assai stretta. Questa connessione sarà chiarita nel seguito. La nota seguente significa anche un’estensione e precisazione delle considerazioni, che Born, Jordan e l’autore[2] hanno esposto[3] precedentemente in occasione dello sviluppo generale della meccanica quantistica. Uno studio più approfondito della connessione allora trovata mi pare utile,

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **40**, 501 (1926).

[2]M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, Quantenmechanik II. Zeitschr. f. Phys. **35**, 557, (1926), Cap. 4, § 3.

[3]*La critica di* A. Smekal, Zeitschr. F. Phys. **37**, 319 (1926) *non si riferisce al caso qui trattato di un sistema meccanico; se una tale critica possa portare a risultati utili nel caso della radiazione della cavità, non si può decidere per ora; potrei aggiungere che il caso della cavità è del tutto analogo a quello del reticolo cristallino.*

poichè di nuovo da varie parti si manifestano dubbi sull'esistenza delle discontinuità.

§ 1. La parte matematica della trattazione seguente si desume da un lavoro dell'autore[4] sulla risonanza quantomeccanica; trasferisco qui i risultati di quel lavoro. Sia dato questo problema: due atomi uguali *a* e *b* si possono (trascurando ogni forza della radiazione) trovare negli stati *n* e *m*, cioè $W^a = E_n$, $W^b = E_m$; essi sono accoppiati mediante un'interazione assai piccola. Esiste allora risonanza tra i due atomi; questa risonanza si può descrivere intuitivamente in due modi diversi:

1. Col'andar del tempo hanno luogo con una data frequenza dei salti d'energia, che fanno passare simultaneamente con discontinuità W^a da E_n a E_m e W^b da E_m a E_n o viceversa. In altre parole , col passar del tempo il "quanto di luce"[5] (E_n-E_m) ripetutamente prima va dall'atomo *a* all'atomo *b*, e poi torna ad *a* dopo un certo tempo. In media per ragioni di simmetria il quanto di luce è per la metà del tempo nell'atomo *a*, per l'altra metà nell'atomo *b*.

2. La risonanza è da considerarsi come l'analogo secondo il principio di corrispondenza dell'interazione classica tra due oscillatori. Perciò l'energia pulserà avanti e indietro tra gli atomi *a* e *b* con una frequenza di battimento lenta. L'energia di un atomo è una funzione armonicamente periodica del tempo. In questa forma la descrizione II contraddice completamente la descrizione I. Tuttavia mediante la meccanica quantistica questa descrizione secondo il principio di corrispondenza sarà sostanzialmente modificata e resa accessibile ad una trattazione matematica: non ha senso in un certo stato del sistema totale, parlare dell'energia di un atomo in funzione del tempo. Solo il valor medio temporale di una quantità dipendente dal tempo ha significato fisico in un certo stato del sistema totale. L'energia

---

[4]W. Heisenberg, Mehrkorperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik, Zeitschr. F. Phys. **38**, 411 (1926); *nel seguito citato come (l.c.).*

[5]*Si dovrebbe dire piuttosto "quanto sonoro", poichè si ha a che fare con uno stato di oscillazione meccanico.*

di un atomo è rappresentabile formalmente nel caso qui considerato mediante una matrice, che corrisponde ad una funzione armonica del tempo. I termini armonici di questa matrice sono tuttavia collegati a due stati del sistema totale. Finchè non intervengono transizioni del sistema complessivo, solo i suddetti valori medi temporali sono in linea di principio osservabili.

Si mostrerà che per tutti gli effetti osservabili in linea di principio la descrizione II è equivalente alla descrizione I. La prima domanda è se sia possibile in qualche modo mediante processi d'urto con uno dei due atomi determinare sperimentalmente valori dell'energia che stiano da qualche parte tra E_n ed E_m. La risposta per entrambe le descrizioni è: no. Nel caso II basta soltanto applicare le definizioni fondamentali della meccanica quantistica al sistema complessivo (dei due atomi *a* e *b*) per vedere che, (a meno di quantità dell'ordine dell'interazione) nei processi d'urto si possono trasferire le stesse differenze d'energia E_n-E_m come in assenza d'interazione. Per procedere oltre, immaginiamo che sia data la matrice quantomeccanica per l'energia di un atomo (poniamo *a*): tutte le matrici del sistema con interazione si ottengono da quelle del sistema imperturbato mediante una trasformazione canonica con la matrice S (l.c. equazioni (8) e (7)):

$$\mathbf{W}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{S} \; ,$$

$$\mathbf{q}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}\mathbf{S} \; , \tag{1}$$

dove **S** è (l.c. Eq. 12):

$$S_{nm,nm}=2^{-1/2};\; S_{nm,mn}=2^{-1/2};\; S_{mn,nm}=2^{-1/2};\; S_{mn,mn}=-2^{-1/2}. \tag{2}$$

Si indichi anche con $\mathbf{W}^a$ l'energia dell'atomo *a* nel sistema imperturbato, con $\mathbf{W}'^a$ quella nel sistema perturbato; sarà

$$\mathbf{W}'^a=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}^a\mathbf{S} \; . \tag{3}$$

Questa per la (2) è una matrice con i termini:

$$W'^a_{nm,nm}=(1/2)(E_n+E_m) \; ; \; W'^a_{nm,mn}=(1/2)(E_n-E_m) \; ;$$

$$W'^a_{mn,nm}=(1/2)(E_n-E_m) \; ; \; W'^a_{mn,mn}=(1/2)(E_n+E_m) \; . \tag{4}$$

Tutte le quantità osservabili in linea di principio in un determinato stato, per esempio *nm*, risultano essere: il valor medio temporale di $\mathbf{W}^a$ stesso, la fluttuazione media quadratica dell'energia, qualche valor medio delle fluttuazioni. Del tutto in generale tutte queste fluttuazioni possono essere ricondotte al valor medio temporale di una qualche funzione di **W**: **f**(**W**) (cioè il valor medio di $\mathbf{W}^2$, di $\mathbf{W}^4$ eccetera). Calcoliamo il valor medio temporale di una siffatta funzione **f**: sarà

$$\mathbf{f}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}\mathbf{S} \ , \tag{5}$$

quindi

$$f'_{nm,nm}=(1/2)(f(E_n)+f(E_m)) \ ;$$

$$f'_{mn,mn}=(1/2)(f(E_n)+f(E_m)) \ .$$

Si vede senz'altro che questi valori sono identici a quelli che si possono ottenere con l'interpretazione I. Si potrebbe porre la questione a rovescio: Si dia una funzione E(t) in modo che il valor medio di una qualche funzione arbitraria f(E) soddisfi all'equazione (15):

$$\overline{f(E(t))} = (1/2)(f(E_n)+f(E_m)) \ .$$

Si troverà che solo funzioni del tipo rappresentato in Fig. 1 hanno questa proprietà, e proprio quando la lunghezza complessiva del tratto superiore della curva è uguale in media alla lunghezza complessiva del tratto inferiore, cosa che corrisponde proprio all'ipotesi I.

Il risultato è quindi che la meccanica quantistica nel caso qui trattato riguardo a tutte le quantità di fluttuazione raggiunge gli stessi risultati della rappresentazione discontinua, in altre parole, si mostra che il fatto della discontinuità si inserisce in modo non forzato nel sistema della meccanica quantistica. Appare come se la meccanica quantistica permettesse di affermare sui processi discontinui nè più nè meno che quello che è realmente dimostrabile. L'istante della transizione, nel complesso la transizione stessa non intervengono in questo schema. E' anche nostra opinione che in Fig. 1 solo la lunghezza complessiva dei tratti della curva inferiori e superiori abbia un significato fisico.

Si potrebbe osservare che tutti i calcoli sono stati eseguiti solo nell'approssimazione nella quale l'interazione dei due atomi si può considerare come infinitamente piccola. Ma questa è proprio l'approssimazione nella quale il problema è definito. Il concetto "energia di un atomo" ha un senso preciso solo fin quando l'energia di interazione può essere trascurata.

§ 2. Il fondamento matematico per la coincidenza dei valori medi delle fluttuazioni quantomeccanici con quelli della teoria della discontinuità è la forma delle trasformazioni canoniche (1), (5). Questa forma d'altra parte ha nella meccanica quantistica una validità così generale che la discussione delle fluttuazioni prima presentata si può estendere al caso più generale che può capitare. L'ipotesi del § 1, che *a* e *b* siano due atomi, è inessenziale; possono essere due sistemi meccanici uguali qualsiansi. Inoltre tutte le considerazioni rimangono valide, anche quando si tratti dell'interazione di più sistemi meccanici uguali. La coincidenza delle fluttuazioni della teoria discontinua con le fluttuazioni quantomeccaniche non dipende dai valori di **S**, solo la forma della trasformazione canonica è essenziale. Si indichi lo stato di un qualche sistema meccanico perturbato con "α", lo stato del sistema imperturbato con "β". Allora una trasformazione canonica (1), (5) nel senso dell'interpretazione discontinua significa quanto segue: *Se il sistema si trova nello stato α, $|S_{\alpha\beta}|^2$ è la probabilità che (in seguito a processi d'urto, per improvvisa cessazione della perturbazione ecc.) il sistema si trovi nello stato β*. Per ogni funzione di W^a vale per esempio, secondo la (5):

$$f_\alpha(W^a) = \sum_\beta |S_{\alpha\beta}|^2 f(W^a_\beta) \ , \tag{6}$$

dowe W^a_β indica quel valore di W^a, che il sistema *a* assume nello stato β. Secondo principi generali vale naturalmente

$$\sum_\beta |S_{\alpha\beta}|^2 = 1 \ . \tag{7}$$

Come seconda generalizzazione si può abbandonare l'ipotesi che si tratti di sistemi meccanici identici. Si deve solo presupporre che la stessa differenza d'energia E_n-E_m intervenga in tutti i sistemi, perchè altrimenti (cioè per i sistemi nei quali non accade) non si tratterebbe di un caso di risonanza. Con le parole della rappresentazione discontinua: il quanto di luce E_n-E_m deve potersi trovare in tutti i sistemi. I calcoli del § 1 si possono in questo caso trasferire invariati.

La terza generalizzazione che dobbiamo proporci riguarda il tipo delle quantità di cui si studiano le fluttuazioni. Le considerazioni precedenti non sarebbero mutate se in luogo dell'energia del sistema di particelle si trattasse di una qualche altra quantità che nel caso imperturbato si possa rappresentare con una matrice diagonale. A queste quantità appartengono per esempio il momento angolare totale, il momento angolare rispetto ad un asse fisso ecc.. I valori medi delle fluttuazioni di tutte queste quantità coincidono secondo il calcolo quantomeccanico del § 1 con i valori medi delle fluttuazioni che derivano dalla rappresentazione discontinua. *Finchè si parla di energia, di momento angolare ecc. di un sistema meccanico in funzione del tempo, intervengono in meccanica quantistica solo funzioni del tipo indicato in Fig. 1.* Come coefficienti di probabilità intervengono sempre le stesse quantità $|S_{\alpha\beta}|^2$.

Inoltre le considerazioni del § 1 manterranno la loro validità anche nel caso di moti aperiodici, poichè la forma della trasformazione canonica (1), (5) ha validità generale. come esempio si può in conclusione mostrare in che modo i calcoli fatti sulle fluttuazioni in un reticolo cristallino da Born, Jordan e dall'autore (l.c.) siano contenuti nella trattazione qui prodotta. Si tratta delle fluttuazioni d'energia in un piccolo volume parziale di un cristallo. Nwel sistema imperturbato si deve isolare il volume parziale dal cristallo. Allora nel sistema perturbato esiste risonanza riguardo a tutte quelle oscillazioni proprie la cui frequenza sia uguale nel sistema imperturbato per il cristallo e il volume parziale. Questo avviene approssimativamente per tutte le oscillazioni proprie per le quali le lunghezze d'onda siano piccole rispetto alle dimensioni lineari del piccolo volume parziale. Solo per tali oscillazioni proprie il problema delle fluttuazioni ha un senso determinato. Dalle considerazioni del § 1 si può prevedere senza calcoli che il calcolo delle fluttuazioni quadratiche medie e di tutti i valori medi più alti delle fluttuazioni secondo la meccanica quantistica deve dare lo stesso risultato della statistica della luce di Bose-Einstein. Per il caso delle fluttuazoni quadratiche medie il calcolo è eseguito esplicitamente nel suddetto lavoro "Quantenmechanik II".

I calcoli qui sviluppati mi paiono un argomento riguardo al fatto che una interpretazione continua del formalismo quantomeccanico, quindi anche le onde di de Broglie-Schrödinger, non corrisponderebbero all’essenza delle relazioni formali note. Piuttosto secondo questi calcoli il fatto della discontinuità è contenuto armonicamente nello schema matematico della meccanica quantistica.