

# Tentativo di un'interpretazione quantistica della dispersione<sup>1</sup>

K.F. Herzfeld a Monaco

(Con una figura. Ricevuto il 21 febbraio 1924.)

*Nella lotta tra la teoria ondulatoria e la "teoria dei quanti di luce" per la radiazione la grande difficoltà per la seconda è costituita dai fenomeni di interferenza e di dispersione. In connessione con l'interpretazione dell'interferenza di G. Wentzel si tenterà qui di mostrare come si deve formulare la teoria della dispersione quando la luce consiste di quanti volanti. Si deve allora assumere che dall'atomo possano essere tratti anche dei quanti "sbagliati", anche se solo per tempi  $\approx 1/\nu$ , e che poi siano o rispediti in avanti o diffusi di lato. Si possono dare delle leggi di probabilità che sono in accordo con le formule di dispersione. In conclusione sarà discusso l'equilibrio energetico tra materia e radiazione.*

Il problema di capire il passaggio della luce nei mezzi trasparenti dal punto di vista della radiazione ad aghi<sup>2</sup> si può dividere nella considerazione di due domande.

Come prima cosa bisogna rispondere alla domanda, perchè la velocità di propagazione nei corpi materiali sia diversa da quella nello spazio vuoto e come questo fatto sia collegato con l'assorbimento.

Il secondo compito consiste nello spiegare a partire da qui la rifrazione, più in generale la propagazione della radiazione, in altre parole nell'interpretazione secondo la teoria dei quanti del principio di Huyghens. Questo compito non è tuttavia distinto in questo caso particolare da quello generale, che pone l'interpretazione dell'interferenza secondo la teoria dei quanti. Quando

---

<sup>1</sup>Zeitschr. f. Phys. **23**, 341 (1924).

<sup>2</sup>A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 133 (1905); Phys. Zeitschr. **10**, 185 (1909); **18**, 181 (1917); J. Stark, Phys. Zeitschr. **10**, 579, 902 (1909); **11**, 24 (1910).

questo è assolto<sup>3</sup>, anche la rifrazione etc. sono chiarite.

Resta quindi qui soltanto da calcolare la velocità di propagazione nella materia ponderabile. In primo luogo daremo un'esposizione della teoria classica della dispersione<sup>4</sup> che formalmente si discosta da quella solita, e che fa risaltare chiaramente il suo nucleo fisico.

## I. La teoria della dispersione classica

1. *Propagazione della fase.* Nella teoria classica la sola possibilità mediante la quale una qualche struttura materiale (per esempio un oscillatore lineare di Planck) può influire su un'onda elettrica, è che essa emetta un'onda secondaria, il cui campo si sovrapponga al campo dell'onda primaria. Per esempio la riflessione su uno specchio deriva dal fatto che i risonatori dello specchio entrano in co-oscillazione, e le onde secondarie così emesse in avanti costruiscono l'onda riflessa, mentre quelle emesse all'indietro annullano esattamente l'onda primaria nello specchio.

Quando poniamo nel campo di un'onda piana un singolo risonatore, esso non emette naturalmente un'onda piana, ma un'onda sferica, abbiamo cioè diffusione, non riflessione o propagazione ritardata dell'onda primaria. Per ottenere questa, dobbiamo nel caso più semplice immaginarci un piano rivestito di risonatori (per esempio il piano  $xy$ ), di modo che tutte le onde sferiche secondarie producano per interferenza secondo il principio di Huyghens un'onda piana secondaria. Vi siano ora  $\mathcal{K}$  risonatori per unità di superficie del piano, e inoltre siano così lontani l'uno dall'altro, che si possa prescindere dalla loro influenza reciproca. Su di essi incida, proveniendo dalla direzione  $-z$ , un'onda elettrica piana

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{0x} e^{i\nu(t-z/c)} .$$

L'equazione di moto del singolo risonatore nella notazione di

---

<sup>3</sup>G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **22**, 193 (1924).

<sup>4</sup>vedi L. Natanson, Phil. Mag. **38**, 269 (1919).

Voigt sia

$$m\ddot{\xi} + m\nu'\dot{\xi} + m\nu_0^2\xi = e\mathcal{E} \quad (1)$$

dove  $\nu_0$  misura la frequenza dell'oscillazione propria,  $m\nu'$  lo smorzamento. La soluzione complessa com'è noto si scrive:

$$\xi = (e\mathcal{E}_{0x}/m) \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu\nu'} e^{i\nu t} \quad (2)$$

e significa un'oscillazione di ampiezza

$$(e\mathcal{E}_0/m) \frac{1}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^{1/2}}$$

e con l'angolo di fase  $\chi [e^{i(\nu t + \chi)}]$  tale che

$$\cos\chi = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^{1/2}} \quad \sin\chi = - \frac{\nu\nu'}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^{1/2}} \quad ,$$

cioè per frequenze d'oscillazione  $\nu$  più piccole della frequenza propria un angolo tra 0 ( $\nu=0$ ) e  $-\pi/2$  ( $\nu=\nu_0$ ), per  $\nu$  più grandi di  $\nu_0$  un angolo tra  $-\pi/2$  e  $-\pi$ . Questa oscillazione genera ora un'onda piana secondaria

$$E = -(2\pi e\mathcal{K}'/c)\xi i\nu e^{-i\nu z/c} \quad (3)$$

che perciò ha la formula

$$E = -(2\pi e^2\mathcal{K}'/mc) \frac{i\nu}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu\nu'} \mathcal{E}_x \quad (4)$$

La sua ampiezza è

$$(2\pi e^2\mathcal{K}'/mc) \frac{\nu}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^{1/2}} \mathcal{E}_{0x} \quad ,$$

l'angolo di cui la fase anticipa è dato da

$$\psi = \chi - \pi/2 \quad .$$

L'onda risultante si può rappresentare graficamente nel modo più intuitivo con il metodo, usuale in elettrotecnica, del "diagramma vettoriale rotante". Poichè tutte le quantità hanno la forma  $\text{cost.} e^{i\nu t}$ , per indicare un vettore si disegna per esempio un tratto orizzontale di una lunghezza che corrisponda al valore

dell'ampiezza. Quantità che abbiano un angolo di fase  $\psi$  rispetto al suddetto saranno disegnate come vettori inclinati rispetto ad esso di quest'angolo, e sommate vettorialmente. La somma vettoriale rappresenta allora la quantità risultante in ampiezza ed angolo di fase (per vederlo, si pensi il piano come piano dei numeri complessi).

Se facciamo così, e tracciamo  $\mathcal{E}$  verso destra, notiamo quanto segue: il vettore dell'onda secondaria  $E$  è sempre verso sinistra ( $-\pi/2 > \psi > -3\pi/2$  ovvero  $3\pi/2 > \psi > \pi/2$ ); l'ampiezza dell'onda risultante è sempre minore di quella della primaria [assorbimento]<sup>5</sup>, ed è al minimo per  $\psi = -\pi$ , cioè  $\chi = -\pi/2$ ,  $\nu = \nu_0$ , quando le fasi delle onde primaria e secondaria sono opposte. Per  $\nu < \nu_0$   $\chi$  è compreso tra 0 e  $-\pi/2$ , quindi  $\psi$  tra  $-\pi/2$  e  $-\pi$ ; l'onda risultante resta indietro rispetto alla primaria di un angolo  $2\pi\Delta\varphi$ .

Quando si segua sul nostro disegno l'andamento al crescere della frequenza, si vede in dettaglio assai bene il comportamento dell'indice di rifrazione. Con il crescere della frequenza dapprima  $\psi$  diminuisce lentamente da  $-\pi/2$  a  $-\pi$ , cioè il vettore dell'onda secondaria si inclina verso sinistra rispetto alla direzione della verticale (da 1 a 2), e contemporaneamente la sua lunghezza cresce. Pertanto anche lo spostamento di fase  $2\pi\Delta\varphi$  dell'onda risultante assume valori negativi sempre più grandi, cioè il suo vettore resta sempre più indietro rispetto a quello primario (dispersione normale). Quando però  $\psi$  si approssima al valore  $-\pi$ , cioè il vettore dell'onda secondaria è assai inclinato a sinistra (3) ovvero le fasi delle onde primaria e secondaria sono quasi opposte,  $\Delta\varphi$  diminuisce al crescere ulteriore di  $\nu$  (dispersione anomala), finchè per  $\nu = \nu_0$  l'onda risultante ha la stessa direzione della primaria,  $\Delta\varphi = 0$ , ed  $n$  è uguale a 1, il che corrisponde di fatto al centro della riga di assorbimento. Quando la frequenza cresce oltre  $\nu_0$ , il vettore dell'onda secondaria viene nel quadrante superiore (punto 4, tra  $-\pi$  e  $-3\pi/2$ , ovvero equivalentemente, tra  $\pi/2$  e  $\pi$ ),  $\Delta\varphi$  è positivo, l'onda risultante precede la primaria, la velocità di fase diventa maggiore di  $c$ , l'indice di rifrazione minore di 1.

---

<sup>5</sup> vedi pag. 345 in alto.

Appare quindi come se l'onda primaria, a prescindere dall'assorbimento, avesse fatto nello strato un salto di fase  $2\pi\Delta\varphi$  all'indietro, ovvero in altre parole, come se la fase nello strato fosse stata fermata per il tempo  $2\pi\Delta\varphi/\nu^6$ . La ridotta velocità di propagazione della fase risulta dunque dal fatto che essa compie in ogni strato di risonatori un salto all'indietro di  $2\pi\Delta\varphi$ .

L'ampiezza dell'onda risultante non è più grande di quella della primaria, purchè l'ampiezza dell'onda secondaria non sia molto grande (nella nostra formula si presuppone la condizione  $(2\pi e^2 \mathfrak{K}'/mc) < 2\nu'$  per la sviluppabilità della radice). -

Che la nostra trattazione coincida con la consueta formula di dispersione, lo si vede nel modo seguente. In un corpo con l'indice di rifrazione complesso  $\mathbf{n}$  un'onda piana si propaga secondo la legge:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\nu(t - \mathbf{n}z/c)} = \mathfrak{E}_0 e^{i\nu(t - z/c) - i\nu(\mathbf{n}-1)z/c} .$$

Consideriamo un tratto  $z$  piccolo, possiamo quindi sviluppare e otteniamo

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \left[ 1 - i\nu(\mathbf{n}-1)z/c \right] e^{i\nu(t - z/c)} .$$

Abbiamo quindi accanto all'onda primaria  $\mathfrak{E}_0 e^{i\nu(t - z/c)}$  un'onda secondaria generata in questo tratto

$$- \mathfrak{E}_0 i\nu(z/c)(\mathbf{n}-1) e^{i\nu(t - z/c)} .$$

Se l'indice di rifrazione è vicino ad 1, cioè se la distribuzione dei risonatori è abbastanza poco densa ovvero se il loro numero  $\mathfrak{K}$  per  $\text{cm}^3$  è abbastanza piccolo, si ottiene (Voigt, l.c.)

$$\mathbf{n}-1 = \frac{2\pi\mathfrak{K}e^2}{m(\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu\nu')} , \quad (5)$$

quindi l'onda secondaria sarà

---

<sup>6</sup>Per l'acqua ( $n=1,33$ ) e per luce visibile la sosta in uno strato molecolare dura  $\approx 10^{-18}$  sec.

$$- \mathcal{E}_0 i\nu \mathfrak{K} z (2\pi e^2/mc) \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu\nu'} e^{i\nu(t-z/c)} .$$

$\mathfrak{K}z$  è il numero di risonatori che si trovano in una sezione di  $1 \text{ cm}^2$  dello strato considerato, quindi nel caso del nostro strato piano è uguale al nostro  $\mathfrak{K}'$ . Ma allora l'ultima formula sarà identica alla (4).

2. *Propagazione dell'energia.* Per la velocità di propagazione dell'energia, in contrasto con quanto avviene per la propagazione della fase considerata finora, è determinante un'altra quantità, la "velocità di gruppo"  $U^7$ . Definiremo in analogia con il solito indice di rifrazione  $n$  una quantità

$$n' = c/U .$$

Secondo la definizione della velocità di gruppo si ha

$$n' = n + \nu dn/d\nu . \quad (6)$$

Per la regione nella quale vale l'approssimazione finora assunta  $n-1 \ll 1$  risulta

$$n' = 1 + (2\pi e^2 \mathfrak{K}/m) \frac{(\nu_0^2 + \nu^2) [(\nu_0^2 - \nu^2)^2 - \nu'^2 \nu^2]}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2]^2} . \quad (7)$$

A differenza di  $n$  questa quantità è sempre maggiore di 1 - altrimenti potrebbe aversi una propagazione dell'energia con velocità superiore a  $c$  - con l'eccezione della riga di assorbimento stessa, più precisamente della regione per la quale  $|\nu_0 - \nu| < \nu'\nu/(\nu_0 + \nu)$ . Ma nell'intorno immediato della riga di assorbimento, come ha mostrato la discussione più precisa di Sommerfeld e Brillouin<sup>8</sup>, la velocità di propagazione dell'energia  $U'$  non è

<sup>7</sup>O. Reynolds, Nature 23 August 1877, Scient. Papers I, 198; Lord Rayleigh, Nature **24**, 382 (1881); **25**, 52 (1881); A. Schuster, Nature **33**, 439 (1886).

<sup>8</sup>A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **44**, 177 (1914); L. Brillouin, ibidem, 203.

più data dalla (6);  $c/U'$  risulta uguale a 1 nel centro della riga spettrale e cresce da ambo i lati. Per questa regione però non è disponibile una rappresentazione con una formula, ma solo una numerica; questa tuttavia la si può dare solo con una certa arbitrarietà, poichè nella propagazione in un mezzo dispersivo un treno d'onde limitato non si instaura con intensità piena in un batter d'occhio. Assumeremo in generale come rapporto della velocità della luce  $c$  con la velocità di propagazione in un mezzo dispersivo:

$$n' = 1 + (2\pi e^2 \mathcal{K}/m) \frac{(\nu_0^2 + \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)^2}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2]^2} . \quad (8)$$

Lontano dalla riga di assorbimento questa coincide in pratica completamente con la (7), poichè ivi è  $\nu'^2 \nu^2 \ll (\nu_0^2 - \nu^2)^2$ , e all'interno della riga di assorbimento appare anche il comportamento richiesto [per  $n'-1$ , annullamento per  $\nu = \nu_0$  e da ambo i lati crescita iniziale simmetrica]<sup>9</sup>].

Come nel caso della fase possiamo quindi esprimere con una formula, che in uno strato molecolare l'energia sarà trattenuta in media per il tempo

$$(2\pi e^2 \mathcal{K}'/mc) \frac{(\nu_0^2 + \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)^2}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2]^2} . \quad (9)$$

3. *Diffusione e assorbimento.* Ora si deve parlare della quantità  $\nu'$ , che è determinante per l'assorbimento: per il verificarsi di quest'ultimo esistono due teorie. In quella di Planck<sup>10</sup> si immagina che la forza di smorzamento sia connessa semplicemente con la reazione di radiazione,

---

<sup>9</sup>Se si mette in dubbio questo risultato della teoria classica non è più possibile trarre ulteriori conclusioni.

<sup>10</sup>M. Planck, Berl. Ber. p. 470 (1902); p. 480 (1903); p. 740 (1904); p. 382 (1905).

$$\nu' = 2e^2 \nu^2 / (3mc^3) . \quad (10)$$

Allora non esiste alcun "vero assorbimento", la perdita d'energia complessiva della radiazione primaria è determinata dalla radiazione diffusa. La formula d'interferenza dà che  $\mathfrak{K}$  molecole irregolarmente disposte diffondono  $\mathfrak{K}$  volte più di una sola, in accordo con la formula per l'energia diffusa

$$(4\pi\mathfrak{K}e^2/mc) \frac{\nu^2 \nu'}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2} . \quad (11)$$

La diffusione richiesta si verifica in effetti per gas abbastanza rarefatti<sup>11</sup>, e in corrispondenza la larghezza delle righe spettrali è determinata solo dall'effetto Doppler [l'allargamento causato da questo è grande rispetto a  $\nu'$  dato dalla (10)], di modo che in realtà con rarefazione sufficiente non risulta aver luogo alcun vero assorbimento.

Dalla larghezza di riga misurata si può quindi solo dedurre un limite superiore per  $\nu'$  che è del tutto compatibile col fatto che la (10) sia soddisfatta per lo meno come ordine di grandezza ( $10^8 \text{ sec}^{-1}$ ). Se si introduce però un gas estraneo di sufficiente densità<sup>12</sup>, si annulla la "radiazione di risonanza" e si ha vero assorbimento (in che modo sia influenzata anche la diffusione al di fuori della riga di assorbimento, non risulta provato) cioè trasformazione in energia cinetica della molecola urtante. Ciò corrisponde alla teoria di H.A. Lorentz<sup>13</sup>, secondo la quale lo smorzamento è determinato dagli urti tra molecole, e  $\nu' = 2/(\text{tempo tra due urti})$ . Effettivamente gli esperimenti danno anche la corretta dipendenza dalla densità, ma per grandi valori assoluti.

---

<sup>11</sup>W. Wood, Phys. Zeitschr. **13**, 362 (1912); vedi anche il rapporto di G. Joos, Handb. d. Radiol. 6. Bd., Leipzig (1924).

<sup>12</sup>W. Wood, l.c.; Ch. Füchtbauer e W. Hofmann, Ann. d. Phys. **43**, 96 (1914); Ch. Füchtbauer, G. Joos e O. Dinkelacker, ibidem **71**, 204 (1923).

<sup>13</sup>H.A. Lorentz, Proc. Amsterdam **6**, 506, 555, (1897-1898); Theory of Electrons (Leipzig 1909), p. 141.

## II. L'interpretazione quantistica

*I. Formulazione dell'ipotesi quantistica.* Secondo l'esposizione ora data della teoria classica è chiaro come si debba intraprendere la traduzione nel modo d'esprimersi quantistico, quando si assuma la luce come una corrente di quanti di luce emessi direzionalmente.

G. Wentzel ha mostrato che con questa ipotesi si può introdurre proprio come nella teoria classica una "fase", che regola il processo di interferenza e le relazioni geometriche, formalmente proprio allo stesso modo che nella teoria ondulatoria; il fatto di un indice di rifrazione diverso da 1 significa allora anche qui che la "fase della teoria dei quanti" subisce all'attraversamento di uno strato molecolare un salto, solo non si tratterà come per l'onda di un effetto che avviene ogni volta con certezza, ma di un valor medio determinato con una legge di probabilità.

Corrispondentemente la maggior lentezza della propagazione dell'energia deve significare<sup>14</sup> che i quanti sono trattenuti negli atomi per un intervallo di tempo, e così in media volano più lentamente che nel vuoto.

La diffusione infine significa che non tutti i quanti rivoltano via nella direzione originaria.

Ora secondo la formulazione originaria dell'ipotesi dei quanti un quanto può essere assorbito da un atomo solo quando il suo  $\nu$  sia uguale ad una frequenza propria  $\nu_0$ , cioè se la sua energia  $h\nu/2\pi$  è proprio uguale a quella  $h\nu_0/2\pi$ , che è necessaria per innalzare un elettrone da un'orbita stazionaria (energia  $U^{(0)}$ ) all'altra (energia  $U^{(1)} = U^{(0)} + h\nu_0/2\pi$ ).

Ciò tuttavia lascerebbe non chiarito come l'accoppiamento di assorbimento e dispersione potrebbe sussistere in modo corretto anche al di fuori della riga d'assorbimento. Dobbiamo pertanto modificare un po' il postulato di Bohr e formularlo così: le orbite calcolate secondo la prescrizione quantistica consueta sono

---

<sup>14</sup>*Idee analoghe ha proposto F. Weigert, Zeitschr. f. phys. Chem.* **101**, 414 (1922).

le sole stazionarie nel senso che esse hanno tempi di vita dell'ordine di grandezza di  $10^{-8}$  sec.. Oltre a questi sono possibili anche degli stati intermedi, che l'atomo può assumere all'arrivo di un quanto di luce sbagliato; questi hanno solo tempi di vita di un ordine di grandezza al confronto trascurabile, per luce visibile  $\approx 10^{-15}$  sec..

2. *Le quantità classiche nel modo di espressione della teoria dei quanti.* Rappresenteremo ora in formule quanto finora espresso a parole. Vi sia un piano ricoperto da  $\mathcal{K}'$  atomi per  $\text{cm}^2$ , vi siano  $n/n'$  di tali piani per cm, ed ancora  $\mathcal{K}$  indichi il numero di atomi in  $1 \text{ cm}^3$ . Su di essi cada un'onda piana, cioè una corrente di quanti di luce d'energia  $h\nu/2\pi$  che volano paralleli, e precisamente  $J$  quanti al secondo per  $\text{cm}^2$ , di modo che l'intensità della luce sia  $Jh\nu/2\pi$ . La probabilità che un quanto determinato sia assorbito nello strato da un atomo sia  $q\mathcal{K}'$ , quindi il numero dei quanti che saranno assorbiti al secondo in  $1 \text{ cm}^3$  sarà  $\mathcal{K}qJ$  (quando  $\mathcal{K}\cdot q < 1$ ).  $q$  è quindi una specie di "sezione di cattura" dell'atomo,  $1/\mathcal{K}q$  una sorta di lunghezza di libero cammino del quanto di luce, definita in modo puramente formale.

Di questi quanti assorbiti la frazione  $w_E$  sia riemessa nella direzione originaria, la frazione  $1 - w_E$  sia diffusa lateralmente. Il tempo medio tra assorbimento ed emissione sia  $\tau_E$  per i quanti emessi in avanti,  $\tau_s$  per quelli diffusi. Infine  $\Delta\varphi$  indichi il salto di fase secondo la teoria dei quanti, che per un quanto di luce emesso in avanti è associato alla sua sosta media nell'atomo, e che secondo Wentzel si calcola dalla variazione delle proprietà meccaniche dell'atomo durante questo tempo. Allora la variazione di fase media, che i quanti di luce subiscono al passaggio attraverso uno strato molecolare è

$$2\pi\mathcal{K}'q w_E \Delta\varphi ,$$

quindi per 1 cm di cammino la differenza rispetto al vuoto

$$2\pi\mathcal{K}q w_E \Delta\varphi = (n-1)\nu/c . \quad (12)$$

Corrispondentemente il ritardo per il raggio è in media in uno strato molecolare

$$\mathcal{K}'q w_E \tau_E ,$$

quindi per il cammino di 1 cm

$$\mathfrak{K} q_w \tau_E = (n'-1)/c . \quad (13)$$

Se si divide la (12) per la (13) si trova

$$2\pi\Delta\varphi = \frac{n-1}{n'-1} \nu \tau_E . \quad (14)$$

La frazione  $\mathfrak{K}S$  dell'energia diffusa è

$$S = \mathfrak{K}q(1 - w_E) . \quad (15)$$

La sostituzione dei valori (5) (parte reale di  $n-1$ ), (8), (11) nelle (13), (14), (15) dà

$$q_w \tau_E = (2\pi e^{2\bar{\mathfrak{K}}}/mc\mathfrak{K}) \frac{(\nu_0^2 + \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)^2}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^2} , \quad (13')$$

$$\Delta\varphi = \frac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}{(\nu_0^2 + \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)} \frac{\nu}{2\pi} \tau_E . \quad (14')$$

La frazione d'energia diffusa per atomo è

$$S = Q(1-w_E) = (4\pi e^{2\bar{\mathfrak{K}}}/mc\mathfrak{K}) \frac{\nu^2 \nu'}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2} . \quad (15')$$

$\bar{\mathfrak{K}}$ , il numero di risonatori o di elettroni che appare nella teoria classica, non è in generale uguale al numero degli atomi. La frazione  $\bar{\mathfrak{K}}/\mathfrak{K}$  va determinata empiricamente, circostanza della quale Reiche e Ladenburg<sup>15</sup> hanno tenuto conto mediante l'introduzione degli "oscillatori equivalenti".

Le quantità  $\nu$  e  $\nu_0$  dal punto di vista della teoria dei quanti sono da considerarsi puramente come abbreviazioni della frazione  $2\pi(\text{energia del quanto})/h$ .

3. *Caratteristica generale delle quantità che intervengono.* Per poter trarre conclusioni sul tipo di leggi probabilistiche che regolino la ripartizione dei quanti trattenuti tra emissione nella direzione originaria e diffusione, riassumiamo ciò che sappiamo qualitativamente sui tempi d'attesa.

---

<sup>15</sup>R. Ladenburg e F. Reiche, *Naturwissenschaften* **11**, 584 (1923).

I. Radiazione diffusa. 1. Fuori dalla riga spettrale il tempo d'attesa  $\tau_s$  del quanto diffuso dev'essere assai piccolo, in modo da poter trattare lo stato come non stazionario.

2. Entro la riga spettrale, secondo i noti esperimenti di W. Wien<sup>16</sup> il tempo d'attesa dev'essere dell'ordine di grandezza di  $10^{-8}$  sec, quindi  $\approx 1/\nu'$ , sebbene non paia accordarsi con la dipendenza dalla frequenza richiesta classicamente secondo la (10).

Assumiamo poi, in accordo con la teoria classica e in contrasto con Ladenburg-Reiche, che i processi all'interno e all'esterno della riga spettrale siano in linea di principio omogenei.

II. Quanti emessi in avanti: l'ammontare del salto di fase  $|\Delta\varphi|$  in linea di principio non può essere maggiore di 1, cosa che secondo la formula (14') pone al tempo di sosta  $\tau_E$  un limite superiore.

1. Fuori dalla riga spettrale per la (14') dev'essere

$$\nu\tau_E/2\pi < 1 ,$$

quindi

$$\tau_E < 2\pi/\nu .$$

Questa condizione ha come conseguenza che gli stati corrispondenti si possono considerare di durata nulla rispetto a quelli stazionari con tempo di vita  $10^{-8}$  sec..

2. All'interno della riga spettrale: poichè nella (14')  $\nu_0^2 - \nu^2$  sta al denominatore,  $\tau_E$  deve annullarsi per  $\nu = \nu_0$  almeno al prim'ordine. Se si considera la formula (13'), secondo la quale  $q w_E \tau_E$  si annulla al second'ordine, poichè  $q$  deve rimanere finito [allora la diffusione (15') rimane finita], risulta che esistono solo due possibilità<sup>17</sup>:

---

<sup>16</sup>W. Wien, Ann. .d. Phys. **60**, 597 (1919); **66**, 229 (1921).

<sup>17</sup>Quand'anche si prescinda completamente dalla forma particolare della (13') e si tenga presente solo il comportamento qualitativo, ne risulta che  $n-1$  cambia di segno e attraversa l'asse delle ascisse rettilineamente, che  $n'-1$  non cambia segno ed è tangente all'asse delle ascisse, che  $w_E$  si annulla al massimo al prim'ordine, e quindi  $\tau_E$  almeno al prim'ordine.

- a)  $\tau_E$  e  $w_E$  si annullano entrambi al prim'ordine,  
 b)  $\tau_E$  si annulla al second'ordine,  $w_E$  rimane finito.

Che cosa possiamo concludere ora da questi risultati riguardo alle leggi probabilistiche?

Con la validità simultanea di  $I_2$  e di  $II_2$  (nella riga spettrale  $\tau_s$  è grande,  $\tau_E = 0$ ) si esclude un'ipotesi analoga alla legge del decadimento duale nella radioattività (ramificazione radioattiva), poichè con questa legge risulta lo stesso tempo di vita per entrambe le possibilità di decadimento. Se d'altra parte non si ammettesse che per i quanti emessi in avanti e per i quanti diffusi valgano leggi completamente indipendenti, risulterebbe che un quanto dal momento in cui viene trattenuto è già predestinato, se debba essere diffuso oppure emesso in avanti, e pertanto delle due possibilità menzionate da ultimo quella indicata con b) non sarebbe praticabile, poichè si richiederebbe che il rapporto del numero dei quanti emessi in avanti rispetto al numero di quelli diffusi resti finito, mentre il tempo di vita dei primi si annulla al second'ordine e quello dei secondi è finito.

Invece il caso a) permette un'interpretazione secondo la teoria della probabilità; infatti ora il numero dei quanti emessi in avanti e anche il loro tempo di vita si annullano al prim'ordine per  $\nu = \nu_0$ , mentre per i quanti diffusi entrambe le quantità restano finite. Si farà allora l'ipotesi seguente: la probabilità che un atomo emetta nell'intervallo di tempo  $dt$  il quanto da esso trattenuto è  $\beta dt$ ; abbiamo la legge del decadimento radioattivo. Quanto più breve è il tempo che s'è trattenuto nell'atomo il quanto or ora emesso, tanto più è probabile che esso ritorni nella direzione originaria, e precisamente la frazione degli atomi in cui questo accade è  $e^{-\gamma t}$ , mentre la frazione  $1 - e^{-\gamma t}$  sarà diffusa;  $t$  indica qui il tempo che passa tra l'assorbimento e la riemissione del quanto da parte dell'atomo,  $1/\gamma$  misura per così dire la memoria dell'atomo o del quanto per la direzione d'arrivo.

4. *Introduzione della legge probabilistica e calcolo del tempo di vita.* Poichè nel tempo  $\Delta t$  in regime stazionario vengono assorbiti  $\mathfrak{K}q\Delta t$  quanti ed altrettanti vengono emessi, la frazione

$$e^{-\beta t} \beta dt$$

determina quelli rimasti al tempo  $t$  che vengono emessi nell'intervallo  $dt$ . Di questo gruppo la frazione  $e^{-\gamma t}$  verrà emessa in avanti, la frazione  $1 - e^{-\gamma t}$  verrà diffusa.

Il numero complessivo dei quanti diffusi in  $1 \text{ cm}^3$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è quindi

$$\mathfrak{K}_{qJ\Delta t} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} (1 - e^{-\gamma t}) \beta dt = \mathfrak{K}_{qJ\Delta t} \left(1 - \frac{\beta}{\beta + \gamma}\right) = \mathfrak{K}_{qJ\Delta t} \frac{\gamma}{\beta + \gamma} ;$$

quindi secondo la (15) risulta

$$q(1 - w_E) = q \frac{\gamma}{\beta + \gamma} . \quad (15'')$$

Il tempo medio di sosta del quanto diffuso è

$$\tau_s = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\beta t} (1 - e^{-\gamma t}) \beta dt}{\int_0^{\infty} e^{-\beta t} (1 - e^{-\gamma t}) \beta dt} = \frac{\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\beta^2}{(\beta + \gamma)^2}\right)}{1 - \frac{\beta}{\beta + \gamma}} = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \gamma}\right) . \quad (16)$$

Il numero dei quanti emessi in avanti risulta essere dalla (15'')

$$q w_E = q \frac{\beta}{\beta + \gamma} , \quad (17)$$

il loro tempo medio di sosta

$$\tau_E = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\beta t} e^{-\gamma t} \beta dt}{\int_0^{\infty} e^{-\beta t} e^{-\gamma t} \beta dt} = \frac{1}{\beta + \gamma} , \quad (18)$$

quindi la quantità (13') che dà una misura del ritardo sarà

$$q w_E \tau_E = q \frac{\beta}{(\beta + \gamma)^2} . \quad (13'')$$

Dalla conclusione generale che abbiamo dimostrato in 3. segue ora che alla frequenza propria dobbiamo scegliere  $\tau_E = 0$ , quindi  $\beta + \gamma$  infinito, e più precisamente del prim'ordine. Poichè per la (15'')

$\gamma/(\gamma+\beta)$  non può annullarsi (poichè la diffusione resta finita) allora il fatto che  $\beta+\gamma$  vada all'infinito dev'essere causato da  $\gamma$ . Per  $\nu$  piccoli dovrà essere inoltre  $1/\tau_E = \beta+\gamma \approx \nu$ . Per soddisfare la (14') poniamo ora:

$$1/\tau_E = \beta+\gamma = \nu \frac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}{(\nu_0^2 + \nu^2) |\nu_0^2 - \nu^2|} \frac{1}{f} , \quad (19)$$

legge che soddisfa tutte le condizioni se  $f$  è una funzione adimensionale di  $\nu$ , che secondo la (24) per  $\nu$  grandi non può essere molto piccola, e d'altronde non può mai essere maggiore di  $2\pi$ , poichè secondo la (14') sarà

$$\Delta\varphi = \pm f/2\pi , \quad (15'')$$

sempre<sup>18</sup> con il segno di  $\nu_0^2 - \nu^2$ .

La divisione della (13') per la (15') e la sostituzione del valore di  $w_E$  dalla (17) dà

$$\frac{w_E}{1-w_E} \tau_E = \frac{\beta}{\gamma(\beta+\gamma)} = \frac{(\nu_0^2 + \nu^2) |\nu_0^2 - \nu^2|^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2} \cdot \frac{1}{2\nu^2 \nu'} .$$

Da qui tenendo conto della (19) si può calcolare  $\beta$  e si trova

$$\beta = \frac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}{|\nu_0^2 - \nu^2| + \nu \nu' 2f} \frac{\nu}{\nu_0^2 + \nu^2} \frac{1}{f} . \quad (20)$$

Ossia: il tempo medio di decadimento è per  $\nu \gg (\ll) \nu_0$   $1/\beta \approx f/\nu$ , per  $|\nu_0 - \nu| < \nu'$  (nella riga spettrale)  $4f^2/\nu'$ .

Inoltre la quantità  $\gamma$ , il cui reciproco è una misura per la coerenza (emissione in avanti), è

$$\gamma = \frac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}{|\nu_0^2 - \nu^2| + 2f\nu\nu'} \frac{2\nu^2 \nu'^2}{(\nu_0^2 + \nu^2) |\nu_0^2 - \nu^2|} . \quad (21)$$

Il suo ordine di grandezza è per  $\nu < \nu_0$   $\gamma \approx 2\nu^2 \nu' / \nu_0^2$  (cioè il tempo

---

<sup>18</sup>Questi salti dello spostamento di fase  $\Delta\varphi$  da  $+f/2\pi$  a  $-f/2\pi$  al passare di  $\nu$  attraverso  $\nu_0$  corrispondono al requisito di Wentzel, che per  $\nu = \nu_0$  la transizione non meccanica avvenga con una variazione di fase  $\Delta u_k = 0$ , l.c..

corrispondente è dell'ordine  $10^{-8} \nu_0^2/\nu^2$ , per  $\nu > \nu_0$   $\gamma \approx 2\nu'$ , nella riga spettrale  $\gamma = \nu'^2/(4|\nu_0 - \nu|f)$ .

Il tempo di sosta del quanto diffuso sarà:

$$\tau_s = 2 \frac{\nu_0^2 + \nu^2}{\nu} f \frac{|\nu_0^2 - \nu^2| + 2\nu\nu'f}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}, \quad (22)$$

cioè per  $\nu \gg (\ll) \nu_0$   $\tau_s \approx 2f/\nu$ , per  $|\nu - \nu_0| < \nu'$   $\tau_s \approx 4f^2/\nu'$ .

Per la quantità  $q$ , la "sezione di cattura media" di un atomo, si trova

$$q = \frac{2\pi e^2}{mc} \frac{\bar{\kappa} \nu}{\bar{\kappa} f} \frac{|\nu_0^2 - \nu^2| + 2\nu\nu'f}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}, \quad (23)$$

cioè, per la frequenza propria,  $q = (\pi e^2 4\bar{\kappa})/(mc\nu'\bar{\kappa})$  ovvero<sup>19</sup>, con la (10),  $q = (3\bar{\kappa}/2\pi\bar{\kappa})[\text{lunghezza d'onda}]^2$ , quindi in generale un'espressione sostanzialmente più grande della sezione atomica. Molto lontano dalla frequenza propria risulta

$$q = \frac{2\pi e^2 \bar{\kappa}}{mc\bar{\kappa}} \frac{\nu}{|\nu_0^2 - \nu^2|f} = 2,814 \cdot 10^{-13} (\text{lungh. d'onda}) \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa} f} \frac{\nu^2}{|\nu_0^2 - \nu^2|}; \quad (24)$$

quest'espressione è minore della sezione atomica.

Abbiamo finora sempre parlato soltanto di una singola oscillazione propria. Quando se ne hanno più d'una, nella nostra approssimazione si deve sempre sommare su tutte. Ciò si può interpretare solo nel senso che un atomo assuma con probabilità diverse  $q^{(i)}$  le frequenze proprie  $\nu_0^{(1)}$  o  $\nu_0^{(2)}$  e così via.

L'azione mutua degli atomi, che si manifesta in primo luogo nella comparsa di  $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$  [per la quale scriviamo  $2(n-1)$ ], e poi ancora nella comparsa della forza di Lorentz, che fa comparire  $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$  al posto dell'espressione anzidetta, per ora non la possiamo ancora trattare, ma dobbiamo limitarci ai gas rarefatti. Parimenti non possiamo render conto del modo in cui si realizza l'allargamento dovuto alla pressione. Le nostre formule restano tuttavia formalmente giuste se, invece di identifica-

---

<sup>19</sup>Vedi anche L.S. Ornstein e H.C. Burger, Zeitschr. f. Phys. **20**, 345 (1924).

re  $\nu'$  con la (10), lo poniamo uguale al numero degli urti<sup>20</sup> moltiplicato per un fattore con la dimensione d'un numero puro ed il valore da 20 a 50<sup>21</sup> [più precisamente uguale alla somma di questa quantità e dell'espressione (10), che però al confronto sparisce]. Si può anche capire che  $\gamma$ , la rapidità della "perdita di memoria" (21), sarà proporzionale a questo numero d'urti, ma non sono riuscito a chiarire il modo in cui  $\nu'$  interviene nella formula.

5. *Questioni energetiche.* Si potrebbe obiettare all'intera interpretazione della dispersione che con l'arresto dei quanti aventi tutti i valori di  $\nu$  possibili il calore specifico dei corpi sarebbe accresciuto e così si giungerebbe a contraddire le ben fondate formule della statistica quantistica. Ma non è così; quei quanti che vengono riemessi in avanti, non vanno computati nell'energia del corpo, ma in quella della radiazione, poichè secondo Planck<sup>22</sup> la densità di radiazione è  $\rho = \mathfrak{K}/q$ , dove  $q$  è la velocità di propagazione. Se la identifichiamo con la velocità di propagazione dell'energia, la differenza  $\mathfrak{K}/q - \mathfrak{K}/c = \mathfrak{K}(n'-1)/c$  sarà proprio uguale all'energia dei quanti che saranno emessi con ritardo. Invece i quanti che con ritardo saranno diffusi danno proprio quell'energia media, che secondo la statistica quantistica appartiene al livello

$$U^{(1)} = U^{(0)} + h\nu_0/2\pi ;$$

secondo i calcoli fatti finora (per esempio Reiche-Ladenburg), che separano nettamente la diffusione fuori dalla riga spettrale e l'assorbimento nella stessa, quest'energia sarebbe fornita solo dai quanti  $h\nu_0/2\pi$ . Secondo la teoria della radiazione termica essi sono tuttavia di numero infinitamente piccolo, sicchè si deve pure tirare in ballo una cooperazione di frequenze immediatamente

---

<sup>20</sup>vedi per esempio H.A. Lorentz, *Theory of Electrons* (Leipzig 1909), p. 141.

<sup>21</sup>Ch. Füchtbauer e W. Hofmann, *Ann. d. Phys.* **43**, 96 (1914).

<sup>22</sup>M. Planck, *Theorie der Wärmestrahlung*, 1. Aufl. (Leipzig 1906), p. 22.

vicine. Nel nostro calcolo questa cooperazione si estende sull'intero spettro, ma solo la larghezza della riga coopera in modo notevole, e ciò sia per il comportamento di  $\tau_s$  che per il comportamento di  $q$ . L'intervallo  $d\nu$  contribuisce infatti all'energia complessiva del livello  $U^{(1)}$  per la parte seguente:

$$\frac{p^{(0)} e^{-\frac{U^{(0)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} \frac{h\nu}{2\pi} Jq(1-w_E)\tau_s$$

$$= \rho d\nu \frac{p^{(0)} e^{-\frac{U^{(0)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} \frac{8\pi e^2}{m} \frac{\bar{K}}{K} f \frac{(\nu_0^2 + \nu^2) \nu \nu'}{[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2]^2} \cdot [|\nu_0^2 - \nu^2| + \nu \nu' f] \quad (25)$$

Qui si è posto per  $h\nu J/2\pi$  il valore all'equilibrio radiativo  $c\rho d\nu$  ( $\rho$  densità della radiazione); la frazione

$$\frac{p^{(0)} e^{-\frac{U^{(0)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} = \left[ 1 + \sum_{i>0} \frac{p^{(i)}}{p^{(0)}} e^{-\frac{U^{(i)} - U^{(0)}}{kT}} \right]^{-1}$$

dà quale frazione delle molecole sia nello stato fondamentale appartenente alla riga considerata e deve comparire anche nelle formule per  $n-1$ , per  $n'-1$  e per la diffusione. Per temperature sufficientemente basse  $kT < U^{(i)} - U^{(0)}$  essa è uguale ad 1 con sufficiente precisione.

All'energia complessiva, che si trova per integrazione su tutti i valori di  $\nu$ , contribuisce in pratica solo l'intorno immediato di  $\nu_0$ . Se si esegue il calcolo esattamente come ha fatto Planck<sup>23</sup>, come energia del livello<sup>24</sup>  $U^{(1)}$  si ottiene

---

<sup>23</sup>Planck, l.c. p. 123.

<sup>24</sup>Per la precisione anche i  $\nu$  piccoli danno un contributo esattamente come nella teoria classica, che però anche Planck trascura e che sparisce al confronto con  $kT$ .

$$\frac{8\pi e^2}{m\nu'} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} f(1+\pi f/2) \rho(\nu_0) \frac{p^{(0)} e^{-\frac{U^{(0)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} . \quad (26)$$

Qui bisogna sostituire ad  $f$  ed a  $\rho$  i loro valori per  $\nu=\nu_0$ . Se si assume come valida per  $\rho(\nu_0)$  la legge della radiazione di Wien

$$\rho = \frac{h\nu^3}{2\pi^3 c^3} e^{-\frac{h\nu}{2\pi kT}} ,$$

se si tiene conto che  $h\nu_0/2\pi = U^{(1)} - U^{(0)}$ , e se inoltre si pone come generalizzazione della (10)

$$\nu' = 2e^2 \nu^2 \Phi(\nu) / (3mc^3) , \quad (10')$$

dove  $\Phi$  è adimensionale e sempre per  $\nu=\nu_0$  è dell'ordine di grandezza 1, l'energia media di  $U^{(1)}$  sarà

$$\frac{12}{\pi} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} \frac{f}{\Phi} (1+\pi f/2) \frac{h\nu_0}{2\pi} \frac{p^{(0)} e^{-\frac{U^{(1)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} . \quad (27)$$

Perchè si mantenga l'equilibrio termico, per il quale questa quantità dev'essere

$$\frac{h\nu_0}{2\pi} \frac{p^{(1)} e^{-\frac{U^{(1)}}{kT}}}{\sum p^{(i)} e^{-\frac{U^{(i)}}{kT}}} ,$$

deve valere

$$p^{(0)} \frac{12}{\pi} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} \frac{f}{\Phi} \{1+\pi f/2\} = p^{(1)} . \quad (28)$$

Se al posto di quella di Wien si vuole utilizzare la legge della radiazione di Planck, per la quale la densità è maggiore con rapporto

$$\left[ 1 - e^{-\frac{h\nu_0}{2\pi kT}} \right]^{-1} : 1 ,$$

ed arrivare tuttavia allo stesso valore dell'energia, si deve moltiplicare l'espressione (26) per

$$1 - e^{-\frac{h\nu}{2\pi kT}},$$

in modo del tutto analogo a come fatto da Einstein<sup>25</sup> in considerazioni simili. Ciò può essere interpretato in tre modi: si associa il fattore a  $1/\nu'$ , cioè a  $\Phi^{-1}$ . Allora ciò significa che la quantità  $\nu'$  si comporta come la probabilità di decadimento per Einstein, per il quale accanto al decadimento spontaneo compare un decadimento proporzionale alla densità della radiazione, di modo che il rapporto tra il decadimento complessivo e quello spontaneo è proprio dato dal fattore

$$\left[1 - e^{-\frac{h\nu}{2\pi kT}}\right]^{-1}.$$

Se facciamo questa associazione con  $\nu'$ , si hanno due vantaggi: in primo luogo  $n$  ed  $n'$  fuori dalla banda d'assorbimento non saranno mutati; infatti il valore di  $\nu'$  non ha ivi praticamente alcuna influenza; ciò è in accordo con il fatto sperimentale che l'indice di rifrazione è indipendente dall'intensità della luce (la radiazione diffusa, nella quale  $\nu'$  appare come fattore, dovrebbe invece essere relativamente maggiore per intensità della luce più alta). In secondo luogo questo risulta formalmente in accordo preciso con l'incremento di  $\nu'$  tramite gli urti delle molecole del gas ( $I_3$ ).

Il difetto di quest'ipotesi sta nel fatto che  $\nu'$  nella nostra teoria non è in generale una probabilità di decadimento, e non si riesce infatti a capire fisicamente che cosa quest'ipotesi significhi; si trova quindi la stessa difficoltà che avemmo per l'allargamento dovuto alla pressione.

La seconda possibilità consiste nell'associare il fattore

$$1 - e^{-\frac{h\nu}{2\pi kT}}$$

non all'espressione integrata (26), ma già a ogni contributo

---

<sup>25</sup>A. Einstein, Phys. Zeitschr. **18**, 121 (1917).

parziale (25), il che corrisponde, in stretta analogia con Einstein, ad associarlo in generale al tempo di vita  $\tau_s$ . A causa della struttura complessiva delle equazioni ciò significherebbe che sia la probabilità di decadimento  $\beta$  che la rapidità della perdita di memoria  $\gamma$  sarebbero accresciute a causa della radiazione incidente esattamente come per Einstein del fattore

$$\left[ 1 - e^{-\frac{h\nu}{2\pi kT}} \right]^{-1},$$

il che avrebbe come conseguenza che la diffusione sarebbe rigorosamente proporzionale all'intensità della luce incidente, e che l'indice di rifrazione ne dipenderebbe, ma solo per intensità così alte (temperature di radiazione) che le deviazioni della legge di Wien da quella di Planck diventassero percettibili. I noti esperimenti di Lippich<sup>26</sup> e di Ebert<sup>27</sup> sono estesi a regioni troppo limitate per consentire di capire qualcosa in proposito. Infine sarebbe possibile un'associazione con  $q$ ; l'indice di rifrazione e la radiazione diffusa cambierebbero.

Se non abbiamo solo una riga spettrale, ma più d'una, possiamo caratterizzare  $\nu_0$  con un indice inferiore, quello del livello di partenza, ed uno superiore, che contrassegna il livello d'arrivo, ed entrambi gli indici intervengono in tutte le quantità associate alla riga ( $\bar{\kappa}$ ,  $\Phi$ ,  $f$ ). All'energia di un livello contribuiscono allora tutte le righe per le quali il livello considerato è livello d'arrivo, cioè che portano il numero di questo come indice superiore, e nella (28) compare al primo membro la somma su tutte queste quantità.

Con queste considerazioni mi paiono eliminati gli argomenti che Smekal<sup>28</sup> ha opposto alla possibilità di dar conto della dispersione con molecole in quiete, e assicurato l'equilibrio energetico tra materia e radiazione.

---

<sup>26</sup>F. Lippich, Wien. Ber. **77**, 352 (1875).

<sup>27</sup>H. Ebert, Wied. Ann. **32**, 337 (1887).

<sup>28</sup>A. Smekal, Naturwissenschaften **11**, 411, 873 (1923).

6. *Precedenti teorie quantistiche della dispersione.* I primi a collegare la dispersione a considerazioni di teoria dei quanti sono stati Debye<sup>29</sup> e Sommerfeld<sup>30</sup>; essi si avvalgono di quest'ultima solo per determinare il modello imperturbato, ma per il resto calcolano l'influenza dell'onda incidente sugli atomi e la reazione di questa perturbazione sull'onda, cioè l'onda secondaria, in modo classico. Mentre la prima cosa sembra corretta<sup>31</sup>, la seconda porta a contraddizioni, come si manifesta chiaramente nel fatto che allora compaiono nella formula di dispersione le oscillazioni meccaniche attorno all'orbita stazionaria, non le righe di assorbimento. Füchtbauer<sup>32</sup> ha posto la quantità  $\bar{\kappa}/\nu'$  proporzionale alla probabilità di transizione da un'orbita stazionaria all'altra, e Ladenburg<sup>33</sup> ha avanzato delle considerazioni che si avvicinano alle nostre conclusioni dell'ultimo paragrafo. Ladenburg e Reiche<sup>34</sup>, come pure Darwin<sup>35</sup>, partono dall'ipotesi che l'atomo colpito emetta onde sferiche secondarie, che cooperano con la primaria esattamente come nella teoria classica, con la quale quest'ultimo può derivare la formula della dispersione al di fuori della banda d'assorbimento. Infine Smekal<sup>36</sup>, rinunciando al punto di vista dell'onda sferica, indica una connessione tra la diffusione anomala dei raggi Röntgen trovata da Compton e la diffusione ottica, e pertanto con la dispersione.

---

<sup>29</sup>P. Debye, Münch. Ber. 1915, p. 1.

<sup>30</sup>A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 497 (1917).

<sup>31</sup>J.M. Burgers, Het Atoommodell van Rutherford-Bohr, Diss. Leiden, 1918, p. 215 e segg..

<sup>32</sup>Ch. Füchtbauer, Phys. Zeitschr. **21**, 322 (1920).

<sup>33</sup>R. Ladenburg, Zeitschr. f. Phys. **4**, 451 (1920).

<sup>34</sup>R. Ladenburg e F. Reiche, Naturwiss. **11**, 586 (1923).

<sup>35</sup>C.G. Darwin, Proc. Nat. Acad. Washington 25, 1923.

<sup>36</sup>A. Smekal, *l.c.*.

## Sommario

I fenomeni che si manifestano con la propagazione della luce attraverso mezzi dispersivi si possono interpretare anche con quanti di luce discreti al posto di onde continue, se si assume che gli atomi possano trattenere anche quei quanti che non soddisfano la condizione delle frequenze di Bohr, e che li riemettono dopo breve tempo, o di nuovo nella direzione originaria, oppure anche di lato. La sosta dei quanti riemessi in avanti causa il ritardo della propagazione dell'energia, la modifica del moto degli elettroni partecipanti provoca secondo Wentzel l'alterazione della propagazione della fase. Per i tempi di sosta si ha per i quanti che non soddisfano la condizione delle frequenze di Bohr l'ordine di grandezza  $1/\nu$ , per quelli che la soddisfano  $\approx 10^{-8}$  secondi.

Si è mostrato inoltre che l'equilibrio energetico tra radiazione e materia è assicurato.

München, Institut für theor. Physik d. Univers., febbraio 1924.