**Le tranformazioni canoniche nella meccanica quantistica**[1]

P. Jordan a Gottinga

(ricevuto il 27 aprile 1926)

*Vien data una dimostrazione d'una congettura avanzata da Born, Heisenberg e dall'autore, che la trasformazione canonica più generale si può rappresentare nella forma* $P_k = Sp_kS^{-1}$, $Q_k = Sq_kS^{-1}$. *Si mostra inoltre che per trasformazioni del punto le formule classiche restano immutate.*

Una trasformazione canonica $P,Q \to p,q$, dove le $P,Q$ siano rappresentate come funzioni analitiche di $p$ e $q$, cioè definite con addizioni e moltiplicazioni, va considerata canonica nella meccanica quantistica[2] se dalla validità delle regole di commutazione canoniche

$$p_k q_e - q_e p_k = \delta_{ke} \frac{h}{2\pi i}, \quad p_k p_e - p_e p_k = q_k q_e - q_e q_k = 0 \tag{1}$$

per $p,q$ discendono le stesse regole di commutazione per $P,Q$ (e viceversa). Comunicheremo qui una dimostrazione della congettura[3] che la trasformazione canonica più generale si può scrivere nella forma

$$P_k = Sp_kS^{-1}, \; Q_k = Sq_kS^{-1}, \tag{2}$$

che evidentemente in senso inverso è ancora canonica[4]. Osserviamo preliminarmente: se due trasformazioni (con $S = S_1$ ed $S = S_2$) si devono rappresentare nella forma (2) è certamente pure della forma (2) (con $S = S_1S_2$) la trasformazione che consiste nelle due

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **37**, 383 (1926).

[2]M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926.

[3]*ibidem, l.c..*

[4]*Wentzel ha trovato un' importante rappresentazione d'altro tipo delle trasformazioni canoniche.*

trasformazioni in sequenza. Perciò è sufficiente dimostrare che si deve rappresentare nella forma (2) una trasformazione con le proprietà seguenti:

a) $P_1 = P_1(p,q)$ è una funzione data a piacere.

b) Una delle quantità da $p_2$ a $p_f$, da $q_2$ a $q_f$ è commutabile con $P_1$, quindi rimane immutata nella trasformazione.

c) Si ha $P_1q_1 - q_1P_1 = (h/2\pi i)$, quindi $q_1$ resta immutato per la trasformazione.

Ogni trasformazione canonica può essere composta con (al più) $f$ trasformazioni di questo tipo.

Ora $P_1$ è commutabile con una delle quantità $p_2,...,p_f$; $q_2,...,q_f$ se e solo se $P_1$ è indipendente dalla quantità coniugata; perciò la (2) ha la proprietà b) se $S$ contiene come argomento solo quelle tra queste quantità che intervengono anche in $P_1$. Vale inoltre

$$P_1q_1 - q_1P_1 = \frac{h}{2\pi i}$$

se e solo se

$$P_1 - p_1 = \frac{h}{2\pi i} R$$

è indipendente da $p_1$. L'equazione differenziale

$$RS + \frac{\partial S}{\partial q_1} = 0 \tag{3}$$

può però essere certamente risolta se si assume per $S$ una serie di potenze che non contenga come argomento nessuna delle quantità $p_1,p_2,...,p_f$ e $q_2,...,q_f$, che non siano contenute anche in $R$. La $S$ così determinata produce una trasformazione con le proprietà a), b), c), e in particolare con la proprietà a) perchè sarà[5]

$$P_1 = Sp_1S^{-1} = p_1 - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial S}{\partial p_1}S^{-1} = p_1 + \frac{h}{2\pi i} R \,, \tag{4}$$

come richiesto.

Questo risultato fornisce parimenti la prova che un sistema non degenere è determinato univocamente mediante la formulazione matriciale delle equazioni di moto (a meno di costanti di fase);

---

[5]*Rammentiamo le formule che discendono dalla* (1)

$$f(\alpha)\omega - \omega f(\alpha) = \frac{h}{2\pi i} f'(\alpha);\; f(\omega)\alpha - \alpha f(\omega) = -\frac{h}{2\pi i} f'(\omega) \,.$$

infatti dall'ipotesi (2) si può ottenere solo una soluzione unica del problema (trasformazione degli assi principali).

L'equazione (3) può del resto esser risolta facilmente in modo esplicito nel caso che $R$ sia indipendente da $q_1$. Allora infatti, con la definizione

$$\exp(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y^n}{n!} \,, \tag{5}$$

evidentemente

$$S = \exp(-R, q_1) \tag{6}$$

è una soluzione con le proprietà richieste. A partire da quest'osservazione si possono ottenere diversi sviluppi e generalizzazioni.

Si formuli il *problema di integrazione* in modo tale che la funzione hamiltoniana $H = H(p,q)$ (che non può dipendere esplicitamente dal tempo) mediante una trasformazione canonica $p,q \rightarrow \alpha,\omega$ si trasformi in $H = H(\alpha)$. Il tempo $t$ sarà allora definito come quantità coniugata ad $H$. Da un sistema qualsiasi $\alpha_k,\omega_k$ se ne può costruire parimenti un altro $\beta_k,\mu_k$, per il quale sia $\beta_1 = H$, $\mu_1 = t$. Per questo, secondo quanto detto, basta porre nella (6)

$$\frac{h}{2\pi i} R = H(\alpha) - \alpha, \qquad q_1 = \omega_1 \,.$$

Tenendo conto che

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_1} = - RS \,, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} S\omega_1$$

si ottiene la trasformazione

$$\beta_k = S\alpha_k S^{-1}, \; \mu_k = S\omega_k S^{-1}$$

nella forma

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= X(\alpha) \,, & \omega_1 &= \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} t \,, \\ \beta_e &= \alpha_e \,, & \omega_e &= \frac{\partial H}{\partial \alpha_e} t + \mu_e \,; \quad e = 2,3,\ldots,f. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Che questa sia di fatto una trasformazione canonica lo si può naturalmente determinare anche con un calcolo completo delle relazioni di commutazione di $\beta,\mu$ senza utilizzare $S$. Si può anche modificare facilmente la (7) in modo tale che la trasformazione sia completamente hermitiana. Come "hermitiana" (ovvero "reale") si indicherà secondo Born, Wiener[6] e Dirac[7] una funzione $f(\alpha,\omega)$ che resti immutata per sostituzione di *i* con *-i* (passaggio al numero complesso coniugato) con simultanea inversione dell'ordine di tutte le moltiplicazioni.

Nella teoria classica una trasformazione arbitraria del punto si scrive

$$Q_k = v_k(q) \; ; \qquad p_k = \sum_{e=1}^{f} \frac{\partial v_e(q)}{\partial q_k} P_e \; . \tag{8}$$

Affermiamo che questa è una trasformazione canonica anche dal punto di vista della meccanica quantistica. Per dimostrarlo definiamo la funzione

$$\exp(x_1,y_1|x_2,y_2|\cdots|x_f,y_f) = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_f=0}^{\infty} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_f^{n_f} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_f^{n_f}}{n_1! n_2! \ldots n_f!} \tag{9}$$

con

$$v_k - q_k = \frac{h}{2\pi i} R_k \; ;$$

poniamo allora

$$S = \exp(R_1,p_1|R_2,p_2|\cdots|R_f,p_f) \; . \tag{10}$$

Sarà

$$\frac{\partial S}{\partial p_k} = R_k S \; , \qquad \frac{\partial S}{\partial q_k} = \sum_{e=0}^{f} \frac{\partial R_e}{\partial q_k} S p_e$$

e pertanto risulta dalla (2):

$$Q_k = q_k + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial p_k} S^{-1} = v_k \; ;$$

$$P_k = S p_k S^{-1} = p_k - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_k} S^{-1} = p_k - \frac{h}{2\pi i} \sum_{e=0}^{f} \frac{\partial R_e}{\partial q_k} P_e \; ,$$

che è equivalente alla (8). Nella meccanica quantistica si possono quindi eseguire tutte le trasformazioni del punto, per esempio il passaggio a coordinate paraboliche, ellittiche o polari,

---

[6]M. Born e N. Wiener, ZS. f. Phys. **36**, 174, 1926.

[7]P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **110**, 561, 1926.

utilizzando le formule classiche (nelle quali naturalmente si deve badare a mantenere l'ordine delle moltiplicazioni).

Per $v_k$ reali si rende la (8) hermitiana, se al posto della precedente espressione per $p_k$ si scrive

$$p_k = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{f} \left\{ \frac{\partial v_e(q)}{\partial q_k} P_e + P_e \frac{\partial v_e(q)}{\partial q_k} \right\} . \tag{8'}$$

Con ciò la trasformazione resta certamente canonica, poichè il sistema di variabili $p_k$, $q_k$ resta canonico quando si aggiungono ai $p_k$ funzioni dei soli $q_k$.

Alle trasformazioni canoniche, la funzione $S$ delle quali si può dare facilmente in forma esplicita, appartengono anche quelle per le quali $P_k, Q_k$ sono forme lineari di tutti i $p, q$. Si ottiene allora

$$S = \exp(L_1, L_2) \ , \tag{9'}$$

dove $L_1$, $L_2$ sono di nuovo certe forme lineari di $p$ e $q$.

Göttingen, Institut für theoretische Physik.