La polarizzazione dei quanti di luce[1]

P. Jordan, temporaneamente a Copenhagen

(ricevuto il 16 giugno 1927.)

Si mostra che una descrizione quantomeccanica delle proprietà di polarizzazione di un singolo quanto di luce si può sviluppare in un modo che è formalmente equivalente alla teoria di Pauli dell'elettrone magnetico.

Per una teoria corpuscolare della luce la polarizzazione ha da sempre costituito una difficoltà particolare. I tentativi di comprendere la polarizzazione nell'ambito della teoria dei quanti di luce sono stati compiuti spesso nel senso di attribuire di volta in volta al quanto di luce uno stato di polarizzazione definito. L'impossibilità di introdurre una simile rappresentazione risulta evidente dal fatto che questi tentativi non hanno trovato una trattazione più generale. Tuttavia il problema è rimasto, e può quindi non essere sconveniente mostrare che l'interpretazione statistica delle grandezze fisiche, come si è avuta negli ultimi sviluppi della meccanica quantistica, può produrre un chiarimento della questione soddisfacente nel senso di questa teoria.

Il problema è importante sotto un altro punto di vista. La circostanza, che nella statistica dei quanti di luce la polarizzazione, in quella degli elettroni il momento magnetico proprio richiedano una moltiplicazione per il fattore 2 del numero di onde di fase suggerisce l'idea di un'analogia profonda tra questi due fenomeni. C.G. Darwin[2] è giunto, in base all'ipotesi che l'elettrone magnetico si debba rappresentare mediante onde di de Broglie polarizzate, a introdurre una generalizzazione dell'equazione di Schrödinger valida per l'elettrone magnetico.

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **44**, 292 (1927).

[2]C.G. Darwin, Nature marzo 1927.

Pauli[3] ha ottenuto poi un progresso importante con considerazioni che si fondano sul significato statistico generale della meccanica quantistica. Pauli non ha tuttavia fatto alcun uso dell'ipotesi delle onde di Schrödinger polarizzate, e considera i suoi risultati come argomenti contro quest'ipotesi. Vedremo nel seguito che le proprietà di polarizzazione dei quanti di luce si possono descrivere mediante una traduzione della concezione di Pauli - col chè in modo assai sorprendente appare di nuovo un'affinità tra i due fenomeni.

Assumiamo qui come già noti i punti principali della teoria di Pauli e alcune osservazioni aggiuntive[4] fatte dall'autore.

§ 1. Grandezze osservabili per il quanto di luce. Ci occupiamo esclusivamente di quanti di luce la cui frequenza e direzione del moto siano date, quindi - altrimenti detto - di onde armoniche piane che corrano parallele all'asse z. Bisogna considerare come si misura la polarizzazione di un singolo quanto, e come lo si può descrivere mediante "grandezze" quantomeccaniche. Risulta immediatamente che naturalmente non ci si può avvalere a questo scopo del concetto classico di una grandezza fisica, ma solo del concetto quantomeccanico di grandezza, che è risultato dalla formulazione statistica della meccanica quantistica e che è stato illustrato in modo particolarmente significativo dalle considerazioni di Pauli sull'elettrone magnetico.

Se noi interponiamo un prisma di Nicol nel cammino di un'onda luminosa puramente armonica, che nel caso generale può essere polarizzata ellitticamente in qualche modo, essa sarà scissa in una componente trasmessa polarizzata linearmente, e in una riflessa, polarizzata linearmente in modo ortogonale alla prima. Se sperimentiamo con un singolo quanto di luce, questo quanto di luce o sarà trasmesso attraverso il Nicol, oppure sarà riflesso; e si dovrà assumere che nel primo caso il quanto di luce ad un secondo esperimento di questo tipo con uguale giacitura del Nicol sarà sicuramente trasmesso di nuovo, e che invece nell'altro caso

[3] W. Pauli jr., ZS. f. Phys. (in pubblicazione).

[4] P. Jordan, ZS. f. Phys. (in pubblicazione).

al secondo esperimento sarà sicuramente di nuovo riflesso. Le diverse giaciture possibili del Nicol si indicheranno con un angolo ψ nell'intervallo $0\leq\psi<\pi$; ogni misura siffatta determina per il quanto di luce una grandezza meccanica particolare, e ognuna di queste grandezze può assumere proprio due valori distinti: diciamo che la grandezza $(0,\psi)$ ha il valore +1/2 quando il quanto di luce è trasmesso dal Nicol nella giacitura ψ; e diciamo che $(0,\psi)$ è -1/2 quando esso viene riflesso. Quando è

$$|\psi_1 - \psi_2| = \pi/2 , \tag{1}$$

la misura di $(0,\psi_2)$ dà sicuramente il valore +1/2 quando una misura precedente di $(0,\psi_1)$ abbia dato il valore -1/2, e viceversa. Quindi nel caso della (1) dobbiamo dire che è

$$(0,\psi_1)=-(0,\psi_2) \quad \text{per} \quad |\psi_1 - \psi_2| = \pi/2 . \tag{2}$$

Teoricamente un'onda luminosa esattamente periodica si può anche scindere, invece che in due componenti lineari polarizzate ortogonalmente, in onde parziali polarizzate circolarmente nel senso degli angoli crescenti e decrescenti. Anche in questo caso l'energia dell'onda complessiva è uguale alla somma delle energie delle componenti, e perciò sarà un'ipotesi consentita se noi assumiamo che possiamo realizzare questa scissione anche sperimentalmente con un analizzatore che - analogamente al Nicol - di un'onda polarizzata a piacimento lasci passare la componente polarizzata circolarmente in senso positivo, e rifletta la componente negativa.

Faremo ora un passo più avanti. L'onda generale polarizzata ellitticamente

$$x=A\sin t , \quad y=B\sin(t+\delta) \tag{3}$$

(si è scelta opportunamente l'origine e la normalizzazione di t) la caratterizzeremo con l'ellisse corrispondente

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\delta=\text{cost} \tag{4}$$

introducendo il segno + o - per senso di rotazione positivo o negativo della polarizzazione; se ψ è l'angolo che l'asse maggiore dell'ellisse (4) determina con l'asse x, ed η è il rapporto tra l'asse minore e l'asse maggiore dell'ellisse, possiamo contrassegnare l'onda (3) mediante tre simboli : η, ψ, $\pm$. E' conveniente per le formule successive calcolare con solo due numeri, $\sigma=\pm\eta$ e ψ; allora

$$-1\leq\sigma\leq 1 \ , \qquad 0\leq\psi<\pi \ . \tag{5}$$

Nel caso $\sigma=\pm 1$ l'angolo ψ è indeterminato. Come si mostra nei manuali di ottica

$$\mathrm{tg}2\psi=\mathrm{tg}2\vartheta\cdot\cos\delta \ , \qquad \sin 2X=-\sin 2\vartheta\cdot\sin\delta \ , \tag{6}$$

quando si ponga

$$B/A=\mathrm{tg}\vartheta \ , \qquad \sigma=\mathrm{tg}X \ . \tag{7}$$

Si riconosce facilmente quanto segue: è possibile rappresentare ogni onda σ, ψ come somma di due onde della forma

$$\sigma_0,\ \psi_1 \quad \text{e} \quad -\sigma_0,\ \psi_2 \ , \tag{8}$$

dove si sono prescritti un valore a piacere σ_0 ed un angolo a piacere ψ_1, mentre ψ_2 è determinato da[5]

$$|\psi_1 - \psi_2| = \pi/2 \ . \tag{9}$$

Le intensità delle onde parziali (8) e la loro fase relativa sono determinate univocamente da σ, ψ. L'energia dell'onda complessiva è la somma delle energie delle componenti (8).

Sulla base di questi fatti appare naturale rappresentarci come analizzatore ideale per le proprietà di polarizzazione di un

---

[5] *Le due onde (8) si possono evidentemente anche scrivere in questo modo: un'onda sia rappresentata da*

$$x = A\sin t \ , \qquad y = B\sin(t+\delta) \ ,$$

allora l'altra ha la forma

$$x = -B\sin(t+\delta'-\delta) \ , \qquad y = A\sin(t+\delta') \ .$$

quanto di luce un apparato che esegua fisicamente la suddivisione matematica (8) su ogni onda che si presenti, che quindi per esempio lasci sempre passare una componente delle (8) e rifletta l’altra. Un tale analizzatore ideale è quindi lui stesso da contrassegnare con i numeri σ, ψ. Se consideriamo di nuovo un singolo quanto di luce, ogni analizzatore σ, ψ ci definisce una particolare "grandezza meccanica"; diciamo che abbiamo misurato per la grandezza

$$(\sigma,\ \psi) \tag{10}$$

il valore +1/2 ovvero -1/2 se il quanto di luce è stato trasmesso o riflesso. Nel caso $\sigma=\pm1$ l’angolo ψ sarà indeterminato; indichiamo le due grandezze (10) restanti in questo caso con

$$(\pm1)\ . \tag{11}$$

Nel caso $\sigma=0$ otteniamo di nuovo le grandezze definite precedentemente per mezzo del Nicol

$$(0,\ \psi)\ . \tag{12}$$

Quando si è misurata su un quanto di luce la grandezza $(\sigma,\ \psi_1)$, una misura successiva di $(-\sigma,\ \psi_2)$, dove ψ_2 soddisfa all’equazione (9), dà sicuramente il valore opposto a quello della prima misura; generalizzando la (2) abbiamo quindi

$$(\sigma,\psi_2)=-(-\sigma,\psi_1) \quad \text{per} \quad |\psi_1 - \psi_2| = \pi/2\ . \tag{13}$$

In particolare risulta

$$(+1) = -(-1)\ . \tag{14}$$

Quando da $(\sigma,\ \psi_1)$ costruiamo la grandezza

$$C_1 + C_2(\sigma,\ \psi_1) = q \tag{15}$$

con due c-numeri C_1, C_2, allora q ha il valore $q' = C_1\pm(1/2)C_2$ per $(\sigma,\ \psi_1) = \pm1/2$. Ma possiamo anche sommare e moltiplicare simbolicamente due siffatte grandezze q distinte con gli accoppiamenti simbolici $q+p$ ovvero qp come si deve fare in generale in meccanica quantistica. Che cosa significhino queste addizioni e moltiplicazioni nel nostro caso lo si vedrà nel seguito.

L’ampiezza delle precedenti considerazioni ha forse bisogno di una giustificazione. Infatti per quei lettori che avessero sviluppato familiarità con la teoria di Pauli sarebbe bastata una trattazione più breve. Appare tuttavia che proprio la polarizzazione dei quanti di luce costituisca un esempio particolarmente istruttivo per la struttura concettuale propria della meccanica quantistica. Soprattutto è il concetto elementare di grandezza fisica che nello sviluppo dalla meccanica classica a quella quantistica ha subito un mutamento veramente essenziale, e nell’interpretazione attuale di questa si esprime nel modo più significativo l’approfondimento dell’impostazione epistemologica raggiunto: in meccanica quantistica le grandezze fisiche ottengono valori definiti solo mediante i processi che servono alla loro misura; non è consentito di attribuire ad esse valori determinati indipendentemente dal processo d’osservazione.

§ 2. Corrispondenza tra il quanto di luce e l’elettrone magnetico. Quando ci poniamo la domanda, quali coppie di grandezze (σ, ψ) e $(\bar{\sigma}, \bar{\psi})$ siano da considerarsi canonicamente coniugate nel caso del quanto di luce (con opportuna normalizzazione), possiamo (come nel caso dell’elettrone magnetico) fondarci sulla legge quantomeccanica, che per valori assegnati di una grandezza tutti i valori dell’impulso coniugato sono equiprobabili. Vediamo perciò immediatamente che (sempre con opportuna normalizzazione) a (+1) o (-1) (polarizzazione circolare) è canonicamente coniugata la grandezza $(0, \psi)$ (polarizzazione lineare) con un dato ψ; anche $(0, \psi)$ e $(0, \bar{\psi})$ sono coniugati, quando $|\psi-\bar{\psi}|$ è uguale a $\pi/4$ o a $3\pi/4$. Su queste constatazioni si potrebbe costruire la teoria quantomeccanica della polarizzazione per via sintetica, in modo analogo alla teoria dell’elettrone magnetico.

E’ tuttavia più facile stabilire una corrispondenza biunivoca tra quanto di luce ed elettrone magnetico in modo tale che gli accoppiamenti additivi e moltiplicativi e le relazioni di probabilità tra le grandezze fisiche nel caso del quanto di luce siano le stesse come tra le grandezze corrispondenti nel caso dell’elettrone magnetico.

Rappresentiamo le componenti dell’impulso dell’elettrone magnetico in una data direzione mediante un punto x, y, z della sfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$; chiamiamo positivo il polo per $z=1$, negativo quello per $z=-1$. Se associamo al polo positivo la polarizzazione circolare positiva (+1), allora dobbiamo secondo la (14), § 1 associare al polo negativo la polarizzazione circolare negativa (-1). Inoltre, tenendo conto di quello che sappiamo riguardo alle grandezze canonicamente coniugate nel caso del quanto di luce e in quello dell'elettrone magnetico rispettivamente, dobbiamo far corrispondere i punti equatoriali della sfera alle polarizzazioni lineari in modo tale che la differenza angolare $\Delta\psi$ tra due polarizzazioni lineari sia la metà della separazione angolare dei punti equatoriali corrispondenti.

Inoltre associeremo in generale ad una grandezza (σ, ψ) con σ positivo un punto dell'emisfero positivo, e alla grandezza ($-\sigma$, ψ) il punto dell'emisfero negativo speculare rispetto al piano equatoriale. Determiniamo ora la rappresentazione in modo più preciso.

Mediante proiezione stereografica dal polo positivo mettiamo in corrispondenza ogni punto della sfera con un punto $x=a$, $y=b$ del piano $z=0$ secondo le formule

$$x = \frac{2a}{1+a^2+b^2} , \; y = \frac{2b}{1+a^2+b^2} , \; z = \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2} . \tag{1}$$

Il nostro compito è di associare ai punti a, b ovvero $\eta=a+ib$ delle ellissi in modo tale che a due punti della sfera che sian posti specularmente rispetto al piano $z=0$ corrisponda la stessa ellisse. In ciò ci aiuta la circostanza che due punti siffatti sono rappresentati nel piano complesso da

$$\eta_1 = \eta \text{ ed } \eta_2 = 1/\eta^* \; ; \tag{2}$$

essi soddisfano quindi ad una equazione

$$\begin{aligned} &\{\eta-(a+ib)\}\{(a-ib)\eta-1\} \\ &= \eta^2(a-ib)-(1+a^2+b^2)\eta+(a+ib) = 0 \; , \end{aligned} \tag{3}$$

che appartiene alla forma quadratica

$$Q(\xi_1,\xi_2) = (a-ib)\xi_1^2-(1+a^2+b^2)\xi_1\xi_2+(a+ib)\xi_2^2 \tag{4}$$

che per $\xi_2=\xi_1^*$ è sempre reale. Costruiamo quindi

$$-Q(x+iy,x-iy) = -2\{a(x^2-y^2)+2bxy\}+(1+a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$= x^2\{(1-a)^2+b^2\}+y^2\{(1+a)^2+b^2\}-4bxy = F(x,y) \; ; \tag{5}$$

e quando associamo a questa forma $F(x,y)$ il punto $\eta_1 = a+ib$ siamo sicuri che essa corrisponde anche al punto riflesso nel piano equatoriale $\eta_2 = 1/(a-ib)$. Vediamo inoltre che

$$F(x,y) = \text{cost} \tag{6}$$

rappresenta sempre un'ellisse, che solo nel caso $a^2+b^2 = 1$ degenera in un doppio segmento; il determinante di $F(x,y)$ è infatti uguale a

$$D = 4\{(1-a)^2+b^2\}\{(1+a)^2+b^2\}-16b^2=4(a^2+b^2-1)^2 \; . \tag{7}$$

Confermiamo che esiste il coordinamento delle seguenti proprietà, prima richieste:

1. Le polarizzazioni circolari (+1) e (-1) corrispondono ai poli della sfera. Per questi poli ($a=b=0$, e rispettivamente $a=b=\infty$) la (6) va in un cerchio.

2. Le grandezze (σ, ψ_1), $(-\sigma, \psi_2)$ con $|\psi_1-\psi_2| = \pi/2$ sono opposte. Infatti le loro ellissi corrispondono a due punti della sfera agli estremi di un diametro, come si vede dalla (5).

3. Alle polarizzazioni lineari corrispondono i punti equatoriali della sfera. Ciò risulta dalla (1) e dalla (7). Vediamo che anche l'ordinamento degli angoli è quello giusto. Da $F(x,y) = 0$ nel caso $a^2+b^2=1$ segue infatti

$$\text{tg}(\psi-\pi/2) = -x/y = -(1+a)/b \; , \tag{8}$$

quindi

$$\text{tg}2\psi = b/a \; . \tag{9}$$

Mediante il coordinamento introdotto è ora definito in modo del tutto generale che cosa si debba intendere nel nostro caso come "somma" o "prodotto" di due grandezze quantomeccaniche, quindi di due forme di polarizzazione; è anche determinato in generale quale grandezza sia canonicamente coniugata ad una data. Naturalmente tutte queste cose potrebbero anche essere facilmente rappresentate con formule esplicite. Ci basta rilevare quanto segue: la formula (9) vale in generale, anche per polarizzazione ellittica invece che lineare. L'ellisse $F(x,y)$=cost ridotta agli assi principali per mezzo di un sistema di coordinate x',y' ruotato dell'angolo ψ ottiene la forma

$$x'^2\cdot[1-(a^2+b^2)^{1/2}]^2 + y'^2\cdot[1+(a^2+b^2)^{1/2}]^2 = \text{cost} \; ; \qquad (10)$$

riassumendo otteniamo quindi i numeri σ, ψ rappresentati con a, b per mezzo di

$$\mathrm{tg}2\psi = b/a \; , \quad -\sigma = \frac{1-\rho}{1+\rho} \; , \quad \rho = (a^2+b^2)^{1/2} \; ; \qquad (11)$$

inversamente

$$b/a = \mathrm{arctg}2\psi \; , \quad \rho = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \; . \qquad (12)$$

§ 3. Probabilità ed intensità. Ci chiediamo ora quale sia la probabilità per un valore +1/2 o -1/2 di una grandezza quantomeccanica nel caso di un quanto di luce, sotto l'ipotesi che il valore di un'altra grandezza sia noto. Più precisamente poniamo la seguente domanda: un quanto di luce sia stato osservato con un nostro analizzatore σ, ψ, con il quale ha dato +1/2 oppure -1/2 (trasmissione o riflessione). Questo quanto di luce sia osservato di nuovo con un altro analizzatore $\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}$; quant'è grande la probabilità che abbia luogo la trasmissione, ovvero la riflessione?

Per rispondere a questa domanda abbiamo ora due metodi. Il primo è quello classico: otteniamo la risposta mediante la scissione matematica dell'onda σ, ψ nelle componenti $\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}$ e $-\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}_2$, dove $|\bar{\psi}-\bar{\psi}_2| = \pi/2$. In secondo luogo ci offre una risposta secondo l'esposizione fatta la meccanica quantistica, ovvero la teoria di Pauli dell'elettrone magnetico: determiniamo sulla sfera unitaria due punti corrispondenti a quelle grandezze quantomeccaniche, delle quali l'una nella prima misura risulta essere +1/2, e la seconda nella seconda misura risulta con la probabilità cercata, +1/2; la probabilità è uguale a

$$\cos^2\Theta/2\ , \tag{1}$$

dove Θ è la separazione angolare tra i due punti della sfera.

Questa risposta quantomeccanica evidentemente coincide con quella classica nel caso che i due analizzatori utilizzati siano prismi di Nicol: infatti allora i due punti della sfera giacciono sull'equatore e la loro separazione angolare Θ è uguale al doppio dell'angolo tra le direzioni di polarizzazione dei due Nicol. Il caso generale di due analizzatori ellittici risulta invece complicato. L'angolo Θ tra due punti a_1, b_1 e a_2, b_2, per le (1), § 2 è dato da

$$\cos\Theta = \frac{4a_1a_2+4b_1b_2+(1-a_1^2-b_1^2)(1-a_2^2-b_2^2)}{(1+a_1^2+b_1^2)(1+a_2^2+b_2^2)}\ , \tag{2}$$

quindi

$$\cos\Theta = \frac{4a_1a_2+4b_1b_2+(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}$$

$$= \frac{4\rho_1\rho_2\cos(\psi_1-\psi_2)+(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}\ . \tag{3}$$

Per la probabilità si ottiene quindi

$$\cos^2(\Theta/2) = \frac{1+2\rho_1\rho_2\cos(\psi_1-\psi_2)+\rho_1^2\rho_2^2}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}\ ; \qquad \rho_{1,2} = \frac{1+\sigma_{1,2}}{1-\sigma_{1,2}} \tag{4}$$

ovvero anche

$$\cos^2(\Theta/2) = \frac{(1+\sigma_1\sigma_2)^2+(\sigma_1+\sigma_2)^2+(1-\sigma_1^2)(1-\sigma_2^2)\cos(\psi_1-\psi_2)}{2(1+\sigma_1^2)(1+\sigma_2^2)}\ . \tag{5}$$

Dobbiamo infine confrontare queste formule con le affermazioni della teoria classica. Un conto di verifica piuttosto lungo - per il quale si possono usare le formule (6), (7), § 1 e le formule della nota di pag. 295, e sul quale non c'è nulla di particolare da dire - porta anche classicamente ad un risultato equivalente alle (4) e (5).

In conclusione vorrei esprimere la mia gratitudine per aver ricevuto l'ispirazione a queste considerazioni da un colloquio con il Prof. C.G. Darwin. Egli ha espresso il convincimento che anche per la teoria di Pauli dell’elettrone magnetico si potrebbe introdurre una rappresentazione per mezzo di onde di Schrödinger polarizzate.Mi apparve quindi interessante provare in primo luogo l’inverso.

Sono molto obbligato al Prof. N. Bohr per molte conversazioni stimolanti, e l’International Education Board per la possibilità del mio soggiorno a Copenhagen.