Transizioni quantiche spontanee[1]

A. Landé a Tubinga

(ricevuto il 17 marzo 1927.)

Le transizioni spontanee sono ricondotte ad un campo di smorzamento spontaneo.

§ 1. Da poco M. Born[2] ha calcolato secondo la meccanica ondulatoria le probabilità di transizione tra stati quantici stazionari sotto l'influenza di un campo esterno dato; tra l'altro ha discusso l'influenza di luce disordinata di densità di radiazione ρ_ν, per includere nella meccanica ondulatoria i coefficienti di probabilità B_{mn} di Einstein per l'assorbimento e per l'emissione indotta. Sulla base dell'interpretazione di Schrödinger in termini di battimenti della condizione delle frequenze di Bohr e secondo l'interpretazione idrodinamica di Madelung[3] del campo ψ si potrebbe arrivare all'opinione che la meccanica ondulatoria richieda per l'emissione spontanea con frequenza di combinazione ν^{mn} la presenza delle particelle sia nello stato di partenza m che nello stato finale n, cosa che contraddice l'esperienza. Per render conto dell'emissione spontanea anche nel caso che tutte le particelle siano nello stato iniziale m O. Klein[4] si è visto costretto a render responsabile per l'Aussstrahlung non la corrente di Madelung, che in questo caso è stazionaria, ma una corrente non stazionaria diversa da quella. Vogliamo ora ricondurre quest'ultima alla sua origine, una sorta di campo di smorzamento, che va inserito al posto di un eventuale campo esterno.

La strada per lo smorzamento radiativo spontaneo andrebbe

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **42**, 835 (1927).

[2]M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1926.

[3]E. Madelung, ibidem **40**, 322, 1926.

[4]O. Klein, ibidem **41**, 407, 1927.

cercata in una traduzione dei calcoli classici che sono stati elaborati in un lavoro precedente di Born e Jordan[5] riguardo all'interpretazione quantistica. Tuttavia gli sviluppi di quel lavoro non paiono adatti al trasferimento immediato nel linguaggio quantistico, poichè il campo di smorzamento là utilizzato $\mathfrak{F} = -(2/3c^3)\cdot\dddot{\mathfrak{M}}$ è in fase con il momento $\mathfrak{M}$ dell'elettrone (lavoro $dA = -(2/3c^3)\cdot\dddot{\mathfrak{M}}\dot{\mathfrak{M}}dt$) e perciò già le ampiezze di transizione crescerebbero proporzionalmente al tempo, cosa che dovrebbero fare le probabilità di transizione.

Perciò seguiremo qui una via per la derivazione dell'equilibrio radiativo che è stata descritta per la prima volta da W. Bothe[6] e porremo le transizioni spontanee sullo stesso piano di quelle indotte, poichè ci chiederemo quale potenziale di campo perturbativo $F(x,t)$ va introdotto nell'equazione

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2\mu}{h^2}[U(x) + F(x,t)]\cdot\psi - \frac{4\pi i\mu}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

come corrispettivo del potenziale di campo $F(x,t)$ di un campo perturbante esterno, per ottenere come risultato le probabilità di transizione spontanea. (In prima approssimazione le transizioni spontanee e quelle indotte mediante un campo esterno possono essere trattate indipendentemente.) La risposta nel caso che tutte le particelle siano nello stato di partenza m suona così:

Il campo di smorzamento che agisce sullo stato m non è esattamente periodico in ν_{mn} ($n<m$), ma è affetto da salti di fase disordinati, di modo che lo sviluppo di Fourier del campo di smorzamento ricopre un intorno $\Delta\nu_{mn}$ della frequenza di combinazione ν_{mn}. L'intensità del campo di smorzamento è quindi uguale all'intensità di campo di una radiazione disordinata ρ_ν, per ogni grado di libertà radiativo della quale nell'intorno di ν_{mn} si ha tanta energia quanta ne viene emessa con un processo d'emissione (cioè ogni grado di libertà ha l'energia $h\nu_{mn}$).

Se si introduce infatti il potenziale $F(x,t)$ di questo "campo

---

[5]M. Born e P. Jordan, ibidem **33**, 479, 1925.

[6]W. Bothe, ZS. f. Phys. **41**, 345, 1927. *La trattazione presente ha con quella di Bothe molti punti in comune.*

di smorzamento spontaneo" nella suddetta equazione (1) si ottiene, come si mostra nel § 2, a partire dallo stato iniziale $\psi=c_m\psi_m$ uno stato finale $\psi = \sum_k C_k\psi_k$ (k=1,2,...m) con $C_k = c_m a_{mk}$, dove a_{mk}, cioè l'ampiezza di probabilità della transizione spontanea $m\to k$, soddisfa il rapporto di Einstein

$$(a_{mk})^2:(b_{mk})^2 = \frac{8\pi h\nu_{mk}^3}{c^3}$$

tra le probabilità di transizione $m\to k$ spontanea e indotta. Anche quando tutte le particelle sono soltanto nello stato m, e quindi la corrente di Madelung è stazionaria, saranno provocate dal campo spontaneo che contiene la frequenza ν_{mk}, delle transizioni $m\to k$ ($k<m$). - Ci si può ora chiedere inoltre, quale Ausstrahlung elettrodinamico sia accoppiato alle transizioni spontanee. Per rispondere a questa domanda sarà necessario tirare in ballo con O. Klein oltre alla densità di corrente di Madelung anche una densità di corrente d'altro tipo, l'interpretazione statistica della quale tuttavia si discosta da quella per la densità di corrente di Madelung. E inoltre potremo intendere la comparsa di una densità di transizione alla Klein per l'Ausstrahlung spontaneo come una conseguenza del campo di smorzamento (§ 3).

§ 2. Se si pone nell'equazione (1) per il potenziale $F(x,t)$ il prodotto col segno meno del momento $\mathfrak{M}(x)$ e del campo $\mathfrak{E}(t)$ si ottiene secondo Born[7], nel caso che il campo consista di luce disordinata con densità di radiazione $\rho(\nu)$, per la probabilità di transizione $m\to n$

$$B_{mn}\cdot\rho(\nu_{mn}) = \frac{8\pi^3}{3h^3}\,|\mathfrak{M}_{mn}|^2\cdot\rho(\nu_{mn}) \ , \tag{2}$$

dove $\mathfrak{M}_{mn}$ è l'elemento di matrice del momento $\mathfrak{M}(x)$. Se si assume ora la densità di radiazione ρ^0 del "campo di smorzamento spontaneo" per lo stato m in modo tale che ad ogni grado di libertà con $\nu=\nu_{mn}$ corrisponda un quanto $h\nu_{mn}$, cioè

---

[7] M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1927, *formula* (39). *In essa* $4\pi^3$ *sta evidentemente al posto di* $8\pi^3$.

$$\rho^0_{mn} = \frac{8\pi h\nu^3_{mn}}{c^3} , \quad (n<m) , \tag{3}$$

la probabilità di transizione spontanea così generata sarà

$$A_{mn} = \frac{8\pi^3}{3h^3} |\mathfrak{M}_{mn}|^2 \cdot \rho^0(\nu_{mn}) , \tag{4}$$

e si ottiene quindi

$$A_{mn} : B_{mn} \cdot \rho(\nu_{mn}) = \rho^0(\nu_{mn}) = \frac{8\pi h\nu^3_{mn}}{c^3} , \tag{5}$$

in accordo con la condizione di Einstein.

§ 3. Si dovrà mostrare ora, ripetendo un noto risultato di Born (l.c.), quale ruolo giochino le densità di transizione $P_{mn}(x,t) = \psi_m(xt)\psi^*_n(xt)$, dalle quali si costruisce la densità $P_m(x,t)$ associata allo stato m secondo la formula di O. Klein

$$P_m = P_{mn} + \textstyle\sum_n P_{mn} + P_{nm} , \quad (n<m) .$$

Se lo stato iniziale, rispettivamente lo stato finale, sono caratterizzati da

$$\psi_a = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots \text{ovvero} \quad \psi_e = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + \cdots$$

con le densità di Schrödinger-Madelung $\rho_a = \psi_a\psi^*_a$ e $\rho_e = \psi_e\psi^*_e$, poniamo con Born i C_n in rapporto con i c_n mediante le equazioni lineari

$$C_n = \textstyle\sum_m c_m b_{mn} , \tag{6}$$

i coefficienti b_{mn} delle quali rappresentano le ampiezze di transizione, e i loro quadrati le probabilità di transizione per la singola transizione $m \to n$, mentre i c^2_m ovvero C^2_m rappresentano il numero di particelle nello stato m prima e dopo l'azione perturbatrice. Risolvendo l'equazione d'onda (1) si ottengono poi secondo Born per un campo di perturbazione arbitrario $\mathfrak{E}(t)$ le ampiezze di transizione b_{mn} nel modo seguente ($\mathfrak{E}$ può per esempio essere un campo esterno dato arbitrariamente oppure il nostro campo di smorzamento spontaneo, effettivo nello stato m): si costruiscono l'energia potenziale $F(x,t) = -\mathfrak{M}(x)\cdot\mathfrak{E}(t)$ ovvero l'energia potenziale moltiplicata per $-2i\pi/h$

$$b(x,t) = \frac{2i\pi}{h}\,\mathfrak{M}(x)\cdot\mathfrak{E}(t)\ , \tag{7}$$

e utilizzando le autofunzioni imperturbate

$$\psi_m(x,t) = \Psi_m(x)\exp(2i\pi\nu_m t) \qquad (\nu_m = E_m/h)$$

le quantità

$$b_{mn} = \frac{2i\pi}{h}\int_{\infty}\int_0^T dx\cdot dt\cdot b(x,t)\psi_m\psi_n^*$$

$$= \frac{2i\pi}{h}\int_{\infty}\int_0^T dx\cdot dt\cdot b(x,t)P_{mn}(x,t) \tag{8}$$

con la densità di O. Klein $P_{mn}(x,t)=\psi_m\psi_n^*$. Questa densità P_{mn} compare anche nelle ampiezze di transizione b_{mn}, indipendentemente dai numeri c_m rispettivamente c_n degli stati iniziali e finali, cioè anche quando per t=0 tutte le particelle sono nello stato m. Si può sviluppare ulteriormente l'equazione (8) secondo la (7) in

$$b_{mn} = \frac{2i\pi}{h}\int_{\infty} dx\mathfrak{M}(x)\Psi_m(x)\Psi_n^*(x)\cdot\int_0^T dt\mathfrak{E}(t)\exp[2i\pi(\nu_m-\nu_n)t]$$

$$= \frac{2i\pi}{h}\int_{\infty} dx\mathfrak{M}_x\rho_{mn}(x)\cdot\int_0^T dt\mathfrak{E}(t)\exp[2i\pi\nu_{mn}t]$$

$$= \frac{2i\pi}{h}\,M_{mn}\cdot\mathfrak{e}(\nu_{mn})\ ,$$

dove ora M_{mn} è l'elemento di matrice di $\mathfrak{M}(x)$ ed $\mathfrak{e}(\nu_{mn})$ è il coefficiente di Fourier nella rappresentazione di $\mathfrak{E}(t)$ in funzione del tempo T come integrale di Fourier

$$\mathfrak{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{e}(\nu)\exp[2i\pi\nu t]d\nu\ .$$

In questo modo le densità introdotte da O. Klein, che sono determinanti per le ampiezze di transizione, sono ricondotte al campo che genera la transizione, in particolare per transizioni spontanee al campo di smorzamento spontaneo.

Aggiunta alla correzione. Nel frattempo P. Dirac (Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 243 (1927) ha affrontato il problema della radiazione spontanea e indotta in modo assai più efficace trattando il numero di quanti di luce come *q*-numero, e in tal modo il campo di smorzamento da noi postulato (1 quanto per grado di libertà) appare spontaneamente.