La meccanica ondulatoria dei continui e l'elettrodinamica.[1]

A. Landé a Tubinga

Con una figura. (ricevuto il 28 luglio 1927.)

Le quantità densità d'energia, d'impulso, degli sforzi e densità di corrente sono soggette secondo la teoria dei quanti a certe indeterminazioni. Ciò porta ad una funzione d'onda delle densità, che possiede nel senso di de Broglie periodi spaziali tetradimensionali e che viene trattata in particolare per il caso dell'elettrodinamica.

§ 1. In quanto segue si cercherà di utilizzare nel modo il più possibile analogo considerazioni che hanno portato alla meccanica ondulatoria del punto materiale per la preparazione di una teoria quantistica dei continui. Ai continui appartiene il campo elettromagnetico, che pure è dotato di energia, impulso, ecc.. Lo stato di un mezzo continuo nello spazio e nel tempo è caratterizzato dalla densità d'energia w, dalla densità d'impulso $\mathfrak{g}$, dalla corrente d'energia $\mathfrak{s}$ e dagli sforzi p in ogni punto d'universo; essi costituiscono le componenti del tensore densità d'energia e d'impulso $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \begin{matrix} \mathfrak{t}_{11} & \mathfrak{t}_{12} & \mathfrak{t}_{13} & \mathfrak{t}_{14} \\ \mathfrak{t}_{21} & \mathfrak{t}_{22} & \mathfrak{t}_{23} & \mathfrak{t}_{24} \\ \mathfrak{t}_{31} & \mathfrak{t}_{32} & \mathfrak{t}_{33} & \mathfrak{t}_{34} \\ \mathfrak{t}_{41} & \mathfrak{t}_{42} & \mathfrak{t}_{43} & \mathfrak{t}_{44} \end{matrix} = \begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & ic\mathfrak{g}_x \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & ic\mathfrak{g}_y \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & ic\mathfrak{g}_z \\ \frac{i}{c}\mathfrak{s}_x & \frac{i}{c}\mathfrak{s}_y & \frac{i}{c}\mathfrak{s}_z & -w \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 = \\ x, & y, & z, & l=ict \end{matrix}$$

la simmetria del quale $\mathfrak{t}_{ik} = \mathfrak{t}_{ki}$ contiene la legge dell'inerzia dell'energia $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}/c^2$. Nella meccanica classica si assume che i valori delle 16 componenti di $\mathfrak{t}$ in ogni punto d'universo siano definiti con precisione a piacere e siano in linea di principio

---

[1] Zeitschr. f. Phys. **44**, 768 (1927).

misurabili. La meccanica quantistica dei continui prende invece il suo punto di partenza da una imprecisione nella misura delle componenti della densità limitata dalla quantità h, in analogia a come la meccanica del punto materiale ascrive alle quantità energia ed impulso stesse un'incertezza di principio[2].

Trattiamo ora la densità d'energia w. Questa è definita classicamente come il valore limite dell'energia totale W misurata in un volume ΔV divisa per questo volume nel limite $\Delta V=0$. Ma ora l'incertezza ΔW con la quale è misurabile un'energia totale W è tanto maggiore quanto più piccolo è il tempo Δt disponibile per l'esecuzione della misura, di modo che

$$\Delta W \cdot \Delta t = h \ .$$

Allora i limiti di precisione Δw per la misura della densità d'energia w sono

$$\Delta w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{h}{\Delta V \cdot \Delta t} = \frac{hci}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_4} = \frac{hci}{\Delta\sigma} \tag{1}$$

con $\Delta\sigma$ come elemento di volume d'universo; l'espressione è tale che si farebbe meglio a definire la densità d'energia invece che mediante $w=\lim W/\Delta V$, mediante

$$w = \lim \frac{\int W dx_4}{\Delta\sigma} \tag{1'}$$

come valore limite di un'azione da misurare per unità di volume d'universo. Mentre quindi l'energia W di un punto materiale è coniugata alla coordinata t secondo la relazione $\Delta W \cdot \Delta t = h$, la densità d'energia w è "coniugata" in egual modo a tutte e quattro le coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4$ secondo la relazione $\Delta w \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_4 = hci$.

Analogamente accade per l'impulso. Se $\mathfrak{s}_x$ è la corrente d'energia, e quindi $\mathfrak{s}_x/c = c\mathfrak{g}_x$ la corrente d'impulso per unità di tempo e di superficie, $c\mathfrak{g}_x \cdot \Delta t \cdot \Delta y \Delta z = \mathfrak{G}_x$ è l'impulso totale che fluisce durante Δt attraverso $\Delta y \Delta z$. Per l'impulso totale $\mathfrak{G}_x$, che è coniugato alla coordinata x, vale la legge di incertezza $h = \Delta\mathfrak{G}_x \cdot \Delta x$; risulta quindi $h = \Delta(c\mathfrak{g}_x)\Delta t \Delta y \Delta z \cdot \Delta x$ e in conclusione

---

[2] W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **43**, 172, 1927.

$$\Delta(c\mathfrak{g}_x) = \frac{hic}{\Delta\sigma}$$

come corrispettiva della (1). Al posto della consueta definizione della densità d'impulso $\mathfrak{g}_x = \lim \mathfrak{G}_x/\Delta V$ appare ora migliore la definizione

$$c\mathfrak{g}_x = \lim \frac{\int c\mathfrak{G}_x \cdot dx_4}{\Delta\sigma}$$

come corrispettiva della (1').

§ 2. Si può ora generalizzare da $\mathfrak{t}_{14}..\mathfrak{t}_{44}$ alle restanti $\mathfrak{t}_{jk}$:

$$\Delta|\mathfrak{t}_{jk}| = \frac{hic}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta l} = \frac{hic}{\Delta\sigma} \tag{2}$$

come limiti d'incertezza per la misura di una qualche componente della densità $\mathfrak{t}_{jk}$ quando si estenda la misura dell'azione su un volume d'universo $\Delta\sigma$; all'equazione (1') corrisponde la definizione della densità

$$\mathfrak{t}_{kj} = \mathfrak{t}_{jk} = \lim \frac{\int T_{jk} dx_k}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_4} = \lim \frac{\int T_{kj} dx_j}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_4} \tag{2'}$$

come "azione" per unità di volume d'universo.

Si tratta ora di sfruttare secondo la meccanica ondulatoria questa legge. Mentre de Broglie associa al punto materiale di energia W una lunghezza del periodo temporale τ ovvero una lunghezza d'onda-x_4 di valore λ_4 mediante

$$W = h\nu = \frac{h}{\tau} = \frac{hic}{\lambda_4}$$

e corrispondentemente all'impulso $\mathfrak{G}_x$ una lunghezza d'onda $\lambda_1 = h/\mathfrak{G}_x$ mediante

$$ic\mathfrak{G}_x = \frac{hic}{\lambda_1} ,$$

nella meccanica dei continui noi possiamo associare alla densità $\mathfrak{t}_{jk}$ un volume d'universo Λ_{jk} come periodo mediante

$$|\mathbf{t}_{jk}| = \frac{hic}{\Lambda_{jk}} \ . \tag{3}$$

Ciò significa che un valore della densità $\mathbf{t}_{jk}$ costante sull'intero cronotopo corrisponde ad una funzione di stato ψ che possiede il volume d'universo

$$\Delta\sigma = \Lambda_{jk} = \frac{hic}{|\mathbf{t}_{jk}|}$$

come periodo fondamentale. Se invece $\mathbf{t}_{jk}$ non è ovunque costante anche il periodo di volume Λ_{jk} varia con il punto d'universo. In un determinato punto d'universo un valore determinato Λ_{jk} (e quindi un valore determinato $\mathbf{t}_{jk}$) è definito dalla funzione di stato ψ solo entro certi limiti d'incertezza, e in modo tanto più preciso, quanto più piccolo è il gradiente di Λ_{jk}; allo stesso modo anche la lunghezza d'onda monodimensionale λ corrispondente ad un determinato punto è tanto meno precisamente definita quanto più forte è il gradiente di λ, vedi Fig. 1.

Heisenberg vede la legge di incertezza $\Delta p_k \Delta q_k = h$ come espressione della regola di commutazione $p_k q_k - q_k p_k = h/2i\pi$, oppure nel senso di Schrödinger come espressione del fatto che p_k rappresenta l'operatore $(h/2i\pi)\cdot\partial/\partial q_k$ nell'identità

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q_k} q_k - q_k \frac{\partial}{\partial q_k} , \psi \right\} = 1\cdot\psi(q_1 q_2 ...) \ .$$

Le nostre densità $\mathbf{t}_{jk}$ sono ora coniugate nello stesso modo alle quattro coordinate $x_1..x_4$; ma poichè $\mathbf{t}_{jk}$ dà 16 quantità, la funzione di stato ψ del continuo sarà formalmente una funzione delle 4·16 coordinate x_1^{jk}, x_2^{jk}, x_3^{jk}, x_4^{jk}; interviene poi a causa della simmetria $\mathbf{t}_{jk} = \mathbf{t}_{kj}$ una riduzione a 4·10 coordinate. Si ottiene il valore di ψ in un determinato punto d'universo x_1, x_2, x_3, x_4 se si sostituisce in tutte le x_1^{jk} il singolo valore x_1, in tutte le x_2^{jk} il singolo valore x_2, ecc., cioè se si proietta lo spazio 4.10-dimensionale sull'universo tetradimensionale. Non c'è da stupirsi che per il continuo si abbia a che fare con così tante coordinate, poichè anche per Schrödinger un sistema con n gradi di libertà possiede una funzione ψ dipendente da $3n$ coordinate spaziali; il continuo possiede in ogni punto 16 ovvero 10 gradi di libertà, il cui numero del resto si riduce ulteriormente nel caso del campo elettromagnetico. Si assumerà quindi $\mathfrak{t}_{jk}$ come rappresentante dell'operatore

$$\mathfrak{t}_{jk} = (h/2i\pi)\partial^4/\partial x_1^{jk}\ \partial x_2^{jk}\ \partial x_3^{jk}\ \partial x_4^{jk}\ ,$$

alla quale in verità non corrisponde la regola di commutazione semplice

$$\mathfrak{t}_{jk}\cdot(x_1x_2x_3x_4)^{jk} - (x_1x_2x_3x_4)^{jk}\cdot\mathfrak{t}_{jk} = h/2i\pi\ ,$$

ma una regola complicata, che non può portare ad un'algebra quantistica nel senso di Heisenberg-Born-Jordan.

La funzione periodica di de Broglie ovvero la funzione quasi periodica ψ si può generalizzare a

$$\psi = \exp(2i\pi\omega) \tag{4}$$

con

$$\omega = \sum_j \sum_k \frac{x^{jk}y^{jk}z^{jk}l^{jk}}{\Lambda_{jk}} = \frac{1}{hic} \sum_j \sum_k \mathfrak{t}_{jk}\ x^{jk}y^{jk}z^{jk}l^{jk}\ . \tag{5}$$

Se invece ci si lascia guidare dalla prescrizione che la quantità di stato ψ debba essere invariante per trasformazioni di Lorentz, si è portati alla seguente forma per ω:

$$\omega = \frac{1}{hic}\left(\sum_j \sum_k \mathfrak{t}_{jk}x_jx_k\right)\cdot\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)\ . \tag{6}$$

§ 3. Per giungere all'equazione differenziale per la funzione ψ ci si farà condurre dalle proprietà spaziotemporali delle quantità classiche $\mathfrak{t}_{jk}$. L'ingiunzione della simmetria del tensore $\mathfrak{t}$ porta immediatamente a una riduzione delle 4·16 coordinate alle 4·10 coordinate $x_i^{jk} = x_i^{kj}$. Ma anche le restanti 10 componenti di $\mathfrak{t}_{jk}$ nella posizione $x_1x_2x_3x_4$ talvolta non sono tra loro indipendenti.

Sia infatti $\mathfrak{t}$ il tensore d'energia e impulso di un campo elettromagnetico, allora sussistono in ogni punto d'universo le seguenti cinque condizioni tra le $\mathfrak{t}_{jk}$: in primo luogo l'equazione

$$\mathfrak{t}_{xx} + \mathfrak{t}_{yy} + \mathfrak{t}_{zz} + \mathfrak{t}_{ll} = 0\ , \tag{7}$$

in secondo luogo le seguenti equazioni poco note

$$\mathfrak{t}_{xx}\mathfrak{t}_{xl} + \mathfrak{t}_{xy}\mathfrak{t}_{yl} + \mathfrak{t}_{xz}\mathfrak{t}_{zl} + \mathfrak{t}_{xl}\mathfrak{t}_{ll} = 0 \tag{7'}$$

e le due equazioni corrispondenti per *y* e *z*; infine

$$\mathfrak{t}_{xy}\mathfrak{t}_{xz}\mathfrak{t}_{xl} + \mathfrak{t}_{yx}\mathfrak{t}_{yz}\mathfrak{t}_{yl} + \mathfrak{t}_{zx}\mathfrak{t}_{zy}\mathfrak{t}_{zl} = 0\ , \tag{7''}$$

di modo che delle 16 quantità $\mathfrak{t}_{jk}$ ne rimangono indipendenti solo cinque. Poichè d'altra parte in un punto le sei componenti del campo $\mathfrak{E}_x \ldots \mathfrak{h}_z$ si possono scegliere a piacere, le componenti del campo non saranno determinate completamente dalle componenti di $\mathfrak{t}$[3]. Ma invece inversamente il tensore $\mathfrak{t}$ è determinato dall'esavettore del campo elettromagnetico $\mathfrak{M}$ (ci atteniamo alla notazione di Laue, Relativitätsprinzip)

$$\mathfrak{t}_{jk} = [[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]]_{jk} = (1/2)(\mathfrak{M}_{jx}\mathfrak{M}_{kx} - \overset{*}{\mathfrak{M}}_{jx}\overset{*}{\mathfrak{M}}_{kx}) + + + \ , \tag{8}$$

dove $\overset{*}{\mathfrak{M}}$ indica l'esavettore duale di $\mathfrak{M}$, cioè $\overset{*}{\mathfrak{M}}_{mn} = \mathfrak{M}_{op}$, dove gli indici *mnop* sono tutti distinti e l'ordinamento *mnop* si riconduce ad *xyzl* con un numero pari di scambi.

Si ottiene un continuo di campo classico-elettromagnetico quando le $\mathfrak{t}_{jk}$ derivate dalla funzione ψ soddisfano la condizione

$$Div\mathfrak{t} = [\mathfrak{Rot}\Phi,\ \mathrm{Div}\mathfrak{Rot}\Phi] \quad \text{con } \mathrm{Div}\Phi = 0\ . \tag{9}$$

Si chiamano allora il primo fattore $\mathfrak{Rot}\Phi = \mathfrak{M}$ vettore di campo, il secondo fattore $\mathrm{Div}\mathfrak{Rot}\Phi = P$ tetradensità, Φ tetrapotenziale, e lo stesso $-Div\mathfrak{t}$ densità di tetraforza, e si ottengono automaticamente le equazioni di Maxwell

---

[3] *Per il calcolo delle 6 quantità $\mathfrak{M}$ da $\mathfrak{t}$ si hanno le seguenti 5 equazioni*

$$\mathfrak{M}_{1k}\mathfrak{t}_{1k} + \mathfrak{M}_{2k}\mathfrak{t}_{2k} + \mathfrak{M}_{3k}\mathfrak{t}_{3k} + \mathfrak{M}_{4k}\mathfrak{t}_{4k} = 0 \quad \text{per } k=1,2,3,4,$$

e $[[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]]^2 = \mathfrak{t}^2$.

$$\mathrm{Div}\ \mathfrak{M} = P, \quad \mathrm{Div}\ \overset{*}{\mathfrak{M}} = 0\ . \qquad (10)$$

La relativa funzione ψ rappresenta la funzione di de Broglie.

Un’elettrodinamica quantistica che forse si discosterebbe da quella classica si dovrebbe costruire nel senso di Schrödinger da un’equazione differenziale per la funzione ψ stessa e dovrebbe nel limite $h = 0$ coincidere con il caso precedente di de Broglie.