Interpretazione quantomeccanica della teoria di Weyl[1,2]

F. London a Stoccarda.

(ricevuto il 25 febbraio 1927)

Capitolo I. La teoria di Weyl.

È noto che l'idea di una "pura geometria dell'intorno" concepita per primo da Riemann ha ricevuto recentemente da parte di Weyl un completamento straordinariamente bello e semplice. Si può considerare l'idea di spazio di Riemann come l'eliminazione del pregiudizio che le relazioni di curvatura in un posto dello spazio debbano essere vincolanti per la curvatura in tutti gli altri. Per dare un senso a quest'idea di Riemann era inizialmente necessaria l'ipotesi che il regolo che si utilizza in ogni posto per determinare i coefficienti g_{ik} della forma fondamentale metrica

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

fosse un regolo "rigido".

Invece Weyl rileva giustamente che l'ipotesi di un siffatto regolo rigido è contraria ad una geometria radicale dell'intorno, poiché solo i rapporti dei g_{ik} in un posto, non il loro valore assoluto, possono essere determinati in modo significativo, e corrispondentemente pone per la variazione dl di un regolo di misura di lunghezza l sottoposto ad uno spostamento infinitesimo dx^i:

$$dl = l \varphi_i dx^i, \tag{1}$$

dove i coefficienti di proporzionalità φ_i sono funzioni della posizione, caratteristiche delle relazioni metriche dello spazio - analogamente ai g_{ik}. Ovvero, se si integra la (1):

$$l = l_0 \exp \left[\int \varphi_i dx^i \right] \tag{2}$$

($l_0 = l$ all'inizio dello spostamento). Il regolo campione dipende in generale dal cammino (non è integrabile); lo è allorché le quantità

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \tag{3}$$

[1] Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl, Zeitschr. f. Phys. **42**, 375-389 (1927).

[2] Presentato in parte alla seduta del Gauverein Württemberg della D. Phys. Ges. Stuttgart il 18 dicembre 1926; vedi anche una relazione riassuntiva provvisoria in Naturwiss. **15**, 187, 1927.

s'annullano. Riguardo a queste quantità f_{ik} si può secondo la loro definizione (3) esprimere l'identità (il numero di dimensioni della varietà sia 4):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0, \ i \neq k \neq l, \ i, k, l = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

La coincidenza formale di queste quattro equazioni con il primo sistema delle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + (1/c)\, \dot{\mathfrak{H}} = 0,$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

ed alcune altre analogie formali hanno portato Weyl alla conclusione che i φ_i siano da identificare a meno di un fattore di proporzionalità costante con le componenti Φ_i del tetrapotenziale elettromagnetico, e corrispondentemente le f_{ik} con le intensità di campo elettromagnetiche $\mathfrak{E}$,$\mathfrak{H}$. In logico completamento dell'interpretazione geometrica della gravitazione per mezzo della curvatura variabile dello spazio riemanniano, Weyl si immaginava la parte ancora restante delle azioni fisiche, il campo elettromagnetico, parimenti come una proprietà delle relazioni metriche dello spazio, specificata tramite la variabilità del regolo campione. Si scrive allora:

$$l = l_0 \exp\left[\alpha \int \Phi_i dx^i\right], \ (\alpha = \text{fattore di proporzionalità}). \tag{2a}$$

Ci si stupirà dell'enorme ardimento col quale Weyl ha scovato la sua teoria del significato geometrico dell'elettromagnetismo solo sulla base di queste attribuzioni puramente formali: nella teoria della relatività c'era un fatto fisico, il principio d'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale, a guidare Einstein nella sua interpretazione geometrica. Nella teoria dell'elettricità invece una circostanza del genere non era nota: non c'era nessun motivo per pensare ad un'influenza universale del campo elettromagnetico sui cosidetti regoli rigidi (ovvero orologi). Del tutto all'opposto, gli atomi come orologi per esempio rappresentano dei campioni la cui indipendenza dalla storia passata è provata dalla nettezza delle righe spettrali, in contrasto col campione non integrabile (2a), che Weyl assume in un campo magnetico. Ci voleva un convincimento metafisico insolitamente netto per non distogliere Weyl, malgrado queste esperienze così elementari, dall'idea che la natura dovesse far uso di questa bella possibilità geometrica a lei offerta. Egli ha mantenuto la sua interpretazione ed ha aggirato la discussione della contraddizione su delineata mediante una reinterpretazione alquanto oscura del concetto di "misura reale", con la qual cosa però alla teoria veniva sottratto il suo significato fisico così pregnante, ed essa perdeva perciò molta della sua forza di convinzione.

Non ho bisogno di addentrarmi qui in questa trasformazione astratta della teoria. Mostrerò invece che proprio nell'interpretazione pregnante originaria della teoria di Weyl è insita una forza molto più grande di quella che il suo autore già aveva reso effettiva, che cioè in essa si deve scorgere nientemeno che una via conseguente alla meccanica ondulatoria, e solo da questo punto di vista essa assume un senso fisico immediatamente comprensibile.

Capitolo II. La meccanica ondulatoria di de Broglie e la teoria di Weyl.

Come "teoria di de Broglie" indico quell'abbozzo ancora incompleto della meccanica ondulatoria nel quale la funzione d'onda del moto d'un elettrone (alla quale ci limitiamo qui)

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i}{h} W\left(x_i\right)\right], \; i = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

deriva da una soluzione completa W dell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) = -m_0^2 c^2, \tag{6}$$

dove le costanti d'integrazione sono da determinarsi in modo noto in maniera tale che ψ sia una funzione dello spazio ad un sol valore, cioè che W sia additivamente periodica, con un multiplo intero della costante di Planck come periodo.

Quando si fa sul serio con l'idea radicale della materia come continuo, con la risoluzione dell'elettrone confinato con discontinuità in una grandezza di campo variabile con continuità nello spazio e nel tempo, come risulta naturale con questa teoria di de Broglie e conseguentemente con la teoria di Schrödinger considerata in seguito[3], si perviene ad una difficoltà di principio assai grave se si cerca che senso si debba attribuire alle asserzioni metriche all'interno del continuo ondulatorio. Infatti in questo mezzo oscillante e fluttuante, esteso all'infinito, che si deve considerare al posto dell'elettrone limitato, non si trova nessuna discontinuità immutabile, nessun corpo rigido, che come campione riproducibile potrebbe consentire la determinazione di una lunghezza.

Non mi occupo affatto dell'idea secondo la quale, per parlare di geometria nell'ambito atomico, si dovrebbe indicare un procedimento eseguibile di misura; di cosa siffatta non si può parlare neanche nella teoria degli elettroni. Ma se si vuole associare un qualche senso definito alla prescrizione d'una metrica, questo mi pare il minimo che si possa richiedere: che si dia un qualche oggetto reale (come "prototipo") al quale le asserzioni metriche siano riferite: un diametro dell'elettrone, o una distanza ecc., sebbene tali asserzioni possano ancora trovarsi in un rapporto assai problematico con una misura eseguibile.

Ma un siffatto oggetto reale non è disponibile nel continuo ondulatorio. Il principio di identità non si può applicare al $\pi\alpha\nu\tau\alpha$ $\rho\varepsilon\iota$ delle onde che appaiono e scompaiono, non si può fissare nel continuo nessun contrassegno atto a fornire una misura riproducibile. La posizione di principio in cui ci si è collocati sarebbe del tutto senza speranza se Weyl, nella sua generalizzazione del concetto di spazio di Riemann, non avesse già procurato un tipo di spazio nel quale la non riprodicibilità

[3] È noto che si adducono ragioni importanti per le quali è stato suggerito, prima di tutti da Born e dai suoi collaboratori, che l'intero formalismo ondulatorio vada reinterpretato in senso statistico. Se la densità di carica viene reinterpretata come una funzione peso statistica non è difficile vedere che si ha in quel caso la stessa indeterminazione rispetto all'applicabilità del principio di identità alla quale accenniamo qui. Ma poiché quella concezione in primo luogo respinge ogni interpretazione nello spazio e nel tempo, per essa il rapporto con la teoria dello spazio di Weyl è di scarso interesse.

delle unità campione viene prevista come postulato coerente di una radicale geometria dell'intorno. Se prima questa teoria nell'immagine del mondo della teoria degli elettroni discontinui era un peso superfluo, poiché si credeva di avere proprio negli elettroni dei regoli riproducibili, ora la situazione è fondamentalmente cambiata. Si è costretti addirittura a ritirar fuori il concetto generale di spazio di Weyl e a cercare di applicarlo al continuo di Schrödinger. E si scopre ora una relazione semplice.

§1. Assumiamo di possedere già un regolo l che cambi secondo la prescrizione di Weyl (2a), e portiamolo in giro nel campo ψ. E precisamente sia trasportato con la velocità di corrente della materia, con la velocità di gruppo

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right). \tag{7}$$

Affermo che con questa prescrizione naturale sul cammino lo scalare di Weyl l sarà numericamente identico allo scalare di campo di de Broglie ψ. In proposito bisogna fare ancora due precisazioni:

Nel regolo campione di Weyl era rimasto ancora indeterminato un fattore α: per esso faccio l'ipotesi che sia uguale a $2\pi ie/hc$. Quindi ora

$$l = l_0 \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\int \frac{e}{c}\Phi_i dx^i\right]. \tag{2a}$$

E infine ancora: non utilizzo esattamente la ψ dell'equazione (5), ma la ψ pentadimensionale dotata del fattore $\exp\left[\frac{2\pi i}{h}m_0c^2\tau\right]$ come nelle proposte di Klein, Fock e Kudar, ove per τ s'ha da intendere il tempo proprio[4]. Sia ora

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\left(W + m_0c^2\tau\right)\right] \tag{5a}$$

ovvero

$$= \exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int \frac{\partial W}{\partial x_i}dx^i + m_0c^2\tau\right]\right\}.$$

Questa quantità ψ va confrontata col regolo di Weyl (2a) trasportato lungo la corrente del continuo. S'ottiene:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0}\exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)dx^i + m_0c^2\tau\right]\right\};$$

qui i dx^i s'hanno da definire secondo la corrente data dalla (7):

$$= \frac{1}{l_0}\exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\frac{d\tau}{m_0} + m_0c^2\tau\right]\right\}.$$

[4]Questa interpretazione di τ, che risale a Kudar, Ann. d. Phys. **81**, 632, 1926, è in pieno accordo con l'interpretazione da poco discussa del moto di rotazione proprio dell'elettrone come coordinata angolare (Naturwissenschaften **15**, 15, 1927). Infatti questo angolo di rotazione si può intendere come un orologio portato con sè dall'elettrone. Esso si trasforma come il tempo proprio.

A causa dell'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi (6) l'integrando è uguale a $-m_0c^2$ e s'ottiene

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \cdot \text{cost.}} = \text{ cost.} \tag{8}$$

Si è trovato l'oggetto fisico che si comporta come il regolo di Weyl: l'ampiezza complessa dell'onda di de Broglie; in un campo elettromagnetico essa subisce esattamente l'influenza che Weyl ha postulato per il suo regolo, e al quale egli - come ad un termine rimasto privo di significato della fisica di quel tempo - ha dovuto attribuire un'esistenza metafisica. Essa è quindi per così dire il prototipo del regolo di Weyl. E analogamente a come nella teoria della gravitazione è a nostro arbitrio parlare della deviazione dei raggi di luce e delle masse, oppure del loro moto geodetico in uno spazio riemanniano, così la (8) ci dà la possibilità di interpretare geometricamente il processo ondulatorio della materia di de Broglie e l'influenza su di esso da parte del potenziale elettromagnetico mediante uno spazio di Weyl uniformemente riempito di materia, la cui connessione metrica non è però integrabile.

In assenza di campi elettromagnetici per la (2a) il regolo dovrà esser costante. Si dovrebbe quindi ottenere anche un valore costante della funzione d'onda di de Broglie, se la si seguisse con la corrispondente velocità di corrente, cioè con la velocità di gruppo (v sempre $< c$). Ciò appare in contraddizione con i risultati più basilari di de Broglie, secondo il quale le fasi delle suo onde avanzano con una velocità di fase ben più grande $\left(u = c^2/v\right)$. Ma ciò qui non c'entra, infatti prima s'è utilizzata non esattamente la ψ di de Broglie, ma quella estesa a cinque dimensioni, che è priva di dispersione, e conseguentemente cade qui la distinzione tra velocità di gruppo e velocità di fase. Ci si convince subito facilmente che l'onda piana

$$\psi = \exp\left[-\frac{2\pi i}{h}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}t - \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}x - m_0c^2\tau\right)\right], \ \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

se viene inseguita con la velocità v mostra fase costante.

Un'obiezione ulteriore, che noi qui si confronti ψ, una densità, con una lunghezza l, non mi pare presenti comunque nessuna difficoltà. Si dovrebbe confrontare sin dall'inizio ψ con l^{-3}, cosa che significherebbe solo un cambiamento nella scelta del fattore indeterminato α. Naturalmente si potrebbe anche, per tener conto della relazione qui scoperta, attribuire alla grandezza campione l di Weyl fin da principio le stesse dimensioni della ψ di de Broglie. Una tale idea non poteva aver posto nella teoria di Weyl, poiché in essa niente era noto sulla "natura" di l.

Una difficoltà più seria sembra presentare alla comprensione la forma complessa del trasporto del regolo. È del tutto inammissibile limitarsi alla parte reale. Si trova qui il riscontro del fatto che la funzione d'onda ψ va intesa come essenzialmente complessa, o meglio, che essa rappresenta l'unione di due grandezze di stato fisiche, cioè $\psi\bar{\psi}$ e la parte reale di $(h/2\pi i)\ln\psi$. In questo senso si deve intendere anche il fatto che nel problema variazionale della meccanica ondulatoria ψ e $\bar{\psi}$ vadano variate indipendentemente. Ma che cosa debba significare il fatto che ogni segmento vada considerato come una grandezza complessa, e che l'intera variabilità di Weyl del regolo di misura ora risulti una variazione della sola fase con la conservazione del valore assoluto, non posso ancora discuterlo.

§2. Ma c'è ancora l'obiezione, a cui abbiamo accennato prima, che l'esperienza è contro la non integrabilità del regolo campione. Si vede già fin d'ora come si deve risolvere questa difficoltà. La teoria dei quanti consente alla materia solo una sequenza discreta di stati di moto, e vien da supporre che questi moti privilegiati consentano di trasportare il regolo soltanto in modo tale che la fase al ritorno al punto di partenza abbia eseguito esattamente un numero intero di giri, sicché malgrado la non integrabilità del trasporto delle lunghezze il regolo campione è realizzato in modo unico in ogni posizione. Ci si ricordi infatti delle proprietà di risonanza delle onde di de Broglie, la stessa con la quale de Broglie per primo ha reinterpretato la vecchia condizione quantica di Sommerfeld - Epstein. Questa è altresì associata alla velocità di fase: ma in seguito all'estensione pentadimensionale della funzione d'onda il processo oscillatorio è privo di dispersione, e la nostra velocità di corrente è pertanto identica alla velocità di fase. Perciò, e a causa dell'identità della funzione d'onda ψ con il regolo di Weyl risulta già provato[5] che anche il regolo di Weyl, se lo trasporto solo seguendo la corrente di materia possibile per la teoria dei quanti, partecipa della risonanza delle onde di de Broglie e malgrado la non integrabilità dell'espressione differenziale (2a) nel campo elettromagnetico porta tuttavia ad una determinazione unica delle lunghezze in ogni punto. Se nella teoria di Weyl si fosse inclusa assiomaticamente l'univocità del concetto di lunghezza come un fatto sperimentale generalmente riconosciuto, si sarebbe stati portati in modo conseguente al sistema di stati di moto discreti della teoria dei quanti "classica" e alle sue onde di de Broglie.

Non posso abbandonare quest'argomento senza sottolineare che questa proprietà di risonanza del regolo campione di Weyl, che qui ci si presenta come legge caratteristica della meccanica ondulatoria, era stata suggerita già nel 1922 da Schrödinger[6] come una "proprietà notevole delle orbite quantiche" e dimostrata in un certo numero d'esempi, senza che allora egli ne riconoscesse il significato. Egli aveva anche considerato la possibilità $\alpha = 2\pi i \cdot (e/hc)$, ma non aveva riconosciuto la superiorità rispetto ad un'altra scelta di α. Così già allora Schrödinger aveva avuto in mano le caratteristiche periodicità quantomeccaniche che avrebbe riincontrato successivamente da un punto di vista così completamente diverso.

Perciò forse non è superfluo che io dimostri questa congettura di Schrödinger anche indipendentemente dalla connessione con la meccanica ondulatoria, come una legge della teoria dei quanti "classica", com'era intesa originariamente. Si afferma quindi: l'esponente del regolo di Weyl, trasportato su di un'orbita quantica chiusa spazialmente, è un multiplo intero della costante di Planck:

$$\oint \frac{e}{c}\Phi_i dx^i = nh. \tag{9}$$

Per dimostrarlo si utilizza la relazione già applicata nel §1:

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) dx^i = -\int m_0 c^2 d\tau = -\int m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt.$$

A seguito delle relazioni quantiche

$$\sum_{i=1}^{3} \oint \frac{\partial W}{\partial x^i} dx^i = nh$$

[5] Questa conclusione non è esatta, ma sarà subito rettificata.

[6] E. Schrödinger, ZS. f. Phys. **12**, 13, 1922.

si ottiene da qui:

$$\oint \left(\frac{\partial W}{\partial x_4} dx_4 - \frac{e}{c} \Phi_i dx^i \right) = -nh - \oint m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt.$$

Supposto che esista un integrale dell'energia, si ha

$$\frac{\partial W}{\partial x_4} dx_4 = -\left(E_{cin} + E_{pot}\right) dt,$$

quindi:

$$-\oint \frac{e}{c} \Phi_i dx^i = -nh + \oint \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + E_{cin} + E_{pot} \right) dt.$$

L'integrale al secondo membro si annulla a causa della generalizzazione relativistica del teorema del viriale[7] sotto l'ipotesi che il potenziale sia omogeneo di grado -1 negli x^i, dalla quale discende immediatamente l'asserto (9).

Si vede da questa derivazione che con due sole ipotesi si ottiene la dimostrazione dell'univocità del regolo di Weyl. Queste ipotesi (in particolare la prima) sono evidentemente assai importanti e certamente non si potranno aggirare del tutto. Esse garantiscono certe relazioni stabili nello spazio, per le quali è consentito di parlare di orbite spazialmente chiuse nell'universo di Minkowski, affermazione che è in generale del tutto dipendente dal sistema di riferimento. Si dovranno quindi indicare queste ipotesi come condizioni per poter applicare la legge dell'identità allo spazio.

Per lo più le orbite non saranno esattamente periodiche, ma solo quasi periodiche. Si può allora dimostrare sotto opportune ipotesi di continuità che con approssimazione sufficiente al punto d'arrivo il regolo di Weyl coincide con quello

[7] Non mi è nota dalla letteratura una dimostrazione della generalizzazione relativistica del teorema del viriale, perciò la comunico qui. Si ha

$$\oint \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{pot} \right) dt$$

$$= \oint \left(\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{pot} \right) dt = \oint \left(\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{dx^i}{dt} + E_{pot} \right) dt.$$

Da qui per integrazione per parti, tenendo conto della condizione di periodicità:

$$= \oint \left(-\sum_{1}^{3} x^i \frac{dp^i}{dt} + E_{pot} \right) dt.$$

Poiché dp_i/dt per le equazioni del moto è $= -\partial E_{pot}/\partial x^i$, risulta

$$= \oint \left(\sum_{i=1}^{3} x^i \frac{\partial E_{pot}}{\partial x^i} + E_{pot} \right) dt.$$

L'integrale si annulla per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.

di partenza a meno d'un ammontare preassegnato piccolo a piacere. Di più non occorre neppure richiedere.

Il fatto che il trasporto del regolo debba avvenire sempre con la velocità (7) della materia appare assai soddisfacente; infatti un trasporto con velocità diversa sarebbe per la teoria dei quanti (cioè meccanicamente) del tutto impossibile. Vorrei rimandare ancora una giustificazione più precisa di questa connessione e il suo inserimento in una teoria della misura epistemologicamente fondata, poiché in proposito devono esser resi noti dei punti di vista sostanzialmente diversi. Sebbene si sia visto che le idee di Weyl hanno trovato un inserimento imprevisto nelle idee fisiche correnti, non credo tuttavia che ci si possa accontentare con quanto già trovato. Ho posto in primo piano l'idea del continuo della meccanica quantistica con una unilateralità che non corrisponde alle mie convinzioni. Mi sembra pur sempre auspicabile seguire queste idee con un po' di coerenza fino alla fine. In questo senso l'esposizione del capitolo seguente va considerata del tutto provvisoria. Spero di riportare in futuro l'intera connessione sotto un punto di vista fisico più generale.

Capitolo III. Reinterpretazione quantomeccanica della teoria di Weyl.

I risultati del capitolo precedente si riferiscono espressamente all'abbozzo della meccanica quantistica designato come "teoria di de Broglie". Risulterebbero quindi falsi se si volesse trasferirli direttamente alla teoria di Schrödinger - per lo meno nella regione dove le due teorie divergono. Ma si può già comunque dire che i nostri risultati devono rimanere asintoticamentee corretti nel limite di grandi numeri quantici, poiché per essi le due teorie coincidono.

Si può caratterizzare il progresso compiuto con la forma di Schrödinger della meccanica ondulatoria con il fatto che essa è in grado di "incorporare" in un continuo ondulatorio unificante le traiettorie della meccanica classica, sulle quali de Broglie aveva sovrimposto solo superficialmente un'onda tramite la (5). Nell'ottica geometrica la trattazione delle singole traiettorie prese individualmente e quella dei fronti d'onda sono fisicamente equivalenti. Nell'ottica ondulatoria invece un singolo raggio dell'onda, quando viene incorporato in un fronte di raggi, sperimenta una certa influenza dai suoi vicini. Esprimere questa influenza è la proprietà caratteristica della teoria di Schrödinger, quando essa prescrive la funzione d'onda ψ con un'equazione d'onda invece che con l'equazione differenziale (6) di Jacobi. Separando le parti reale ed immaginaria, l'equazione d'onda di Schrödinger per $\psi = |\psi| \exp\left[\frac{2\pi i}{h} W\right]$ (W reale) si scrive:

$$\begin{aligned}(10)\qquad \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{|\psi|} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) + m^2c^2 &= 0,\\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{|\psi|^2 \frac{e}{m}\left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\Phi_k\right)\right\} &= 0.\end{aligned}$$

In questa rappresentazione si riconosce il disaccordo con la teoria di de Broglie nella comparsa del termine $\Box|\psi|/|\psi|$. Inoltre qui risulta anche chiaro che si tratta di un problema con due funzioni incognite reali. La seconda equazione è l'equazione di continuità della corrente, le cui quattro componenti sono racchiuse nelle parentesi graffe.

Non c'è dubbio che attualmente si debba dare incondizionatamente la preferenza alla teoria di Schrödinger piuttosto che a quella di de Broglie per la sua concezione e per il suo miglior accordo con l'esperienza. Nella sua discrepanza rispetto alla teoria di Weyl non dobbiamo certo vedere nessun difetto della teoria di Schrödinger.

Se si osserva che le deviazioni si manifestano caratteristicamente per numeri quantici piccoli, non vi può esser dubbio riguardo a che cosa si debba ricondurre la difficoltà: la teoria di Weyl nella sua intera competenza per così dire si attaglia alla meccanica classica e quindi anche alla teoria di de Broglie ad essa associata. Non bisogna quindi aspettarsi o pretendere da essa che vada già bene con la teoria di Schrödinger. Il compito dev'essere invece quello di far eseguire alla teoria di Weyl, attualmente fuori moda, il passo corrispondente a quello che porta da de Broglie a Schrödinger; dev'essere per parte sua modificata in modo corrispondente alla correzione quantomeccanica delle leggi classiche.

Si può prevedere in quale direzione la modifica del regolo di Weyl debba avvenire. Finora si era assunto che solo il tetrapotenziale Φ_i, che fornisce una descrizione completa del campo elettromagnetico, fosse determinante per lo spostamento del regolo (2a). Ora la situazione si è modificata perché accanto alle quattro quantità di stato del campo Φ_i è comparsa come quinta la ψ di Schrödinger, che per molti aspetti - prima di tutto nella rappresentazione mediante un problema variazionale[8] - risulta simmetrica rispetto alle grandezze di campo Φ_i. La materia, nella concezione della teoria degli elettroni confinata fuori dal campo entro superfici limite invalicabili, o cacciata nelle singolarità dello stesso, ora si estende su tutto lo spazio, e mentre nella teoria di Weyl si pensava giustamente che un regolo nello spazio "vuoto" fosse influenzato solo dai potenziali elettromagnetici ivi presenti, si deve ora tener conto della circostanza che la vecchia separazione tra la materia "impenetrabile" ed il $\kappa\varepsilon\nu o\nu$ è abrogata e che ci si trova sempre per così dire all'interno di una nuova sostanza $|\psi|$ che tutto pervade[9].

Bisogna quindi aspettarsi che, oltre alle grandezze di campo elettromagnetiche esterne, si debba tener conto ancora di una interna, che dipende solo da $|\psi|$. Madelung[10] ha dato il "potenziale" di quest'azione interna del campo ψ su se stesso. Vorrei proporre come sua generalizzazione relativistica:

$$e\Phi_5 = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}}\right). \tag{11}$$

La parola "potenziale" va usata con cautela. Φ_5 non corrisponde infatti al potenziale "scalare" Φ_4, che relativisticamente figura come componente temporale di un tetravettore, ma anche relativisticamente è uno scalare invariante. Di conseguenza Φ_5 non può nemmeno governare la variazione del regolo lungo una determinata direzione d'universo. Se proprio si vuole assumere un'influenza sul regolo campione, essa può dipendere solo dal modulo dello spostamento del regolo in quattro dimensioni, non dalla sua direzione. Se si introduce mediante l'elemento di linea $dx_5 = c d\tau$ (τ =tempo proprio) una quinta coordinata che non è indipendente dalle

[8] E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927.

[9] Infatti ψ soddisfa ad un'equazione differenziale lineare. Principio di sovrapposizione! Tuttavia sembra che la proprietà di impenetrabilità trovi la sua espressione quantomeccanica nella forma del principio di esclusione di Pauli (P. Ehrenfest, Naturwissenschaften **15**, 161, 1927).

[10] E. Madelung, ZS. f. Phys. **40**, 322, 1926.

restanti dx_i, ma che si ottiene dalla condizione[11]

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 = 0, \tag{12}$$

si può supporre che

$$l = l_0 \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\int \sum_1^5 \frac{e}{c}\Phi_i dx^i\right] \tag{13}$$

rappresenti la generalizzazione quantomeccanica del regolo di Weyl.

Per dimostrare l'identità della (13) con la funzione d'onda di Schrödinger dobbiamo prima di tutto stabilire lungo quale cammino si debba trasportare il regolo generalizzato (13). Si prescriverà ancora il trasporto con la velocità di corrente della materia. Ma in proposito si deve osservare che ora le componenti u^i della tetravelocità non sono date dalla (7), sebbene la rappresentazione della corrente nella seconda delle equazioni (10) suggerisca la separazione del fattore $e\psi\bar{\psi}$ come densità di carica a riposo. Infatti le componenti della velocità individuate in tal modo per *la* (10_1) non soddisferebbero l'identità della tetravelocità[12]

$$u_k u^k = \frac{dx_k}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = -c^2. \tag{12'}$$

Si deve scrivere invece

$$\frac{dx_k}{dx_5} \equiv \frac{u_k}{c} = \frac{\psi\bar{\psi}}{\rho}\cdot\frac{e}{m_0 c}\left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\Phi_k\right), \tag{7a}$$

dove il fattore

$$\rho = e\psi\bar{\psi}\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}} = e\psi\bar{\psi}\left(1 - \frac{e}{m_0 c^2}\Phi_5\right) \tag{14}$$

viene separato come "densità di carica a riposo".

Con questa notazione s'ottiene

$$e\Phi_5 = m_0 c^2\left(1 - \frac{\rho}{e\psi\bar{\psi}}\right) \tag{11a}$$

e la prima equazione di Schrödinger in forma pentadimensionale si scrive[13]

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) = 0. \tag{10a}$$

---

[11] La comparsa di questa forma quadratica pentadimensionale è del tutto coerente nel senso della prescrizione di Weyl dell'invarianza rispetto al regolo campione. L'elemento di linea d'universo $d\tau$ ovvero dx_5 è un invariante relativistico, ma non è invariante per il cambio d'unità (il passaggio ad un'altra unità di misura cambia $d\tau$); lo è invece l'annullarsi della forma quadratica (12). - Evidentemente i postulati pentadimensionali di Kaluza vanno intesi in questo senso.

[12] Se non altrimenti dichiarato, nel seguito la sommatoria sugli indici uguali si intende sempre estesa da 1 a 4.

[13] Si deve qui osservare che Φ_5 per parte sua è ancora un'incognita da determinarsi. È noto che è ancora un prodigio incompreso il perché la stessa cosa non valga per i potenziali $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, come ci si dovrebbe aspettare (E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927). $\partial W/\partial x_5$ è uguale a $m_0 c$ [vedi (5a)].

Confrontiamo ora il regolo l (13) lungo la corrente (7a) con lo scalare di Schrödinger ψ. Si ottiene per ψ/l:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0} \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\int\sum_1^5\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)dx_i\right],$$

la (7a) dà:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h}\int\sum_1^4 \frac{\psi\bar\psi}{\rho}\cdot\frac{e}{mc}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)dx_5 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_5} - \frac{e}{c}\Phi_5\right)dx_5},$$

la (11a) dà:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h}\int\frac{\psi\bar\psi}{\rho}\cdot\frac{e}{mc}\sum_1^5\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)dx_5}$$

$$= \frac{|\psi|}{l_0}.$$

L'ultima per la (10a). Non s'ottiene quindi subito ψ/l =cost., ma

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0}, \tag{8a}$$

che è funzione univoca della posizione[14]. Ma il potenziale Φ_k è determinato fisicamente solo a meno di un gradiente additivo; se al suo posto introduco come potenziale

$$\phi_k^* = \phi_k - \frac{hc}{2\pi ie}\frac{\partial}{\partial x^k}\ln|\psi|,$$

cosa che lascia intatte le intensità di campo elettromagnetiche, risulta ψ/l = cost.

L'univocità del regolo campione trasportato con la corrente, che si fonda sulla risonanza delle onde, ora si trasferisce senz'altro dalla teoria di de Broglie a quella di Schrödinger, perciò non dobbiamo aggiunger nulla alle considerazioni del 2^0 capitolo.

Stuttgart, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, 27 febbraio 1927.

---

[14] La dimostrazione si può esprimere così nel senso della geometria pentadimensionale:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) \text{ è parallelo alla pentacorrente:} j_i = \frac{e}{m}\psi\bar\psi\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right),$$

dx^i dovrà essere scelto parallelo alla pentacorrente j^i.

La pentacorrente è ortogonale a se stessa:

$$\sum_1^5 j_i j^i = 0;$$

quindi j_i è anche ortogonale a dx^i, e quindi

$$\sum_1^5\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)dx^i = 0.$$

Devo questa bella formulazione ad una comunicazione di A. Landé. Qui la quinta componente della pentacorrente è $j_5 = \rho c$.