Una possibile connessione tra la costante di Planck *h* e l'azione ponderomotrice di radiazione polarizzata circolarmente[1]

S. Pokrowsky[2] a Leningrado

(ricevuto il 2 luglio 1929.)

Tutte le azioni ponderomotrici di radiazione polarizzata ellitticamente possono essere ottenute quando si assume che radiazione polarizzata circolarmente consista di singoli momenti della quantità di moto elementari, uguali ad ħ, gli assi dei quali giacciano paralleli alla radiazione; otteniamo così la formula generale (6).

Sebbene l'utilizzo della costante di Planck *h* comprenda campi sempre più vasti della fisica teorica, finora la sua natura e il suo significato fisico rimangono del tutto non chiariti. Tutti i tentativi più o meno appropriati di porre questa costante in una qualche relazione con altre quantità fisiche completamente determinate non possono essere ritenuti fondati e trovano la loro giustificazione fino ad un certo punto solo a posteriori dai risultati raggiunti. Poichè la costante *h* ha la dimensione del momento della quantità di moto, è interessante cercare se essa non sia in generale in una qualche relazione mutua con le coppie ponderomotrici che in certi casi lamine con doppia rifrazione subiscono quando sono attraversate da radiazione polarizzata. Un particolare interesse a questo riguardo può offrire la radiazione polarizzata circolarmente. Dal punto di vista della teoria ondulatoria è estremamente difficile rappresentarsi il meccanismo delle radiazioni polarizzate ellitticamente e circolarmente. L'onda è la superficie d'egual fase, perciò nel caso delle radiazioni prima considerate le rotazioni "del qualcosa" nell'onda piana devono avvenire con ugual fase ed in una medesima direzione. Quest'ultima circostanza rende completamente oscuro il carattere dei moti nelle regioni che corrispondono a radiazione confinata,

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **57**, 278 (1929).

[2]*Comunicato nella seduta del 30 aprile 1918 della sezione di fisica della società russa di fisica-chimica.*

dove le velocità devono essere orientate in direzioni esattamente opposte. In base a quanto detto non dovrebbe essere giusto assumere che nella radiazione polarizzata circolarmente noi incontriamo dei processi che sono mutuamente separati nello spazio, per così dire separati mediante spazio vuoto intermedio? Poichè ogni radiazione polarizzata rettilineamente è equivalente dal punto di vista cinematico a due radiazioni circolari polarizzate in direzioni opposte, l'idea di questa separazione si può in generale estendere alla costituzione di altra radiazione a piacere. D'altra parte le ricerche attuali sulla teoria dell'energia raggiante fanno attribuire ad essa una costituzione atomica. Secondo questa conclusione una corrente d'energia raggiante è composta dalle sue quantità separate $e=h\nu$, dove h è la costante di Planck, ν la frequenza delle oscillazioni luminose. Sorge spontaneamente la domanda su che carattere abbia questa energia: potenziale o cinetica. Vi saranno regioni con sforzi di Maxwell fittizi, oppure vi sarà nello spazio un processo isolato temporalmente periodico? Forse interverranno nella radiazione singoli "quanti di luce" oppure loro complessi, simili a piccoli fulmini globulari; con la differenza che nel caso di questi ultimi la velocità risulta assai piccola rispetto alla velocità della luce. Poichè la radiazione polarizzata circolarmente rappresenta dal punto di vista di una qualsiasi teoria della luce "qualcosa che gira", con l'asse di rotazione parallelo alla direzione della radiazione, sorge spontaneamente la domanda, se non si incontri in casi determinati una manifestazione immediata e particolare della proprietà h, che sia esente da ogni processo ulteriore e secondario. Non sono gli assi di tutte le rotazioni nella radiazione paralleli a quelli, rispetto ai quali si prendono i momenti h delle quantità di moto elementari? Allora h o è di per sè il momento elementare della quantità di moto, o è una grandezza ad esso proporzionale. Se si assume che la quantità elementare di energia ε nel caso della radiazione polarizzata circolarmente sia collegata in un modo finora per noi sconosciuto attraverso il lavoro al momento elementare della quantità di moto kh, dove k è un certo coefficiente di proporzionalità, si può scrivere:

$$\varepsilon = 2\pi\nu k h = h\nu \ ,$$

e di conseguenza non si deve assumere h, bensì $\hbar$ come momento elementare della quantità di moto nella radiazione. E' noto che la stessa quantità è stata considerata da Sommerfeld e Bohr.

Il valore conservato del momento elementare della quantità di moto nella radiazione polarizzata circolarmente consente di determinare in modo estremamente facile le sue azioni ponderomotrici in base alla conservazione del momento della quantità di moto. Se si assume che vi siano in 1 cm^3 N momenti elementari di quantità di moto $\hbar$, la densità spaziale dell'energia nella radiazione polarizzata circolarmente sarà:

$$u = h\nu N = \varepsilon N \ .$$

Se un fascio di questa radiazione incide normalmente su una superficie assorbente, allora la coppia M che essa subisce, calcolata per una superficie unitaria, dev'essere uguale alla variazione totale del momento della quantità di moto che avviene nell'unità di tempo, cioè

$$M = N\hbar c = \lambda u/(2\pi) \qquad (c=\lambda\nu) \ . \tag{1}$$

Secondo l'equivalenza cinematica della radiazione polarizzata ellitticamente con quella polarizzata circolarmente non è difficile derivare per mezzo dell'espressione (1) le azioni ponderomotrici della prima, che saranno uguali alla somma algebrica delle azioni delle radiazioni polarizzate circolarmente che la costituiscono. In tal modo in generale per tutti i casi, nei quali appaia o sparisca della radiazione polarizzata ellitticamente, deve sempre comparire la coppia corrispondente. Passeremo ora alla sua determinazione. Nella radiazione polarizzata ellitticamente, per esempio a sinistra quando la si osservi di contro, il moto oscillante sarà espresso mediante le equazioni seguenti, che si riferiscono agli assi dell'ellisse:

$$X = a\cos(\omega t-\alpha) \ ;$$

$$V = b\sin(\omega t - \alpha) \ .$$

Questo moto è equivalente a due moti circolari che si svolgono con ampiezze differenti in direzioni opposte:

$$X = \frac{a+b}{2}\cos(\omega t-\alpha) + \frac{a-b}{2}\cos(\omega t-\alpha) \ ;$$

$$V = \frac{a+b}{2}\sin(\omega t-\alpha) - \frac{a-b}{2}\sin(\omega t-\alpha) \ .$$

La coppia totale, che appare per assorbimento o per trasformazione della radiazione ellittica in qualcosa d’altro, dovrà quindi essere uguale a

$$M = M'_z + M_z = \lambda u_1/(2\pi) - \lambda u_2/(2\pi)$$

$$= \frac{\lambda}{32\pi^2}(a+b)^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2}(a-b)^2 = \frac{ab\lambda}{8\pi^2} \qquad (2)$$

ed è diretta secondo la direzione di rotazione del vettore luminoso in questa radiazione, cioè dalla componente con fase più grande a quella con fase più piccola. Se si riesprimono le oscillazioni con le equazioni

$$X = a\sin(\omega t-\alpha) \ ,$$

$$V = b\sin(\omega t-\alpha-\delta) \ , \qquad (3)$$

si devono calcolare gli assi principali $2A$, $2B$ del moto ellittico risultante per trovare la coppia generata dalla radiazione; otteniamo allora

$$M = \frac{AB\lambda}{8\pi^2} \ . \qquad (2')$$

Ora, per il teorema di Apollonio

$$AB = ab\sin\delta \ ,$$

dalla quale

$$M = \frac{ab\sin\delta}{8\pi^2}\lambda \ . \qquad (4)$$

Applichiamo le formule (2) e (4) al caso generale, quando la radiazione ellittica penetra ortogonalmente alla superficie in una lamina cristallina levigata parallelamente all'asse. La coppia da noi considerata sarà uguale alla somma algebrica delle azioni della radiazione che incide sulla lamina e di quella che ne esce. Indichiamo come prima le componenti delle oscillazioni ellittiche lungo gli assi X e V con

$$X = a\cos(\omega t - \alpha) \ ;$$

$$V = b\sin(\omega t - \alpha) \ .$$

Una volta che questa radiazione sia entrata nella lamina e si sia ivi trasformata, provocherà una coppia che è orientata lungo la radiazione ed è uguale a

$$M = \frac{AB\lambda}{8\pi^2} \ .$$

Proiettiamo le oscillazioni sugli assi coordinati che stanno costantemente solidali con la lamina, orientando l'asse Ξ lungo l'asse ottico della lamina; abbiamo allora per la radiazione che esce dalla lamina

$$\xi = A\sin(\omega t - \alpha - \delta_e + \varphi) \ ;$$

$$\eta = B\sin(\omega t - \alpha - \delta_o - \psi) \ ; \qquad (5)$$

dove

$$A^2 = a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta \ ;$$

$$B^2 = a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta \ ;$$

$$\mathrm{tg}\varphi = (a/b)\mathrm{ctg}\beta \ ; \qquad \mathrm{tg}\psi = (a/b)\mathrm{tb}\beta \ ;$$

$$\delta_e = 2\pi d/\lambda_e \ ; \qquad \delta_o = 2\pi d/\lambda_o \ ;$$

d è lo spessore della lamina; β l'angolo tra gli assi X e Ξ; λ_o la lunghezza d'onda della radiazione ordinaria; λ_e la lunghezza d'onda della radiazione straordinaria. Secondo la formula (4) la radiazione (5) all'uscita dalla lamina esercita su di essa una coppia che è orientata in senso opposto rispetto alla rotazione del vettore luminoso in questa radiazione, e risulta essere

$$M_2 = -\frac{\delta}{8\pi^2} AB\sin(\varphi+\psi+\delta) ,$$

dove

$$\delta = \delta_o - \delta_e = \frac{2\pi d}{\lambda}(\mu_o - \mu_e) ;$$

$$\sin(\varphi+\psi+\delta) = \frac{2ab - 4ab\sin^2(\delta/2) - (a^2 - b^2)\sin 2\beta \sin\delta}{2AB} .$$

μ_o significa l'indice di rifrazione della radiazione ordinaria; μ_e l'indice di rifrazione della radiazione straordinaria.

Così la coppia totale che la lamina cristallina subisce sotto l'azione della radiazione suddetta è uguale alla somma delle coppie prima date

$$M = M_1 + M_2 = \frac{ab\lambda}{8\pi^2} - \frac{AB\lambda}{8\pi^2}\sin(\varphi+\psi+\delta)$$

$$= \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[(a^2 - b^2)\sin 2\beta \sin\delta + 4ab\sin^2(\delta/2) \right] . \qquad (6)$$

Quest'espressione per la coppia l'ho ottenuta nel 1910 dalla formula generale per le azioni ponderomotrici dell'energia raggiante[3]. Da questa si discosta assai poco la formula approssimata per i momenti analoghi che nel 1899 è stata derivata da A.I. Sadowsky dalla teoria elettromagnetica di Maxwell[4].

Leningrado, laboratorio di fisica dell'istituto elettrotecnico.

---

[3]S. Pokrowsky, Journ. Russ. Phys.-Chem. Ges. **43**, Phys. T. 375, 1911; Phys. ZS. **12**, 1118, 1911.

[4]A.I. Sadowsky, Ponderomotorische Wirkungen der elektr. und Lichtwellen auf Kristalle. Dorpat (Russisch) 1899.