Una proprietà notevole delle orbite quantiche di un elettrone singolo[1].

Erwin Schrödinger a Zurigo.

(ricevuto il 5 ottobre 1922)

Nella geometria d'universo di Weyl[2] interviene oltre alla nota forma quadratica del differenziale, che determina la metrica nel singolo punto d'universo, anche una forma lineare

$$\varphi_0 dx_0 + \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3 = \varphi_i dx_i,$$

che fissa la *connessione metrica* dei punti d'universo tra loro. Il suo significato geometrico è che la lunghezza di un "segmento" l (quadrato del valore assoluto di un vettore) non rimane immutata per "trasporto congruente" del segmento in un punto adiacente, ma subisce la variazione

$$dl = -l\varphi_i dx_i. \tag{1}$$

Weyl ha scoperto che mediante le due insieme (metrica del singolo punto d'universo + connnessione metrica) si determina una connessione affine dell'universo (cioè il concetto di trasporto parallelo d'un vettore), purché solo si ammetta che per spostamento parallelo di un vettore anche la sua lunghezza debba essere trasportata in modo congruente. Per trasporto congruente di un segmento lungo un tratto finito di una linea d'universo - per esempio a seguito del trasporto parallelo di un vettore lungo un simile tratto - la lunghezza del segmento risulta moltiplicata per il fattore

$$e^{-\int \varphi_i dx_i}, \tag{2}$$

dove l'integrale di linea va naturalmente esteso al tratto di linea d'universo in considerazione e *dipende essenzialmente dal cammino*, purché le quantità

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \tag{3}$$

non si annullino identicamente. - *Dal punto di vista fisico* le componenti della connessione affine su menzionata costituiscono il campo di gravitazione, e le f_{ik} il campo elettromagnetico. Se le circostanze sono tali - e se la scelta delle coordinate è così fatta - , che almeno in una regione d'universo con una certa approssimazione x_0 sia il tempo (in sec) e x_1 x_2 x_3 siano coordinate cartesiane (in cm), a meno di un fattore costante di proporzionalità universale le φ_i sono i potenziali elettromagnetici nel senso usuale:

$$V, -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_x,\ -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_y,\ -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_z. \tag{4}$$

Se scriviamo questo fattore come $\gamma^{-1}e$, dove e è il quanto elementare in unità CGS elettrostatiche, quindi

$$\varphi_0 = \gamma^{-1}eV,\ \varphi_1 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_x,\ \varphi_2 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_y,\ \varphi_3 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_z,$$

[1] Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons, Zeitschr. f. Phys. **12**, 13-23 (1923).

[2] Vedasi in proposito H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, IV ed., Berlin, Springer, 1921 - Citato in seguito con Weyl, RZM.

risulta allora che φ_0 ha la dimensione $\sec^{-1}$, eV la dimensione "energia", γ la dimensione di un'azione (g cm^2 sec^{-1}). - Il "fattore d'allungamento" (2) sarà

$$e^{-\frac{e}{\gamma}\int(Vdt-\mathfrak{A}_x dx-\mathfrak{A}_y dy-\mathfrak{A}_z dz)}. \tag{5}$$

La proprietà delle orbite quantiche annunciata nel titolo, che a me pare notevole, è che le condizioni quantiche "pure", cioè quelle che sono sufficienti a determinare l'energia e quindi lo spettro, sono anche proprio sufficienti a rendere l'*esponente del fattore di allungamento (5) un multiplo intero di* $\gamma^{-1}h$ (che per quanto sopra è un numero puro) *per tutti i periodi approssimati del sistema.* Lo dimostrerò subito per i singoli casi, perché ci sono ancora dei se e dei ma da aggiungere se si esprime la legge nella forma semplice, come successo or ora. Discuterò poi l'eventuale significato del fatto, riguardo al quale però - per dirla tutta - non sono andato molto avanti.

A. *Orbita di Keplero imperturbata*[3]. L'effetto della relatività sarà per ora trascurato e trattato separatamente più avanti (punto E). Allora la sola condizione quantica "pura" è[4]

$$J = 2\tau\bar{T} = nh \tag{6}$$

(τ = periodo, $\bar{T}$ = media temporale dell'energia cinetica). Sia inoltre V il potenziale del nucleo positivo alla posizione dell'elettrone, scelto in modo che si annulli all'infinito. Allora è noto che si ha (consideriamo e in valore assoluto)

$$\bar{T} = (1/2)e\bar{V}, \tag{6a}$$

quindi, sostituendo nella (6),

$$e\tau\bar{V} = e\int_0^\tau V dt = nh. \tag{7}$$

L'esponente del fattore d'allungamento (5) sarà quindi - nh/γ per un periodo. - Il solo "se e ma" di questo caso semplicissimo è la normalizzazione della costante additiva in V.

B. *Effetto Zeeman.* Meccanicamente si tratta ora della precessione di Larmor con la frequenza (= numero di giri di precessione al secondo)

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{eH}{4\pi mc}. \tag{8}$$

Dal punto di vista della teoria dei quanti rimane valida la condizione precedente ed assicura "l'interezza dell'esponente d'allungamento". (come diremo per brevità) per il *primo* quasi periodo τ, sempre approssimato. Una trattazione più accurata mostra che la (7) resta valida fino a termini che sono *quadratici* in H, poiché il

[3]Come il Prof. Weyl mi ha comunicato per lettera, la legge per questo caso era nota a Fokker già da due anni, e lo ha anche portato a contemplare la possibilità di valori di φ_i immaginari puri (vedi il seguito).

[4]Seguiamo in tutto la concezione di Bohr, in particolare la sua teoria dei sistemi periodici debolmente perturbati, com'è esposta nella parte II della serie di dissertazioni ancora incompleta dell'accademia di Copenaghen. Kopenhagener Akademieschriften, Naturw. u. Mathem. Abt., serie 8^a, **1**, 2, 1918. Citata nel seguito come Bohr, l.c.

teorema di Larmor vale in questa approssimazione e per un sistema d'assi ruotato valgono, dal punto di vista meccanico e della teoria dei quanti, le stesse condizioni che, nel caso A, valgono per un sistema in quiete. Se ora ci chiediamo se l'interezza sussista anche per il *secondo* quasiperiodo ϑ, possiamo trascurare il termine V, poiché esso produce certamente un contributo intero (cioè tante volte $-nh$, quanti giri semplici comprende il ciclo di Larmor. - Ora è noto che la seconda condizione quantica richiede che per il momento angolare attorno all'asse del campo sia

$$2m\frac{f}{\tau} = \frac{n'h}{2\pi}. \tag{9}$$

f è la proiezione della superficie dell'ellisse sul piano equatoriale. Dalla (8) e dalla (9) risulta

$$Hf \cdot \frac{\vartheta e}{\tau c} = n'h. \tag{10}$$

Hf è il flusso di forza attraverso l'ellisse, quindi

$$Hf = \int (\mathrm{rot}\,\mathfrak{A})_n df = \int_{(\tau)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz, \tag{11}$$

pertanto, secondo la (10), per l'intero ciclo di Larmor sarà

$$\frac{e}{c}\int_{(\vartheta)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz = n'h; \tag{12}$$

la condizione quantica aggiuntiva richiede quindi proprio l'"interezza" del termine aggiuntivo magnetico nell'esponente d'allungamento, esteso su un periodo di Larmor.

C. *Effetto Stark*[5]. Meccanicamente interviene qui una variazione secolare non solo della giacitura, ma anche della forma dell'ellisse di Keplero; tuttavia la variazione secolare (con l'approssimazione che interviene sperimentalmente) è puramente periodica, cioè quando l'ellisse di Keplero dopo l'esecuzione di un ciclo secolare ha ripreso la stessa forma, essa ha anche riassunto la stessa giacitura nello spazio. Il ciclo orbitale si può descrivere nel modo più semplice così. Si determini il baricentro della solita orbita di Keplero tenendo conto del tempo di permanenza dell'elettrone nelle singole parti dell'orbita (baricentro "elettrico"); si trova così il punto di bisezione della parte lontana dal nucleo della linea dei fuochi. Questo "baricentro elettrico" esegue ora in un piano perpendicolare alla direzione del campo semplicemente delle oscillazioni armoniche, *in generale oscillazioni ellittiche.* Oltre a ciò, come prima detto, la forma dell'ellisse di Keplero deve variare, e precisamente non cambia il suo semiasse maggiore (e quindi neppure l'energia, nè il periodo orbitale) ma solo la sua eccentricità, che è quindi fissata univocamente dalla posizione assunta via via dal baricentro elettrico. La giacitura via via assunta dal piano dell'orbita è determinata dal fatto che, sebbene il momento angolare complessivo cambi con l'eccentricità, la componente nella direzione del campo resta invariata.

[5]Bohr, l.c., par. 4, pag. 69.

La *condizione quantica aggiuntiva* consiste nel fatto che alla distanza del nucleo dal piano menzionato, perpendicolare alla direzione del campo, nel quale il baricentro elettrico esegue le sue oscillazioni armoniche secolari, sono consentiti solo certi valori discreti. Ancora più comoda per il nostro scopo è un'altra formulazione di questa condizione quantica aggiuntiva, che deriva ancora immediatamente dalla teoria di Bohr dei sistemi periodici perturbati. L'energia aggiuntiva, che è semplicemente uguale all'energia potenziale dell'elettrone nel campo esterno mediata su un periodo di Keplero (il valor medio è *secolarmente costante*) - quest'energia, dico, secondo Bohr sta col periodo secolare ϑ esattamente nello stesso rapporto come l'energia totale di un oscillatore armonico semplice col suo periodo, cioè dev'essere

$$\Delta E = n'h \cdot \frac{1}{\vartheta} \tag{13}$$

(Δe = energia aggiuntiva, n' = numero intero). Sia ora V' il potenziale del campo esterno, che in questa trattazione (cioè perché le affermazioni precedenti siano giuste) *dev'essere normalizzato in modo tale da annullarsi nel nucleo*; si riconosce allora facilmente che

$$\Delta E = -e\bar{V}' = -\frac{e}{\tau}\int_t^{t+\tau} V' dt. \tag{14}$$

Dalle (13) e (14) segue

$$\frac{e\vartheta}{\tau}\int_t^{t+\tau} V' dt = \int_t^{t+\vartheta} V' dt = -n'h. \tag{15}$$

Un'occhiata alla (5) mostra che allora l' *"interezza" del termine elettrico aggiuntivo nell'esponente d'allungamento è provata per un "periodo di Stark" secolare* - in completa analogia con il risultato per il periodo di Larmor nell'effetto Zeeman.

Nel caso dell'effetto Zeeman, a causa del carattere particolarmente semplice della perturbazione secolare, dall'interezza del termine aggiuntivo abbiamo potuto concludere immediatamente riguardo all'interezza dell'esponente d'allungamento complessivo. Qui ciò sarebbe prematuro, infatti il valor medio del potenziale nucleare V su un'ellisse di Keplero produce perturbazioni del prim'ordine, che possono assommare ad un contributo finito su un periodo secolare ϑ[6]. Per andare del tutto sul sicuro, riconsideriamo la condizione quantica principale del problema perturbato in forma esplicita. Siano q_1, q_2, q_3 le coordinate *rettangolari* dell'elettrone, p_1, p_2, p_3 gli impulsi; allora dev'essere

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3) dt = -nh, \tag{16}$$

[6] Invero Bohr ha mostrato - e ciò discende immediatamente dalla costanza secolare di $\bar{V}'$ - che il valor medio della funzione energia totale del problema imperturbato su un'orbita di Keplero subisce solo perturbazioni del second'ordine. Ma per noi qui si tratta della sola energia potenziale, e per questa non si può concludere nulla, poiché il campo perturbativo rimuove la relazione semplice (6a) tra i due valori medi dell'energia.

dove ora ϑ - più precisamente - indica un semiperiodo esatto del sistema, dopo il quale le coordinate e gli impulsi si riproducono con maggiore approssimazione. Di conseguenza dev'essere

$$\int_t^{t+\vartheta} \frac{d}{dt}\left(\sum p_i q_i\right) dt = 0.$$

Quindi al posto della (16) si può anche scrivere

$$\int_t^{t+\vartheta} (q_1\dot{p}_1 + q_2\dot{p}_2 + q_3\dot{p}_3)dt = -nh, \tag{16'}$$

ovvero, se

$$U = -e(V + V')$$

è l'energia potenziale, per le equazioni di moto dalla (16') discende:

$$\int_t^{t+\vartheta} \left(q_1\frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial U}{\partial q_2} + q_3\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) dt = nh. \tag{16''}$$

Ma i due addendi di U sono funzioni omogenee di q_i, e precisamente V è omogenea di grado -1, V' omogena di primo grado. Quindi segue dalla (16")

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V - V')dt = nh. \tag{16'''}$$

Tenendo conto della (15) risulta quindi

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V + V')dt = (n - 2n')h, \tag{17}$$

e la dimostrazione è conclusa. - Un'osservazione aggiuntiva necessaria riguardo alla nostra legge nel caso dell'effetto Stark è la normalizzazione già prima rilevata del potenziale del campo esterno, fatta in modo tale che esso si annulli nel nucleo.

D. *Effetti Zeeman e Stark combinati con assi paralleli*[7]. Secondo la teoria di Bohr di sistemi periodici perturbati, per sovrapposizione di un campo elettrico omogeneo e di un campo magnetico omogeneo, nel caso che le perturbazioni che ogni campo di per sè produrrebbe siano dello stesso ordine di grandezza, si ottengono orbite quantiche ben definite solo quando[8] gli assi dei campi siano paralleli. Ci limitiamo quindi a questo caso. Dal punto di vista meccanico il ciclo dell'effetto Stark trattato nella sezione precedente avviene semplicemente rispetto ad una terna d'assi che segue la rotazione di Larmor (8), e va osservato che la frequenza di Larmor dipende solo dalle costanti dell'elettrone e dall'intensità del campo magnetico, ma non dalla forma e dalla giacitura dell'orbita, sicché anche ora la rotazione di Larmor avviene in maniera uniforme. Anche le condizioni quantiche per così dire si sovrappongono. Al semiasse maggiore dell'ellisse di Keplero sono consentiti gli stessi valori che nell'atomo imperturbato, alla distanza dal nucleo del piano nel quale oscilla il

[7]Bohr, l.c. p.91.
[8]Bohr, l.c., p. 93.

baricentro elettrico gli stessi valori che nell'effetto Stark puro; e il campo magnetico richiede che la componente del momento angolare nella direzione del campo (che anche nell'effetto Stark puro era costante, ma non quantizzata) ancora debba essere un multiplo intero di $h/2\pi$. Naturalmente adesso la perturbazione complessiva non è più periodica pura, ma compaiono due periodi secolari di uguale ordine di grandezza, in generale incommensurabili: in un sistema di coordinate che segue la precessione di Larmor la forma e la giacitura dell'ellisse di Keplero si riproducono dopo un periodo ϑ_s dell'effetto Stark, mentre l'ellisse, che il baricentro elettrico percorre armonicamente, ruota una volta di 360^0 attorno alla direzione del campo in un periodo di Larmor, diciamo ϑ_l. Poiché sia dal punto di vista meccanico che da quello della teoria dei quanti si hanno rispetto al sistema rotante esattamente le stesse relazioni che nell'effetto Stark puro si hanno rispetto ad un sistema fermo, e poiché inoltre il campo elettrico è portato in se stesso dalla rotazione di Larmor, si riconosce facilmente che le prime due condizioni quantiche hanno per conseguenza che

$$\int_t^{t+\vartheta_s} e(V+V')dt = nh. \tag{18}$$

Per quanto riguarda la condizione quantica magnetica, si deve osservare che sia il periodo di Keplero che il momento nella direzione del campo, quindi anche la proiezione dell'ellisse di Keplero sul piano equatoriale ovvero *il flusso dell'intensità del campo magnetico attraverso l'ellisse di Keplero* sono costanti secolari. Perciò dalla condizione quantica magnetica discende esattamente allo stesso modo come in B che

$$\frac{e}{c}\int_{(\vartheta_l)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz = n'h; \tag{19}$$

l'integrale va esteso su un ciclo di Larmor. Non importa nulla che l'ellisse di Keplero dopo un tale ciclo non ritorni affatto alla sua forma e giacitura di partenza.

Le formule (18) e (19) rappresentano solo una parte dell'esponente d'allungamento, e precisamente la (18) la parte elettrica, la (19) quella magnetica. Esse si riferiscono inoltre a intervalli temporali del tutto distinti ϑ_s e ϑ_l, *nessuno dei quali costituisce un quasiperiodo del moto.* Un quasiperiodo siffatto si realizzerà in generale con una certa approssimazione per multipli assai elevati degli pseudoperiodi ϑ_s e ϑ_l, che siano approssimativamente tra loro uguali, ovvero

$$\mathfrak{n}_s\vartheta_s = \mathfrak{n}_l\vartheta_l = \vartheta.$$

Scegliamo $\mathfrak{n}_s$ *esattamente* intero, e invece $\mathfrak{n}_l$ in modo tale che la relazione precedente sia *esattamente* soddisfatta; moltiplichiamo la (18) per $\mathfrak{n}_s$, la (19) per $\mathfrak{n}_l$ e sottraiamo. Si ottiene

$$e\int_{(\vartheta)}\left\{(V+V')dt - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz\right)\right\} = (\mathfrak{n}_s n - \mathfrak{n}_l n')h. \tag{20}$$

A meno d'un fattore $-\gamma^{-1}$ a primo membro si ha l'intero esponente d'allungamento per il quasiperiodo ϑ; a secondo membro si ha un multiplo intero di h, intero con la stessa approssimazione con la quale ϑ si può definire quasiperiodo. n' è il consueto numero quantico magnetico, quindi, almeno per le orbite quantiche basse, un numero intero piccolo; il piccolo scostamento di $\mathfrak{n}_l$ dall'interezza non sarà sostanzialmente accresciuto dalla moltiplicazione per n'. (Non così per n; n è un numero assai grande dell'ordine di grandezza del numero delle rivoluzioni di Keplero durante un periodo di Stark; ma ciò non cambia nulla, perché $\mathfrak{n}_s$ è *esattamente* intero e deve esser scelto così perché anche la fase si riproduca sull'orbita di Keplero.) - Pare alquanto insoddisfacente a prima vista che per la derivazione della (20) si debba utilizzare solo una certa combinazione lineare delle due condizioni quantiche (18) e (19) "pure" (cioè necessarie per la determinazione dell'energia). Mi pare tuttavia che le (18) e (19) siano necessarie individualmente per assicurare che la (20) sia soddisfatta per ogni quasiperiodo. Infatti se per esempio $\mathfrak{n}_s = 7$, $\mathfrak{n}_l = 12$ danno luogo ad un quasiperiodo, non $\mathfrak{n}_s = 70$, $\mathfrak{n}_l = 120$ ma, diciamo, $\mathfrak{n}_s = 69$, $\mathfrak{n}_l = 118$ ne produrranno un altro, all'incirca dieci volte più lungo. D'altra parte in tali considerazioni non si possono accettare multipli arbitrariamente grandi dei periodi secolari, perché non intervengano termini quadratici nelle intensità di campo, nel qual caso trova un limite non solo la validità dei calcoli approssimati qui fatti, ma anche la reale possibilità di definire fisicamente le orbite quantiche.

E. *La variabilità relativistica della massa.* Si è finora trascurato il fatto che interviene nei casi B, C, D, cioè che la perturbazione dovuta al campo esterno sia supposta grande rispetto alla "perturbazione" dell'orbita esattamente periodica di Keplero dovuta alla variabilità relativistica della massa. Se ora la teniamo in conto, già l'atomo in assenza di forze ha due quasiperiodi, il periodo breve di Keplero τ e il periodo ϑ della precessione del perielio. Per τ l'"interezza dell'esponente d'allungamento" sarà naturalmente garantita dalla stessa condizione quantica come nel caso non relativistico. Ci si chiede se ciò avvenga anche per ϑ. Si determini ϑ - più precisamente come quasiperiodo, cioè in modo tale che le coordinate e gli impulsi si riproducano con grande approssimazione; allora s'ottiene immediatamente in coordinate polari

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}) dt = n'h \tag{21}$$

[r, φ sono coordinate polari, p_r, p_φ gli impulsi relativistici corrispondenti; la formula (21) è una combinazione lineare intera delle consuete condizioni quantiche "radiali" e "azimutali", e precisamente il numero dei giri di φ è esattamente maggiore di 1 del numero delle oscillazioni in r]. L'integrando è invariante per trasformazioni puntuali, quindi anche in coordinate rettangolari vale

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_x \dot{x} + p_y \dot{y}) dt = n'h. \tag{21'}$$

Poichè $(xp_x + yp_y)$ ritorna ai suoi valori iniziali, al posto di questa possiamo scrivere

$$\int_t^{t+\vartheta} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y) dt = -n'h, \tag{21''}$$

$\dot{p}_x, \dot{p}_y$ anche nella meccanica relativa sono uguali a meno le derivate parziali dell'energia potenziale; questa è $-eV$ ed omogenea di grado -1 in x, y. Quindi segue dalla (21”)

$$\int_t^{t+\vartheta} eV dt = n'h. \tag{21”'}$$

Con ciò la validità della nostra legge per l’orbita relativistica imperturbata è dimostrata.

L’effetto Zeeman, è noto, risulta molto facile con l’approccio relativistico[9], si aggiunge semplicemente la rosetta relativistica alla precessione di Larmor. Compaiono quindi due periodi secolari, come nel caso trattato in D di due campi paralleli. La trattazione è così completamente analoga a quella data là, che la si risparmia del tutto - può essere intuita senza calcoli e naturalmente conduce di nuovo alla conferma della nostra legge.

L’effetto Stark con relatività, che Kramers[10] ha studiato qualche tempo fa in un lavoro assai bello, non l’ho ancora dimostrato secondo il punto di vista seguito qui - tuttavia non si può certo dubitare che risultino relazioni del tutto analoghe a quelle del caso D e dell’effetto Zeeman.

Per quanto ne so, il caso D con la relatività non è stato studiato, sebbene esso (a causa della sua simmetria di rotazione) debba portare a orbite ben definite. Ma esso offre un interesse assai limitato.

Discussione del risultato.

Riassumendo, abbiamo la seguente situazione. Se l’elettrone portasse con sé lungo l’orbita un “segmento”, che venisse trasportato senza modifiche a causa del moto, allora, se si partisse da un punto qualsiasi dell’orbita, la lunghezza di questo segmento apparirebbe moltiplicata sempre per una potenza ad esponente con grande approssimazione intero di

$$e^{\frac{h}{\gamma}}, \tag{22}$$

al ritorno dell’elettrone con grande precisione al punto di partenza e simultaneamente nello stato di moto iniziale.

Risulta difficile credere che questo risultato sia esclusivamente una conseguenza matematica casuale delle condizioni quantiche e non abbia un significato fisico più profondo. La forma alquanto imprecisa della legge approssimata con la quale esso ci si presenta non cambia nulla; sappiamo infatti che le orbite quantiche già fisicamente non sono definite con precisione totale[11] per due motivi: in primo luogo per la forza di reazione della radiazione, che sicuramente non esiste nella forma prescritta dall’elettrodinamica classica, ma alla quale dal punto di vista della teoria dei quanti corrisponde altrettanto sicuramente qualcosa di ugual ordine di grandezza, altrimenti il tempo di decadimento non si potrebbe calcolare correttamente dal principio di corrispondenza[12]. Ma in secondo luogo un’indeterminazione delle orbite quantiche deriva anche dal fatto che nella maggior parte dei casi il moto è condizionatamente periodico solo con una certa approssimazione [per esempio nell’effetto

[9] Trattato per la prima volta da A. Sommerfeld, Phys. ZS. **17**, 491, 1916 e P. Debye, ibidem, p. 507.

[10] ZS. f. Phys. **3**, 199, 1920.

[11] Bohr, l.c., pp. 50, 61, 66, 97.

[12] A. Sommerfeld e W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **10**, 393, 1922.

Zeeman i termini quadratici nell'intensità di campo devono per principio essere trascurati; ed anche l'effetto Stark, se si tien conto della correzione relativistica, non appartiene più ai problemi rigorosamente separabili[13]].

Che l'elettrone porti davvero con sé nel suo moto un qualche "segmento" è più che discutibile. È assai più probabile che esso lo "instauri" continuamente nel senso di Weyl[14] durante il suo moto. Si può vedere che il significato della nostra legge va cercato nel fatto che all'elettrone non è consentito qualsiasi ritmo di instaurazione, ma che questo deve risultare invece da una certa dipendenza dal ciclo orbitale quasiperiodico.

Ci si sente tentati di indovinare quale valore debba avere la costante universale γ. Ci sono ben familiari due costanti universali con la dimensione di un'azione, cioè h ed e^2/c (io per parte mia sono convinto che esse *non siano indipendenti). Se fosse* $\gamma \approx e^2/c$, il fattore universale (22) sarebbe un numero assai grande[15] dell'ordine di grandezza di e^{1000}. L'altra possibilità, $\gamma \approx h$, suggerisce l'idea se per γ non sia pensabile il valore immaginario puro

$$\gamma = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}},$$

di modo che il fattore universale (22) sarebbe uguale all'unità e la lunghezza di un segmento trasportato verrebbe riprodotta dopo ogni quasiperiodo. - Non mi sento di decidere se una cosa simile potrebbe aver senso nella geometria d'universo di Weyl.

Del resto è naturale pensare che e, h, c non sono le sole costanti universali che conosciamo. Se si tira in ballo la (consueta) costante di gravitazione k ed una qualche massa universale, per esempio la massa dell'elettrone, allora[16]

$$\frac{e^2}{km^2} = \text{ numero puro } \approx 10^{+40}.$$

Quindi

$$\frac{he^2}{km^2}$$

è un "quanto d'azione universale" dell'ordine di grandezza 10^{+13} ergsec. - Ma in proposito ricorderemo soltanto che dalle sole considerazioni dimensionali in questa materia non si può cavar proprio nulla.

Arosa, 3 ottobre 1922.

[13]H.A. Kramers, ZS. f. Phys. **3**, 201, 1920.

[14]Weyl, RZM, p . 280.

[15]$2\pi e^2/(hc)$ è la cosidetta costante di struttura fine, uguale a $7,29 \times 10^{-3}$.

[16]Vedasi anche Weyl, RZM, p. 238.