

Sul rapporto della meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan con la mia mia¹

Erwin Schrödinger

·
·
·
·

§5. Confronto delle due teorie. Prospettiva di una comprensione classica dell'intensità e della polarizzazione della radiazione emessa.

Nel caso che le due teorie - potrei convenientemente usare anche il singolare - nella loro forma presentemente espressa si dovessero rivelare come durevoli, cioè come la corretta generalizzazione anche per casi complicati², ogni discussione sulla superiorità dell'una o dell'altra in un certo senso ha un oggetto fasullo, poiché esse sono interamente equivalenti e si può trattare solo del problema fondamentalmente secondario della comodità di calcolo.

Vi sono oggi non pochi fisici che, esattamente nel senso di Kirchoff e Mach, vedono il compito della teoria fisica esclusivamente in una descrizione matematica il *più possibile parsimoniosa* della relazione empirica tra quantità osservate, cioè in una descrizione che riproduce la relazione il più possibile senza l'intromissione di elementi inosservabili per principio. Con una tale impostazione l'equivalenza matematica ha quasi lo stesso significato dell'equivalenza fisica. Al massimo si potrebbe nel caso presente vedere una certa superiorità nella rappresentazione con le matrici, perché essa a causa della sua completa mancanza di intuibilità non fuorvia a formare un'immagine spazio-temporale dei processi atomici, che forse deve restare incontrollabile per principio. In relazione a questo è tuttavia in ogni caso d'interesse il seguente *completamento* della dimostrazione di equivalenza prima data: l'equivalenza esiste *davvero*, esiste *anche nel senso opposto*. Non solo si possono, come mostrato sopra, costruire dalle autofunzioni le matrici, ma anche a rovescio dalle matrici date numericamente le autofunzioni. Queste ultime non costituiscono quindi più o meno un "rivestimento carnale" *arbitrario e particolare*, che appaga il bisogno di intuibilità, del nudo scheletro delle matrici; cosa che di fatto stabilirebbe una superiorità epistemologica di queste ultime. Si immagini che nelle equazioni

$$(33) \quad q_i^{jk} = \int q_i u_j(x) u_k(x) dx$$

¹Über das Verhältnis des Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen, *Analen der Physik* **79**, 734-756 (1926).

²Esiste una ragione particolare per porre questo in dubbio. Entrambe le teorie assumono provvisoriamente la funzione dell'energia dalla meccanica solita. Nei casi finora trattati l'energia potenziale consiste nell'interazione di punti materiali, dei quali forse almeno uno a causa della sua grande massa può essere assunto come puntiforme anche dal punto di vista della meccanica ondulatoria (vedi A. Einstein, *Berl. Ber.* 1925, p. 10). Si deve tenere in conto la possibilità che l'assunzione della legge per l'energia potenziale dalla meccanica solita non sia più consentita quando entrambe le "cariche puntiformi" siano in realtà stati di oscillazione estesi che si compenetrano.

i *primi* membri siano dati numericamente, e che si cerchino le funzioni $u_i(x)$. (N.B.: la “funzione densità” è intenzionalmente tralasciata, le $u_i(x)$ devono essere per il momento *di per sè* funzioni ortogonali). Allora mediante moltiplicazione di matrici, nella quale del resto non c’è bisogno di nessun “giro”, cioè di integrazione per partes, si può calcolare l’integrale

$$(34) \quad \int P(x)u_i(x)u_k(x)dx,$$

dove $P(x)$ indica *un qualche* prodotto di potenze di q_l . L’insieme di questi integrali, per i e k fissati, costituisce quello che si chiama l’insieme dei “*momenti*” della funzione $u_i(x)u_k(x)$. E si dimostra che sotto ipotesi assai generali una funzione è fissata univocamente dall’insieme dei suoi momenti. Poichè tutti i prodotti $u_i(x)u_k(x)$ sono fissati univocamente, lo sono perciò anche i quadrati $u_i(x)^2$, quindi anche le $u_i(x)$ stesse. La sola arbitrarietà consiste nella separazione supplementare della funzione densità $\rho(x)$, cioè $r^2 \sin \vartheta$ in coordinate spaziali polari. In questa non abbiamo in ogni caso da temere nessun *faut pas epistemologico*.

Del resto tuttavia alla tesi che l’equivalenza matematica abbia lo stesso significato dell’equivalenza fisica si può riconoscere in generale solo validità limitata. Si pensi per esempio alle due espressioni per l’energia elettrostatica di un sistema di conduttori carichi, come integrale spaziale $(1/2) \int \mathfrak{E}^2 d\tau$ e come somma sui conduttori $(1/2) \sum e_i V_i$. Per l’elettrostatica le due espressioni sono del tutto equivalenti, l’una si può ottenere dall’altra mediante integrazione per partes. Tuttavia preferiamo come significativa la prima e diciamo che *questa* localizza l’energia nello spazio in modo corretto. Certamente non si può fondare questa preferenza sul terreno dell’elettrostatica, ma solo sul fatto che la prima espressione rimane utilizzabile in elettrodinamica, la seconda no.

A quale delle due nuove teorie dei quanti spetti la superiorità sotto *questo* punto di vista, non lo si può oggi decidere con certezza. Come naturale sostenitore di una di esse non mi si dovrebbe tuttavia rimproverare se io apertamente - e forse senza poter evitare una certa parzialità - espongo gli argomenti che parlano a suo favore.

I problemi che, oltre alle pure questioni ottiche, hanno importanza per l’ulteriore costruzione della dinamica atomica, ci sono presentati dalla fisica sperimentale in forma assai intuitiva, come per esempio: come rimbalzano due atomi o due molecole che si urtano, come vengono deviati un elettrone o una particella α , quando vengono scagliati attraverso l’atomo con una data velocità e con un dato parametro di collisione? (“perpendicolare dal nucleo alla traiettoria iniziale”) Per trattare dettagliatamente questi problemi è assolutamente necessario avere una chiara visione d’assieme della transizione continua tra la meccanica macroscopica intuitiva e la micromeccanica dell’atomo. Ho esposto di recente³ come penso questa transizione. La micromeccanica si presenta come un raffinamento della macromeccanica, che è reso necessario dalla piccolezza geometrico-meccanica dell’oggetto e che è esattamente dello stesso tipo della transizione dall’ottica geometrica all’ottica fisica; quest’ultima si presenta quando la lunghezza d’onda non è più molto grande rispetto alle dimensioni degli oggetti studiati o rispetto a quelle separazioni spaziali, entro le quali si desidera ottenere un’informazione precisa sulla distribuzione della luce. - Mi pare estremamente difficile affrontare problemi del tipo su indicato se ci si sente obbligati per ragioni epistemologiche a sopprimere nella dinamica atomica l’intuizione e ad

³Ann. d. Phys. **79**, 489 (1926).

operare solo con concetti astratti come probabilità di transizione, livelli d'energia e simili.

Una questione particolarmente importante, forse la questione cardinale dell'intera dinamica atomica, è notoriamente la questione dell'*accoppiamento* tra i processi della dinamica atomica ed il campo elettromagnetico, o quello che s'ha da considerare al posto di quest'ultimo. Non solo si ha qui a che fare con l'intero complesso di problemi della dispersione, della radiazione di risonanza e secondaria, e della larghezza di riga naturale, ma la designazione di certe quantità atomiche come frequenze di emissione, intensità di riga etc. acquista un significato piuttosto dogmatico, soprattutto quando l'accoppiamento è descritto matematicamente in una qualche forma. La rappresentazione matriciale della dinamica atomica ha portato alla supposizione che di fatto anche il campo elettromagnetico si *debba* rappresentare diversamente, cioè in forma matriciale, perché si possa formulare matematicamente l'accoppiamento. La meccanica ondulatoria mostra che per questo non vi è alcuna necessità, poiché lo scalare di campo meccanico (da me indicato con ψ) è pienamente idoneo ad entrare nelle equazioni invariate di Maxwell-Lorentz tra i vettori del campo elettromagnetico come "sorgente" degli stessi; così come inversamente i potenziali elettrodinamici possono entrare nei coefficienti dell'equazione d'onda, che determina lo scalare di campo meccanico⁴. Vale la pena in ogni caso, per *trovare* la rappresentazione dell'accoppiamento, di introdurre come *tetracorrente* nelle equazioni di Maxwell-Lorentz invariate un tetravettore derivato in modo opportuno dallo scalare di campo meccanico ψ del moto degli elettroni (forse con l'intervento dei vettori di campo stessi o del potenziale). Esiste perfino una certa speranza di poter presentare l'equazione d'onda per ψ come conseguenza delle equazioni di Maxwell-Lorentz, cioè come equazione di continuità dell'elettricità. - La difficoltà, che si presenta subito per il problema a *più* elettroni, che ψ è una funzione nello *spazio delle configurazioni*, non nello spazio reale, non deve restare inosservata. Tuttavia posso nel caso di un elettrone spiegare un po' più in dettaglio come sarebbe possibile dare in questo modo un'interpretazione straordinariamente intuitiva dell'intensità e della polarizzazione della radiazione.

Consideriamo la descrizione secondo la meccanica ondulatoria dell'atomo di idrogeno in uno stato in cui lo scalare di campo meccanico ψ è dato da una serie di autofunzioni discrete:

$$(35) \quad \psi = \sum_k c_k u_k(x) \exp \frac{2\pi i E_k t}{h}$$

(x sta qui per le tre variabili r, ϑ, φ ; pensiamo i c_k reali, e a destra si deve prendere la parte reale). Facciamo ora l'*ipotesi* che la densità spaziale dell'elettricità sia data dalla parte reale di

$$(36) \quad \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}.$$

⁴Analoghe idee esprime K. Lanczos in una nota interessante apparsa da poco (Zeitschr. f. Phys. **35**, 812 (1926)), che parimenti contiene il prezioso riconoscimento che la dinamica atomica di Heisenberg è passibile anche di un'interpretazione continua. Per il resto tuttavia il lavoro di Lanczos ha pochi punti di contatto diretti con il presente, come si può capire a prima vista. La determinazione del sistema di formule di Lanczos, provvisoriamente lasciate del tutto indefinite, non va cercata nella direzione di identificare il nucleo simmetrico $K(s, \sigma)$ di Lanczos con la funzione di Green della nostra equazione d'onda (21) o (31), poiché questa funzione di Green, quando esiste, ha per autovalori i livelli quantici stessi. Dal nucleo di Lanczos si deve invece richiedere che esso debba avere per autovalori i reciproci dei livelli quantici.

La soprasedgnatura indicherà qui il complesso coniugato. Si calcola allora per la densità spaziale

$$(37) \quad \text{densità spaziale} = 2\pi \sum_{(k,m)} c_k c_m \frac{E_k - E_m}{h} u_k(x) u_m(x) \sin \frac{2\pi t}{h} (E_m - E_k),$$

dove la somma include ogni combinazione (k, m) solo una volta. Nella (37) compaiono come frequenze soltanto le *differenze* dei termini. Queste sono così piccole che le corrispondenti lunghezze d'onda dell'etere sono grandi rispetto alle dimensioni atomiche, ossia rispetto a quella regione all'interno della quale la (37) è in generale sensibilmente diversa da zero⁵. La radiazione può pertanto essere semplicemente attribuita al *momento di dipolo*, che l'atomo come un tutto possiede secondo la (37). Moltiplichiamo la (37) per una coordinata cartesiana q_l e per la "funzione densità" $\rho(x)$ (nel caso presente $r^2 \sin \vartheta$) e integriamo sull'intero spazio. Secondo la (13) otteniamo per la componente del momento di dipolo nella direzione q_l

$$(38) \quad M_{q_l} = 2\pi \sum_{(k,m)} c_k c_m q_l^{km} \frac{E_k - E_m}{h} \sin \frac{2\pi t}{h} (E_m - E_k).$$

Si ottiene quindi in effetti uno "sviluppo di Fourier" del momento elettrico dell'atomo, nel quale compaiono come frequenze soltanto le *differenze* dei termini. Nei coefficienti gli elementi di matrice di Heisenberg q_l^{km} compaiono in modo tale che la loro influenza determinante sull'intensità e sulla polarizzazione della corrispondente parte della radiazione emessa è perfettamente comprensibile in base all'elettrodinamica classica.

Lo schema su esposto del meccanismo di radiazione è per il momento non completamente soddisfacente e di certo non definitivo. L'ipotesi (36) fa uso in modo alquanto libero dell'apparato di calcolo complesso per eliminare componenti dell'oscillazione indesiderate, la cui radiazione non si può trovare dalla via semplice del momento di dipolo dell'atomo complessivo, poiché le corrispondenti lunghezze d'onda dell'etere (circa 0,01 Å) stanno molto al di sotto delle dimensioni atomiche. Inoltre la densità spaziale (37), quando si integri sull'intero spazio, dà per la (5) zero, e non, come si deve richiedere, un valore finito indipendente dal tempo, che dovrebbe essere normalizzato alla carica dell'elettrone. Infine per completezza bisognerebbe calcolare la radiazione magnetica, poiché è possibile irraggiamento da parte di una distribuzione spaziale della corrente elettrica, anche se un momento elettrico non compare affatto, per esempio in un'antenna a quadro.

Tuttavia appare assai giustificata la speranza che per mezzo del meccanismo analitico assai intuitivo qui schematizzato si possa raggiungere una reale comprensione della natura della radiazione emessa.

(ricevuto il 18 marzo 1926.)

⁵Ann. d. Phys. **79**, 371 (1926).