

**L'elettrodinamica del vuoto sulla base
della teoria quantistica dell'elettrone¹**

V. Weisskopf

Una delle conseguenze più importanti nel nuovo sviluppo della teoria dell'elettrone è la possibilità di trasformare energia di campo in materia. Per esempio un quanto di luce in presenza di altri campi elettromagnetici nello spazio vuoto può essere assorbito e mutato in materia, con la comparsa di una coppia di elettroni di carica opposta.

La conservazione dell'energia richiede, nel caso che il campo nel quale avviene l'assorbimento sia statico, che il quanto di luce assorbito fornisca l'intera energia necessaria per la generazione della coppia di elettroni. La sua frequenza deve quindi soddisfare la condizione $h\nu = 2mc^2 + \epsilon_1 + \epsilon_2$, dove mc^2 è l'energia di riposo di un elettrone, ed ϵ_1 e ϵ_2 le restanti energie dei due elettroni. Questo caso si verifica per esempio con la generazione di una coppia di elettroni mediante un quanto γ nel campo coulombiano di un nucleo atomico.

L'assorbimento può anche accadere in campi che derivano da altri quanti di luce, sicchè in questo caso l'energia $2mc^2 + \epsilon_1 + \epsilon_2$ dei due elettroni dev'essere uguale alla somma di tutti i quanti di luce assorbiti nel processo. Il fenomeno dell'assorbimento della luce nel vuoto richiede un sostanziale scostamento dall'elettrodinamica di Maxwell. Il vuoto dev'essere infatti liberamente penetrabile per un'onda di luce indipendentemente dai campi che vi regnano, di modo che campi diversi, secondo le equazioni di Maxwell, a causa della linearità delle stesse, possono sovrapporsi liberamente.

E' già comprensibile senza ulteriore approfondimento della teoria che anche nei campi che non possiedono la necessaria energia per dar luogo ad una coppia di elettroni si devono avere deviazioni dall'elettrodinamica di Maxwell: se luce di alta

¹Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-fysiske Meddelelser XIV, No. 6 (1936).

frequenza in un campo elettromagnetico può essere assorbita, ci si deve aspettare per raggi di luce, la cui frequenza non raggiunge la generazione di coppie, una diffusione o rifrazione, analoga alla diffusione della luce da un atomo, la cui frequenza d'assorbimento più piccola è più grande di quella della luce. Nel passaggio attraverso un campo elettromagnetico la luce deve comportarsi come se il vuoto per l'azione del campo avesse una costante dielettrica diversa dall'unità.

Per rappresentare tali fenomeni bisogna porre la teoria dello spazio vuoto in una forma tale che ponga in evidenza le summenzionate deviazioni dall'elettrodinamica di Maxwell. Di fatto l'equazione d'onda relativistica dell'elettrone porta anche a conseguenze di questo tipo, quando si associno alla descrizione del vuoto gli stati con energia cinetica negativa che derivano dall'equazione d'onda di Dirac. L'assunzione fondamentale della teoria di Dirac del positrone consiste nel fatto che il comportamento fisico del vuoto può essere in un certo senso descritto mediante il comportamento di una moltitudine infinita di elettroni, gli elettroni di vuoto, che si trovano in stati di energia cinetica negativa e occupano completamente questi stati. L'accordo non può essere perfetto, poichè gli elettroni di vuoto comportano densità di carica e di corrente infinite, che sicuramente non possono avere alcun significato fisico. Ma risulta tuttavia che per esempio la generazione di coppie (e il suo processo inverso) sono ben resi dal salto di un elettrone in uno stato di energia positiva per l'azione di un campo elettromagnetico, per il quale esso appare come un elettrone reale, mentre il vuoto è stato privato di un elettrone negativo, fatto che si deve rappresentare con la comparsa di un elettrone positivo. Il calcolo della creazione e dell'annichilazione di coppie che deriva da questo modello mostra un buon accordo con l'esperienza.

Il calcolo della maggior parte degli altri effetti, che derivano dalla teoria del positrone, urta sempre nel problema, in qual misura il comportamento degli elettroni del vuoto può di fatto essere considerato come quello del vuoto. Questo problema è aggravato dal fatto che le densità di carica, di corrente e di energia sono infinite, di modo che si tratta per lo più di

estrarre in modo univoco da una somma infinita un termine finito, e di attribuire a questo realtà. La soluzione di questi problemi è stata sviluppata da Dirac e da Heisenberg, e fornisce un metodo privo di contraddizioni, per valutare la parte fisicamente significativa degli effetti degli elettroni di vuoto. Si mostra nel seguito che questa valutazione è del tutto esente da ogni arbitrarietà, poichè essa assume in modo conseguente come fisicamente prive di significato solo le seguenti proprietà degli elettroni di vuoto:

- 1) l'energia degli elettroni di vuoto nello spazio privo di campi.
- 2) Le densità di carica e di corrente degli elettroni di vuoto nello spazio privo di campi.
- 3) Una polarizzabilità elettrica e magnetica del vuoto indipendente dal campo, costante nello spazio e nel tempo.

Queste quantità² si riferiscono solo al vuoto privo di campi, e può essere considerato di per sè evidente, che esse non hanno alcun significato fisico. Tutte e tre le quantità si comportano sommando sui contributi di tutti gli elettroni di vuoto come somme divergenti. Si deve aggiungere che una polarizzabilità costante non sarebbe accertabile in alcun modo, ma che le cariche e le intensità di campo sarebbero tutte moltiplicate per un fattore costante.

Sulla base di queste ipotesi calcoleremo nella prossima sezione le proprietà fisiche del vuoto in presenza di campi, che variino lentamente nello spazio e nel tempo. Consideriamo nel seguito dei campi F , che su tratti della lunghezza \hbar/mc e su tempi di durata \hbar/mc^2 varino solo di poco³ e pertanto soddisfino alle condizioni

² Le ipotesi di considerare 1) o 2) o 3) come prive di significato saranno nel seguito indicate con I_1 , I_2 o I_3 .

³ \hbar è la costante di Planck divisa per 2π .

$$(1) \quad (\hbar/mc) |\text{grad } F| \ll |F|, \quad (\hbar/mc^2) |\partial F/\partial t| \ll |F| .$$

In presenza di campi siffatti non appariranno in generale delle coppie, poichè i quanti di luce corrispondenti hanno poca energia. Escluderemo dalla trattazione il caso estremo, nel quale la densità di radiazione è così elevata, da consentire l'azione congiunta di moltissimi quanti, o nel quale il campo elettrostatico dà luogo a differenze di potenziale superiori a $2mc^2$ (in questo caso si avranno delle coppie in base al paradosso di Klein). Sotto queste condizioni le proprietà elettromagnetiche del vuoto si possono rappresentare mediante una polarizzabilità elettrica e magnetica dipendente dal campo dello spazio vuoto, che porta per esempio ad una rifrazione della luce in campi elettrici o ad una diffusione della luce da parte di luce. Il tensore dielettrico e della permeabilità hanno allora per intensità di campo deboli la seguente forma approssimata ($\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ sono le quattro quantità per il campo elettromagnetico⁴)

$$\mathbf{D} = \sum_k \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{H} = \sum_k \boldsymbol{\mu}_{ik} \mathbf{B}_k$$

$$(2) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \delta_{ik} + (e^4 \hbar / 45 \pi m^4 c^7) [2(E^2 - B^2) \delta_{ik} + 7 \mathbf{B}_i \mathbf{B}_k]$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ik} = \delta_{ik} + (e^4 \hbar / 45 \pi m^4 c^7) [2(E^2 - B^2) \delta_{ik} - 7 \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k]$$

$$\delta_{ik} = 1, \quad i=k, \quad \delta_{ik} = 0, \quad i \neq k.$$

Il calcolo di queste espressioni è stato compiuto da Euler e Kockel⁵ e poi da Heisenberg e Euler⁶. Nella prossima sezione si svilupperanno tuttavia dei metodi notevolmente più facili. Inoltre si calcoleranno le proprietà del vuoto sulla base dell'equazione d'onda relativistica scalare di Klein e Gordon. Questa equazione

⁴ Si userà la notazione in grassetto per le quantità vettoriali solo dove è possibile confusione.

⁵ H. Euler e B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246, 1935; H. Euler, *Ann. d. Phys.* V. **26**, 398.

⁶ W. Heisenberg e H. Euler, *ZS. f. Phys.* **38**, 714, 1936.

d'onda produce secondo Pauli e Weisskopf⁷ l'esistenza di particelle positive e negative, e la loro generazione e annichilazione mediante campi elettromagnetici senza alcuna particolare ipotesi aggiuntiva. Tuttavia queste particelle non possiedono spin e seguono la statistica di Bose, pertanto questa teoria non è applicabile agli elettroni reali. E' tuttavia notevole che anche questa teoria porti a proprietà del vuoto che non possono avere alcun significato fisico. Si ottiene ancora per esempio una polarizzabilità del vuoto infinita costante nello spazio e nel tempo. Trascurando il termine corrispondente si ottengono risultati analoghi a quelli della teoria di Dirac del positrone. Le proprietà fisiche del vuoto derivano in questa teoria dall'"energia di punto zero" della materia, che anche in assenza di particelle dipende dai campi esterni e quindi produce un termine in aggiunta alla pura energia di campo di Maxwell.

Nella terza sezione trattiamo le conseguenze della teoria del positrone di Dirac per il caso di un campo esterno generale e mostriamo che in base alle menzionate tre ipotesi sull'effetto degli elettroni di vuoto si arriva sempre a risultati finiti e univoci. Le prescrizioni di sottrazione di Heisenberg si dimostrano identiche a queste tre ipotesi e appaiono quindi significativamente meno arbitrarie di quanto ammesso finora nella letteratura.

Tutti i calcoli seguenti non considerano esplicitamente gli effetti mutui degli elettroni di vuoto ma trattano separatamente ogni singolo elettrone sotto l'azione di un campo dato. Con questo procedimento le azioni mutue non sono tuttavia completamente trascurate, perchè non si può separare il campo esterno da quello che è prodotto dagli stessi elettroni di vuoto, sicchè il campo introdotto nel calcolo include implicitamente in parte le azioni degli altri elettroni di vuoto. Questo procedimento è analogo al calcolo di Hartree degli orbitali elettronici di un atomo nel campo che è modificato dagli elettroni stessi. Per il calcolo esplicito delle azioni mutue si deve sviluppare l'elettrodinamica quantistica, cioè si deve introdurre la quantizzazione del campo

⁷ W. Pauli e V. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta.* **7**, 710, 1934.

d'onda. Essa notoriamente porta a divergenze anche senza l'assunzione di un numero infinito di elettroni di vuoto e non sarà considerata ulteriormente nel seguito.

.
. .
. .
. .