

# La teoria quantistica dello spettro di frenamento Röntgen<sup>1</sup>

Gregor Wentzel a Monaco

Con quattro figure. (Ricevuto il 24 luglio 1924)

*I postulati fondamentali di Bohr della teoria dei quanti (assenza di radiazione degli stati stazionari, emissione ed assorbimento nelle transizioni secondo il principio  $h\nu$ ) sono applicabili anche a sistemi non periodici; rispetto ai sistemi periodici sussiste tuttavia la differenza che gli stati stazionari non costituiscono una molteplicità discreta, ma continua, come si manifesta nella contrapposizione spettro a righe - spettro continuo. Solo nel caso periodico la determinazione delle frequenze e la determinazione delle intensità si possono trattare come problemi distinti; gli spettri continui invece sono espressamente problemi di intensità. L'autore ha precedentemente dato una regola, che riunisce in sé formalmente le prescrizioni quantiche per la determinazione delle frequenze (condizioni quantiche, principio  $h\nu$ ) e delle intensità (principio di corrispondenza di Bohr) per gli spettri a righe. Previa la relativa generalizzazione questo postulato si rivela adatto anche per la trattazione di problemi non periodici; esso dà la distribuzione di intensità dello spettro Röntgen continuo al variare della tensione del catodo e del materiale dell'anticatodo in accordo preciso con le misure di Wagner e Kulenkampff<sup>2</sup>.*

§1. *La storia del problema.* Da più parti si è posto il problema, come si possa estendere il principio di corrispondenza di Bohr dagli spettri a righe agli spettri continui. Dal punto di vista matematico si tratta del passaggio dalla serie di Fourier all'integrale, dal sistema periodico a quello non periodico. Al problema periodico più semplice, il moto ellittico di un elettrone attorno ad un nucleo, come si realizza nell'atomo di idrogeno,

---

<sup>1</sup>Zeitschr. f. Phys. **27**, 257 (1924).

<sup>2</sup>H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **69**, 548, 1922.

corrisponde come sistema non periodico più semplice il moto iperbolico attorno ad un nucleo, com'è eseguito dai raggi catodici negli atomi di un anticatodo, e che si ritiene responsabile dell'emissione dello spettro di frenamento Röntgen. Quest'analogia tra serie di Balmer e spettro di frenamento ha condotto Sommerfeld e Pauli<sup>3</sup> alla trattazione seguente. Lo spettro classico di un'ellisse di Keplero consisterebbe di righe esattamente equidistanti e si estenderebbe all'infinito (Fig. 1, a); invece il limite della serie per la serie di Balmer (Fig. 1, b) è al finito (ad  $1/4$  della frequenza di Rydberg  $R$ ). Il principio di corrispondenza assimila l'una all'altra nella loro intensità la riga classica e quella della teoria dei quanti; si può formulare la sua azione anche nel fatto che le armoniche superiori classiche si spostano in blocco a frequenze minori con intensità immutate. Analogamente anche lo spettro di frenamento calcolato classicamente si estende all'infinito (Fig. 1, c), mentre sappiamo dall'esperienza (legge di Duane - Hunt) che lo spettro di frenamento reale (Fig. 1, d) ha un limite netto a  $\nu_0 = eV/h$ . Anche qui il principio di corrispondenza agisce quindi con uno spostamento in blocco. Ma Sommerfeld e Pauli non hanno potuto fissare univocamente la legge di questo spostamento in blocco in modo analogo a quella per la serie di Balmer.

Invece la teoria dello spettro di frenamento di Kramers<sup>4</sup> lascia perdere l'analogia con la serie di Balmer; Kramers taglia semplicemente lo spettro classico a  $\nu_0 = eV/h$  e dice: per  $\nu < \nu_0$  l'intensità della teoria dei quanti è uguale a quella classica, per  $\nu > \nu_0$  è nulla. Inoltre il modo in cui Kramers tiene conto della perdita di velocità dei raggi catodici nell'anticatodo non corrisponde al processo reale; ritorneremo in seguito (§ 5) su questo punto.

In un lavoro precedente<sup>5</sup> l'autore ha dato una formulazione del principio di corrispondenza della quale è possibile una

---

<sup>3</sup>Lezione del Prof. Sommerfeld a Monaco, semestre invernale 1920/21.

<sup>4</sup>H.A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836, 1923.

<sup>5</sup>G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **22**, 193, 1924.

trasposizione a sistemi non periodici. Riesporremo tuttavia la teoria generale nell'Appendice e ci faremo guidare ora solo dall'analogia con l'atomo di idrogeno.

§ 2. *Il principio di corrispondenza nel moto ellittico ed iperbolico.* Nella teoria classica è noto che il campo elettromagnetico di un elettrone accelerato<sup>6</sup> si scrive:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{q}]] , \quad \mathfrak{H} = - \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{n}\mathbf{q}] , \quad (1)$$

con la notazione seguente:

- $e$  = carica dell'elettrone,
- $c$  = velocità della luce,
- $r$  = distanza elettrone - punto corrente,
- $\mathbf{n}$  = versore nella direzione del raggio,
- $\mathbf{q}$  = accelerazione dell'elettrone al tempo ritardato ( $t-r/c$ ).

Per la decomposizione spettrale del campo si deve distinguere tra moti periodici e non periodici. Discuteremo prima il caso noto periodico e poi tenteremo una conclusione per analogia riguardo al caso non periodico.

Sia  $\omega$  la frequenza angolare dell'elettrone; allora  $\mathbf{q}$  si può scrivere in funzione del tempo  $t$  con la seguente serie di Fourier:

$$\mathbf{q} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{q}_k e^{2\pi i k \omega t} . \quad (2)$$

Quindi per la (1) la decomposizione di Fourier del campo si scrive:

$$\mathfrak{E} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_k e^{2\pi i k \omega t} , \quad \mathfrak{H} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}_k e^{2\pi i k \omega t} , \quad (3)$$

dove

$$\mathfrak{E}_k = \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{q}_k]] , \quad \mathfrak{H}_k = - \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{n}\mathbf{q}_k] . \quad (4)$$

---

<sup>6</sup>vedi M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Vol. 2, 3<sup>a</sup>ed., p. 61, Eq. (54), (54a). Leipzig 1914.

L'energia irraggiata in direzioni diverse è data dal vettore di Poynting

$$\mathcal{G} = (c/4\pi)[\mathcal{E}\mathcal{H}] ;$$

per la (3) la sua media temporale è:

$$\bar{\mathcal{G}} = (c/4\pi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}_k \mathcal{H}_{-k}] = (c/4\pi) \cdot 2 \sum_{k=0}^{\infty} [\mathcal{E}_k \mathcal{H}_{-k}] . \quad (5)$$

Esprimendo i vettori con la (4) si ottiene dalla (5):

$$\bar{\mathcal{G}} = (n/4\pi r^2) \sum_{k=0}^{\infty} J_k , \quad J_k = (2e^2/c^3)([nq_k][n\tilde{q}_k]) \quad (6)$$

( $\tilde{q}_k = -q_k$  indica il valore complesso coniugato di  $q_k$ ).

La teoria dei quanti si fonda nel principio di corrispondenza sull'idea che i singoli contributi d'energia, che sono rappresentati dai termini della serie (6), vengano di fatto emessi nei salti quantici; la radiazione emessa dovrà in media temporale comportarsi per intensità e polarizzazione come la radiazione elettromagnetica (6) ovvero (4); solo essa non dovrà avere le frequenze  $k\omega$  come nella (3), ma piuttosto dovrà comportarsi nelle sue *interferenze* come il campo

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k e^{2\pi i \nu_k t} , \quad \mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k e^{2\pi i \nu_k t} , \quad (7)$$

dove  $h\nu_k$  rappresenta la cessione d'energia in un salto quantico "corrispondente":

$$\nu_k = \frac{1}{h} (W_a - W_e) . \quad (8)$$

Nel problema dell'idrogeno, cioè quando un elettrone ruota attorno ad un nucleo di carica  $Z \cdot e$ , si ha

$$W_a = - RhZ^2/n_a^2 , \quad W_e = - RhZ^2/n_e^2 , \quad (9)$$

dove  $n_a$ ,  $n_e$  indicano i numeri quantici degli stati iniziale e finale, ed  $R$  rappresenta la frequenza di Rydberg. Armoniche superiori e salti quantici sono mutuamente associati in modo tale

che

$$k = n_a - n_e = Z(Rh)^{1/2} \left[ (-W_a)^{-1/2} - (-W_e)^{-1/2} \right] . \quad (10)$$

Il principio di corrispondenza dà quindi nel caso dell'ellisse di Keplero la prescrizione seguente: per la determinazione dell'intensità e della polarizzazione della riga spettrale che corrisponde alla transizione  $n_a \rightarrow n_e$ , si ponga nella (4) e nella (6)

$$q_k = \omega \int_0^{1/\omega} q e^{-2\pi i \nu'_k t} dt , \quad (11)$$

dove

$$\nu' = k \cdot \omega = \frac{2}{h} \cdot (-W)^{3/2} \left[ (-W_a)^{-1/2} - (-W_e)^{-1/2} \right] . \quad (12)$$

La (11) è infatti l'inversa della (2),  $k$  è dato dalla (10), e  $\omega$  nel caso dell'idrogeno è:

$$\omega = (2R/Z) (-W^3/Rh)^{1/2} . \quad (13)$$

Si pensi  $W_e$  dato; allora per la (8) è  $W_a = W_e + h\nu$ , e quindi l'equazione (12) fornisce la trasformazione delle frequenze classiche  $\nu'_k$  nelle frequenze quantistiche  $\nu_k$ , che formula analiticamente lo "spostamento in blocco" dello spettro menzionato nel § 1. Per esempio le righe classiche  $\nu'_k = \infty$  ( $W_a = 0$ ) vengono spostate in blocco nel limite della serie  $\nu_k = W_e/h$ . Se inoltre si ha

$$|W_a - W_e| \ll |W_e| ,$$

si ottiene sviluppando la (12) ( $W$  è un valor medio tra  $W_a$  e  $W_e$ ):

$$\nu'_k = \frac{1}{h} (W_a - W_e) = \nu_k .$$

Per piccole frequenze lo spettro classico e quello quantistico quindi coincidono.

La prescrizione del principio di corrispondenza non è univoca ancora in un punto. Per quale orbita si devono introdurre  $q$  e  $W$  nelle (11) e (12)? Per l'orbita iniziale ( $W = W_a$ ), o per l'orbita finale ( $W = W_e$ ), oppure infine per una certa orbita intermedia? È naturale a questo riguardo estendere tentativamente il principio

di corrispondenza con la prescrizione seguente: si assuma quell'orbita per la quale

$$\nu'_k = \nu_k, \quad (14)$$

cioè si assuma secondo le (8) e (12):

$$-W = \left( \frac{1}{2} \frac{W_a - W_e}{(-W_a)^{-1/2} - (-W_e)^{-1/2}} \right)^{2/3}. \quad (15)$$

Si dimostra facilmente che quest'orbita giace tra l'orbita iniziale e quella finale ( $W_a > W > W_e$ ). Se imponiamo una siffatta uguaglianza tra la frequenza meccanica  $\nu'_k = k \cdot \omega$  e la frequenza quantistica  $\nu_k$ , il campo classico (3) e il "campo quantistico" (7) saranno formalmente identici; sussiste solo la differenza che le singole ampiezze (4) si calcolano mediante la (11), nel caso classico per l'orbita stessa, nel caso quantistico tutte per orbite diverse (15).

Tratteremo adesso la controparte non periodica del problema dell'idrogeno, il moto iperbolico. Al posto delle (2), (3) abbiamo ora integrali di Fourier:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu q_\nu e^{2\pi i \nu t}, \quad (2')$$

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \mathcal{E}_\nu e^{2\pi i \nu t}, \quad \mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \mathcal{H}_\nu e^{2\pi i \nu t}, \quad (3')$$

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{e}{c^2 r} [n[nq_\nu]], \quad \mathcal{H}_\nu = -\frac{e}{c^2 r} [nq_\nu]. \quad (4')$$

Dirigiamo ora la nostra attenzione sull'integrale temporale del vettore di Poynting:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{G} = (c/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\mathcal{E}\mathcal{H}] = (c/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu' [\mathcal{E}_\nu \mathcal{H}_{\nu'}] e^{2\pi i(\nu+\nu')t}.$$

Poichè secondo il teorema di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu' \mathcal{H}_{\nu'} e^{2\pi i(\nu+\nu')t} = \mathcal{H}_{-\nu},$$

risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{G} = (c/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu [\mathcal{E}_{\nu} \mathcal{H}_{-\nu}] = (c/4\pi) \cdot 2 \int_0^{\infty} d\nu [\mathcal{E}_{\nu} \mathcal{H}_{-\nu}] . \quad (5')$$

Con la (4') questa dà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{G} = (n/4\pi r^2) \cdot \int_0^{+\infty} d\nu J_{\nu} , \quad J_{\nu} = (2e^2/c^3) ([nq_{\nu}] [n\tilde{q}_{\nu}]) . \quad (6')$$

L'inverso dell'integrale (2') si scrive:

$$q_{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt q e^{-2\pi i \nu' t} . \quad (11')$$

Abbiamo qui scritto nell'esponente  $\nu'$  al posto di  $\nu$ , per sottolineare che nella teoria quantistica la frequenza vera  $\nu$  della luce, come si manifesta nell'interferenza, non necessariamente coincide con la frequenza meccanica  $\nu'$ . Assumeremo ora che la formula (12), che rappresenta la frequenza meccanica  $\nu'$  per il moto ellittico, corrispondente alla transizione  $W_a - W_e$ , si trasponga immutata per il moto iperbolico, e possa esser sostituita nelle (11'), (4'), (6'). Poichè in questo caso  $W$  (come energia cinetica) è positiva,  $\nu'$  per la (12) si scrive:

$$\nu' = \frac{2}{h} \cdot (W)^{3/2} \left[ (W_e)^{-1/2} - (W_a)^{-1/2} \right] . \quad (12')$$

Dimostriamo nell'Appendice che l'ipotesi (11'), (12') è effettivamente nella direzione di una generalizzazione coerente del principio di corrispondenza di Bohr a sistemi non periodici.

Se  $W_a$  è dato, risulta  $W_e = W_a - h\nu$ , e la (12') rappresenta di nuovo la legge dello spostamento in blocco. Per frequenze piccole sarà di nuovo  $\nu' = \nu$ . La parte secondo la teoria classica infinitamente dura dello spettro ( $\nu' = \infty$ ,  $W_e = 0$ ) sarà ricondotta entro il limite naturale  $\nu = W_a/h$ , in accordo preciso con la legge di Duane-Hunt.

Nella scelta dell'orbita intermedia  $W$  nelle (11') e (12') ci faremo guidare come per il moto ellittico dalla legge fondamentale

(14) ossia (15), che qui meglio si scrive<sup>7</sup>:

$$W = \left( \frac{1}{2} \frac{W_a - W_e}{(W_e)^{-1/2} - (W_a)^{-1/2}} \right)^{2/3} . \quad (15')$$

Introducendo la frequenza limite

$$\nu_0 = W_a / h \quad (16)$$

le formule (12'), (15') si scrivono:

$$\nu' = 2(W^3/h)^{1/2} \left[ (\nu_0 - \nu)^{-1/2} - (\nu_0)^{-1/2} \right] , \quad (17)$$

$$W = h \cdot \left( \frac{\nu/2}{(\nu_0 - \nu)^{-1/2} - (\nu_0)^{-1/2}} \right)^{2/3} . \quad (18)$$

.  
.  
.  
.

#### Appendice

##### *La teoria quantistica dei sistemi non periodici in generale*

Approfondiremo qui la connessione tra le nostre ipotesi del § 2 per la radiazione del moto iperbolico e la formulazione del principio di corrispondenza, che l'autore ha proposto nel lavoro precedente prima (§ 1) citato.

Secondo questa interpretazione il principio di corrispondenza inteso in generale afferma che la luce emessa da un sistema atomico si comporta nei suoi fenomeni d'interferenza come un campo di radiazione elettromagnetico (1); soltanto non si può, come nella teoria di Hertz, identificare nella (1)  $\mathbf{q}$  con le accelerazioni orbitali reali;  $\mathbf{q}$  risulta invece da queste ultime mediante una certa media nello spazio delle fasi.

---

<sup>7</sup>Altre regole per determinare l'orbita intermedia [per esempio  $\bar{W} \cdot \int dI = \int W dI$ , vedi Appendice (76)] non muterebbero sostanzialmente il risultato finale per lo spettro di frenamento.

Descriviamo il moto del sistema emittente mediante coordinate di posizione  $u_k$  e coordinate d'impulso  $I_k$ , che siano coniugate nel senso della meccanica hamiltoniana. Come impulsi  $I_k$  scegliamo in particolare un sistema di costanti d'integrazione dell'equazione differenziale alle derivate parziali del problema meccanico. Negli stati stazionari, senza radiazione, il moto del sistema soddisfa le equazioni di Hamilton, che integrate nel nostro sistema di coordinate danno:

$$u_k = \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot t - \varphi_k, \quad \varphi_k = \text{cost.}, \quad I_k = \text{cost.}, \quad (61)$$

( $W$  = costante dell'energia espressa in funzione di  $I_k$ ). Un processo di emissione o di assorbimento sarà invece caratterizzato da variazione temporale di  $\varphi_k$  e di  $I_k$ . Costruiamo la "fase" caratteristica per una "transizione" non meccanica:

$$\varphi = (2\pi/h) \sum_k \int \varphi_k dI_k = (2\pi/h) \left( t \cdot \int dW - \sum_k \int u_k dI_k \right), \quad (62)$$

dove gli integrali vanno estesi dall'uno fino all'altro stato stazionario ed  $h$  indica il quanto d'azione di Planck. Sostituiamo ora ogni volta nella (62)  $\int u_k dI_k$  con  $u_k \int dI_k$ , cioè per  $u$  intendiamo il suo valor medio sulla transizione. Sarà allora:

$$\varphi = -2\pi(\nu t + \sum_k j_k u_k), \quad (63)$$

dove per brevità si è posto:

$$\nu = -(1/h) \int dW, \quad j_k = (1/h) \int dI_k. \quad (64)$$

$\nu$  è la "frequenza quantistica" secondo il principio  $h\nu$ ,  $j_k$  rappresenta una misura per il  $k$ -esimo "salto quantico". Se  $W$  come funzione di  $I_k$  è nota, si conosce  $\nu$  in funzione degli  $I_k$  degli stati iniziale e finale, ovvero come funzione di  $j_k$  e di  $I_k$  solo dello stato iniziale. Se tutti i salti quantici  $j_k$  sono così piccoli che tutte le  $\partial W / \partial I_k$  non variano percettibilmente nella transizione, sarà

$$\nu = -(1/h) \sum_k \int \frac{\partial W}{\partial I_k} dI_k = - \sum_k j_k \frac{\partial W}{\partial I_k}; \quad (65)$$

in questa regione di  $j_k$   $\nu$  dipende quindi sostanzialmente in modo

lineare omogeneo da  $j_k$ .

Proponiamo ora la seguente relazione tra l'accelerazione apparente  $\mathbf{q}$  da sostituirsi nella (1) e l'accelerazione orbitale reale  $\dot{\mathbf{v}}$ : in un certo sistema di coordinate assegnato  $u_k, I_k$ , che indicheremo come "sistema normale", dovrà essere:

$$\mathbf{q} = \int \cdots \int dj_1 \cdots dj_f \int \cdots \int du_1 \cdots du_f \dot{\mathbf{v}}(u_k) e^{-i\varphi} . \quad (66)$$

Qui  $\dot{\mathbf{v}}(u_k)$  indica l'accelerazione orbitale di un elettrone, più in generale la somma vettoriale di tutte le accelerazioni del sistema in una certa orbita intermedia, in funzione delle coordinate di posizione  $u_k$ . Sulla dipendenza dell'orbita intermedia da  $j_k$  il principio di corrispondenza di per sè nel caso periodico ci lascia all'oscuro; non abbiamo provato a generalizzare la regola (14) proposta nel testo per un grado di libertà. Le integrazioni su  $u_k$  e su  $j_k$  nella (66) vanno estese sull'intero loro intervallo di variabilità, quindi in generale da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Perchè  $\mathbf{q}$  sia identico a  $\dot{\mathbf{v}}$  è necessario e sufficiente che  $W$  sia lineare in  $I_k$ , ovvero che  $\nu$  sia lineare omogeneo in  $j_k$ . Se infatti sostituiamo la (65) nella (66), l'esponente nella (66) sarà

$$-i\varphi = 2\pi i \sum_k j_k \left( u_k - t \cdot \frac{\partial W}{\partial I_k} \right) ;$$

per il teorema di Fourier<sup>8</sup> sarà quindi

$$\mathbf{q} = \dot{\mathbf{v}}(u_k) \quad \text{per} \quad u_k = \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot t$$

e per la (61) questa è direttamente l'accelerazione orbitale in funzione del tempo  $t$ . In questo caso quindi lo spettro quantistico coincide con quello classico (esempio: oscillatore armonico). In generale la (65) vale però solo per piccoli salti quantici  $j_k$ ; solo questi irraggiano quindi in modo quasi classico; altrimenti lo spettro classico è distorto.

Ci convinciamo ora del fatto che la (66) per sistemi periodici condizionati coincide con il principio di corrispondenza

8

$$f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} dj \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) e^{2\pi i(u-v)j} .$$

di Bohr. Effettueremo la transizione dai sistemi non periodici a quelli periodici partendo da un sistema periodico smorzato che, in quanto a rigore ancora non periodico, può essere trattato con le formule di cui sopra, e ponendo infine uguale a zero la costante di smorzamento. Assumiamo:

$$\dot{v} = \sum_{n_k} \mathbf{a}_{n_k} \cdot e^{-\sum u_k (2\pi i n_k + \delta_k)} . \quad (67)$$

Si pensi ad un sistema periodico condizionato che, a causa del suo tempo di vita limitato, è dotato del fattore di smorzamento

$$e^{-\sum \delta_k u_k} = e^{-t \sum \delta_k \partial W_k / \partial I_k} ; \quad (68)$$

$t$  va dall'istante dell'eccitazione ( $t=0$ ) fino a  $\infty$ . Se il segno di  $I_k$  è normalizzato in modo che  $\partial W / \partial I_k > 0$ , anche tutte le  $u_k$  vanno da 0 a  $\infty$ , e le  $\delta_k$  nella (67) devono essere positive. Se si sostituisce la (67) nella (66), l'integrazione su  $u_k$  dà:

$$q = \sum_{n_k} \mathbf{a}_{n_k} \cdot \int \frac{dj_1}{\delta_1 + 2\pi i (n_1 - j_1)} \cdots \int \frac{dj_f}{\delta_f + 2\pi i (n_f - j_f)} \cdot e^{2\pi i \nu t} . \quad (69)$$

Se le costanti di smorzamento  $\delta_k$  sono numeri assai piccoli, gli integrandi hanno dei massimi netti per salti quantici interi  $j_k = n_k$ . In prossimità di un tale punto reticolare  $j_k = n_k$  le quantità  $\partial W / \partial I_k$  sono però sensibilmente costanti, e si può sviluppare  $\nu$  secondo la (64):

$$\nu - \nu_{n_k} = - \sum_k \frac{\partial W}{\partial I_k} (j_k - n_k) . \quad (70)$$

Se questa si sostituisce per  $\nu$  nella (69) e si tien conto che  $\partial W / \partial I_k > 0$ , l'integrazione su  $j_k$  (nel modo più semplice complessa attorno al polo  $j_k = n_k + \delta_k / 2\pi i$ ) dà con approssimazione adeguata

$$q = \sum_{n_k} \mathbf{a}_{n_k} \cdot e^{-2\pi i \nu_{n_k} \cdot t} \cdot e^{-t \cdot \sum (\partial W / \partial I_k) \cdot \delta_k} . \quad (71)$$

Prescindendo dal fattore di smorzamento (68) si ottiene quindi una somma di oscillazioni armoniche con le frequenze proprie  $\nu_{n_k}$ , corrispondenti ai salti quantici interi  $j_k = n_k$ , le cui ampiezze

coincidono con quelle delle armoniche superiori "corrispondenti" nella (67). Ciò è in accordo completo con la teoria quantistica delle righe spettrali se si assume che come "sistema di coordinate normali" (vedi sopra) nel caso periodico condizionato vada preso il sistema di variabili angolari, le costanti d'impulso  $I_k$  del quale sono i cosiddetti integrali di fase ( $\int p_k dq_k$ ).

Per eseguire ora la decomposizione spettrale del vettore  $q$  secondo la (2') basta introdurre, nell'integrazione sullo spazio  $j_k$  della (66),  $\nu$  come variabile d'integrazione. Poichè  $\nu$  è una funzione di  $j_k$ ,  $\nu = \text{cost.}$  rappresenta un'ipersuperficie nello spazio  $j_k$ . Indichiamo con  $dF$  l'elemento di superficie di questa, allora l'elemento di volume dello spazio  $j_k$  sarà

$$dj_1 dj_2 \cdots dj_f = \frac{d\nu \cdot dF}{\left[ \sum_k (\partial W / \partial I_k)^2 \right]^{1/2}} . \quad (72)$$

Se si sostituiscono la (63) e la (72) nella (66) e si confronta con la (2'), risulta

$$q_\nu = \int \cdots \int \frac{dF}{\left[ \sum_k (\partial W / \partial I_k)^2 \right]^{1/2}} \int \cdots \int du_1 \cdots du_f \cdot \dot{\nu}(u_k) e^{2\pi i \sum_k j_k u_k} . \quad (73)$$

Questa, sostituita nelle (3'), (4'), (6'), dà quindi l'analisi spettrale della radiazione quantistica.

Nel caso di un singolo grado di libertà ( $f=1$ ) resta nella (73) soltanto una integrazione; secondo la (61) introduciamo come variabile d'integrazione

$$u / (dW/dI) = t ;$$

allora la (73) si scrive

$$q_\nu = \int dt \dot{\nu} e^{2\pi i (dW/dI) jt} , \quad (74)$$

dove ora si può scrivere l'accelerazione orbitale immediatamente come funzione di  $t$ .

Se per  $\dot{\nu}$  nella (73) si fa in particolare l'ipotesi (67), si può eseguire l'integrazione nella (73) in modo approssimato, analogamente a come si fa nelle (69), (71), per quei punti reti-

colari  $n_k$  che giacciono vicini all'ipersuperficie  $\nu = \text{cost.}$  Si ottiene allora come contributo di queste frequenze proprie  $\nu_{n_k}$  :

$$q_\nu = \sum_{n_k} a_{n_k} \frac{1}{2\pi i (\nu - \nu_{n_k}) - \sum_k (\partial W / \partial I_k) \delta_k} . \quad (75)$$

Se si sostituisce questa nella (2') e si integra su  $\nu$  si ritorna naturalmente alla (71). Si osservi la coincidenza formale del denominatore nella (75) con i denominatori risonanti della teoria della radiazione in prossimità delle frequenze proprie [l'equazione (75) è derivata solo per queste]. Forse a partire da qui si possono ottenere degli spunti per una teoria quantistica coerente della dispersione, nella quale le frequenze quantiche  $\nu_{n_k}$  appaiano automaticamente come posizioni di risonanza.

Per applicare le ipotesi precedenti a problemi particolari è decisiva la questione riguardo al sistema di coordinate normali  $u_k, I_k$ . Nel caso di sistemi periodici condizionati si possiede come sistema privilegiato quello delle variabili angolari. Nei problemi non periodici, che possiedono anche soluzioni periodiche condizionate, è naturale *assumere le variabili angolari dei moti periodici come coordinate normali per quelli non periodici.* Questa è la via che abbiamo intrapreso con successo nel caso del moto iperbolico.

Infatti: nel caso dell'ellisse di Keplero la variabile angolare è

$$u = (1/2\pi)(\epsilon \sin w - w) ,$$

dove  $w$  è l'anomalia eccentrica, e la coordinata d'impulso ad essa coniugata è

$$I = Z(-Rh^3/W)^{1/2} .$$

Nel caso dell'iperbole assumiamo corrispondentemente

$$u = (1/2\pi)(\epsilon \cosh w - w) , \quad I = Z(Rh^3/W)^{1/2} . \quad (76)$$

Inoltre è

$$\frac{dW}{dI} = - \frac{2}{ZR^{1/2}} \cdot (W^3/h)^{1/2} .$$

D'altra parte per la (64) e la (76) è

$$j = Z(Rh)^{1/2} \left( W_e^{-1/2} - W_a^{-1/2} \right) . \quad (77)$$

Di conseguenza

$$\frac{dW}{dI} \cdot j = - \frac{2}{h} W^{3/2} \left( W_e^{-1/2} - W_a^{-1/2} \right) . \quad (78)$$

Ma le formule (74) e (78) coincidono completamente con le formule (11') e (12'), che abbiamo posto a base del calcolo dello spettro di frenamento<sup>9</sup>.

*Riassunto.* Si è proposto un "principio di corrispondenza" per le probabilità di transizione tra orbite iperboliche in stretta analogia con il principio di corrispondenza di Bohr per le ellissi di Keplero (problema dell'idrogeno) (§ 2, 3). Eseguendo la media sulle diverse iperboli che i raggi catodici descrivono penetrando in un anticatodo (massiccio) (§ 4) si ottengono le leggi dello spettro di Röntgen continuo, in accordo con le misure di Kulenkampff (§ 5). La teoria richiede che lo spettro in prossimità del limite sia indipendente dalla direzione d'emissione. Vengono inoltre predette le proprietà di uno spettro generato con anticatodo molto sottile (§ 6). In un'Appendice si mostra che la legge di corrispondenza per la radiazione del moto iperbolico è nella direzione di una generalizzazione coerente del principio di corrispondenza a sistemi non periodici arbitrari.

München, Institut für Theoretische Physik, luglio 1924.

---

<sup>9</sup>Se in luogo della (76) si ponesse  $I = W$ , sarebbe  $j = -v$ ,  $u = t$ , e si arriverebbe allo spettro classico. Kramers ha in linea di massima intrapreso questa via; essa è più insoddisfacente, poichè il limite per piccole lunghezze d'onda è cacciato dentro con un'ipotesi posticcia. Il limite risulta invece automaticamente quando  $I$  è infinito per  $W = 0$ , come accade nella (76).