

Dispersione e principio di corrispondenza¹

Gregor Wentzel a Monaco

Per quanto finora il problema della dispersione è stato discusso dal punto di vista dei quanti, sembra in generale dominare l'opinione che le formule di dispersione della teoria classica dell'elettrone siano perfettamente corrette in ogni circostanza e che quindi si debbano derivare in qualche modo anche secondo la teoria dei quanti. Sebbene non si possa dare per ora una teoria quantistica conseguente della dispersione, il principio di corrispondenza sembra suggerire una deviazione dalle formule di dispersione classiche; di fatto anche il materiale sperimentale mostra una deviazione nella direzione aspettata.

Nella teoria classica la dispersione si realizza nel modo seguente²: l'onda piana primaria eccita degli oscillatori armonici (frequenza propria $\omega_0/2\pi$) ad oscillare; le onde secondarie emesse da questi si sovrappongono all'onda primaria in un'onda piana risultante, che si propaga con velocità di fase mutata c/n_ω ; l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza della luce $\omega/2\pi$. Gli sviluppi di Fourier del campo elettrico \mathcal{E} e del momento elettrico \mathfrak{p} da esso generato siano:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathfrak{p}_\omega e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Allora è

$$n_\omega = 1 + 2\pi N \mathfrak{p}_\omega / \mathcal{E}_\omega, \quad (2)$$

dove N è il numero di oscillatori per centimetro cubo; questi ultimi sono assunti indipendenti l'uno dall'altro (gas rarefatto). \mathfrak{p}_ω si calcola classicamente come oscillazione forzata (con lo

¹Zeitschr. f. Phys. **29**, 306 (1924).

²Si confronti la presentazione di Herzfeld, Zeitschr. f. Phys. **23**, 341 (1924).

smorzamento μ):

$$\mathbf{p} = (e^2/m)\mathfrak{E} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\mu\omega} . \quad (3)$$

Di conseguenza sarà:

$$n_\omega = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\mu\omega)} . \quad (4)$$

Nella teoria quantistica si potrà mantenere la formula (2), quando si riesca ad ottenere un analogo quantistico della polarizzazione \mathbf{p} , cioè a determinare \mathbf{p} secondo il principio di corrispondenza. La chiave per lo sviluppo di questo ci pare consista nella circostanza, che la formula (3) per $\mu \ll \omega$ è identica all'integrale:

$$\mathbf{p}_\omega = (e^2\mathfrak{E}_\omega/m\omega_0) \int_0^{+\infty} d\tau \cdot \sin\omega_0\tau \cdot e^{-(\mu+i\omega)\tau} . \quad (5)$$

Infatti, se si scompone qui $\sin\omega_0\tau$ in funzioni esponenziali e si integra, tralasciando μ^2 si ritorna alla (3). Secondo la (1) si può quindi rappresentare \mathbf{p} con il seguente integrale doppio:

$$\mathbf{p} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\tau \cdot \mathbf{p}' \cdot e^{i\omega(t-\tau)} , \quad (6)$$

dove

$$\mathbf{p}' = \frac{2\pi e^2\mathfrak{E}_\omega}{m\omega_0} \sin\omega_0\tau \cdot e^{-\mu\tau} . \quad (7)$$

Con le posizioni:

$$\omega_0\tau = u , \quad \omega/\omega_0 = j , \quad \mu/\omega_0 = \delta \quad (8)$$

invece di queste si può anche scrivere:

$$\mathbf{p} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dj \int_0^{\infty} du \cdot \mathbf{p}' \cdot e^{i(\omega t - ju)} , \quad (9)$$

$$\mathbf{p}' = \frac{2\pi e^2\mathfrak{E}_\omega}{m\omega_0} \sin u \cdot e^{-\delta u} . \quad (10)$$

Le variabili di integrazione u, j definite nelle (8) hanno il seguente significato: $u/2\pi$ è la "variabile angolo" (nel senso di Schwarzschild), che descrive l'oscillazione non smorzata dell'oscillatore. Se si assume inoltre nel senso della teoria di Bohr ω come misura della variazione di energia in un salto quantico, allora il numero j misura la grandezza del salto quantico corrispondente:

$$\omega = 2\pi\Delta W/h, \quad j = 2\pi\Delta I/h \quad (11)$$

(W =energia, $2\pi I$ =integrale di fase). Infatti risulta immediatamente dalla (11) e dalla seconda equazione (8) che per un oscillatore armonico si ha, com'è noto:

$$W = \omega_0 I, \quad \Delta W = \omega_0 \Delta I.$$

Si noti che non restringiamo il salto quantico j a valori interi. L'equazione (9) è in accordo formale completo con la relazione che il principio di corrispondenza richiede tra un moto meccanico "effettivo" \mathbf{p}' ed il corrispondente vettore \mathbf{p} , che è determinante per l'intensità e per la polarizzazione della luce emessa³. Considereremo dunque l'equazione (9) (per problemi con un grado di libertà) come una formulazione adeguata del principio di corrispondenza, e si pone ora la questione del significato quantistico del vettore \mathbf{p}' , cioè dell'influenza della luce sulla cinematica del modello atomico. Lasceremo qui aperta la questione e ci atterremo piuttosto al seguente punto di vista. Nel caso dell'oscillatore armonico, nel quale W è lineare in I , la teoria dei quanti deve dare lo stesso risultato della teoria classica. Considereremo quindi l'espressione (10) per \mathbf{p}' come obbligatoria in quel caso particolare e cercheremo di generalizzarla per gli altri casi. Bisogna prima di tutto tenere in conto la possibilità di oscillazioni armoniche superiori; poniamo quindi al posto della (10) una serie:

³Si confronti G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **27**, 279 (1924), equazioni (66) e (63).

$$\mathbf{p}' = \frac{2\pi e^2 \mathcal{E} \omega}{m} \cdot \sum_k \frac{p_k}{k \cdot (d\omega/dj)} \sin ku \cdot e^{-\delta_k u} . \quad (12)$$

I pesi p_k corrispondono ai numeri d'elettroni della teoria classica; per l'oscillatore armonico è $p_1=1$, $p_2=p_3=\dots=0$, di modo che la (12) in virtù della (8) ($d\omega=\omega_0 \cdot dj$) ridà la (10).

Per il calcolo dell'indice di rifrazione (2) dobbiamo decomporre spettralmente il vettore \mathbf{p} (9) in conformità alla seconda delle equazioni (1):

$$\mathbf{p}_\omega = (1/2\pi)(dj/d\omega) \int_0^\infty du \cdot \mathbf{p}' \cdot e^{-iju} . \quad (13)$$

Si sostituisca qui la (12) e si integri; si ottiene:

$$\mathbf{p}_\omega = (e^2/m)\mathcal{E} \omega \cdot \sum_k \frac{p_k}{(d\omega/dj)^2 \cdot [k^2 - (j - i\delta_k)^2]} . \quad (14)$$

Si porti questa nella (2) e si trascuri δ_k^2 ; si ottiene infine:

$$n_\omega = 1 + (2\pi N e^2/m) \cdot \sum_k \frac{p_k}{(d\omega/dj)^2 \cdot (k^2 - j^2 + 2i\delta_k j)} . \quad (15)$$

Questa formula significa quanto segue: se si conosce lo stato fondamentale dell'atomo e la meccanica del modello (cioè W in funzione di I , ω in funzione di j) si può facilmente calcolare dalla (11) per ogni frequenza incidente ω il salto quantico corrispondente j . $d\omega/dj$ misura la pulsazione meccanica di un'orbita, che sta tra l'orbita iniziale e quella finale, ma che non è ulteriormente determinata dal principio di corrispondenza. Nella formula (15) il carattere risonante della formula classica è mantenuto: la risonanza appare per salti quantici interi ($j=k$), come deve richiedere la teoria dei quanti. Malgrado ciò esiste rispetto alla formula classica una differenza essenziale, poichè *nei denominatori risonanti non compaiono le frequenze ω_0 , ω , ma i numeri dei salti quantici k , j .*

Nei gas monoatomici le righe di assorbimento stanno di regola nell'ultravioletto; misure di n_ω si fanno per lo più solo nella regione visibile, cioè per $\omega \ll \omega_0$ ovvero per $j \ll 1$. Allora è

abbastanza preciso porre $(d\omega/dj) \cdot j = \omega$, e la (15) dà:

$$n_{\omega} = 1 + (2\pi N e^2 / m) \cdot \sum_k \frac{p_k}{\omega_0'^2 - \omega^2} \quad (16)$$

dove si è posto

$$(d\omega/dj) \cdot k = \omega_0' \quad (17)$$

La (16) è formalmente di nuovo la formula di dispersione classica, ma con una frequenza propria apparente ω_0' , che può essere molto diversa dalla frequenza ω_0^4 . La giustezza della formula di dispersione (15) presuppone che da misure di n_{ω} nel lato rosso rispetto alla serie di assorbimento si ricaverrebbero con la formula classica (4) delle frequenze di assorbimento falsate (ω_0' invece di ω_0), e più precisamente, come si comprende facilmente, per spettri idrogenoidi sempre nel senso delle frequenze d'assorbimento ultraviolette ($\omega_0' > \omega_0$). Più alto il termine della serie, più grande sarà l'errore; per il limite della serie ($k = \infty$) infine ω_0' diventa infinito.

Questa conseguenza della nostra formula (15) risulta completamente confermata dall'esperienza⁵. Per esempio per l'elio si calcola dalle misure esistenti secondo la formula classica una lunghezza d'onda di risonanza tra 500 e 400 Å, mentre la riga di assorbimento più intensa sta a 584 Å e le altre stanno tra 600 e 500 Å⁶. Analogamente succede negli altri gas nobili e nel mercurio.

A rigore dovrei naturalmente trattare gli atomi nominati come problemi a più gradi di libertà ed estendere le formule precedenti

⁴ ω_0' è la frequenza meccanica "corrispondente ad ω_0 . (Per l'oscillatore armonico sarà $\omega_0' = \omega_0$.) Il principio di corrispondenza esercita la sua azione di "riaggiustamento" non solo sulle righe spettrali, ma anche sull'intera curva di dispersione.

⁵Ringrazio Herzfeld dell'indicazione al riguardo. Si confronti la Münchener Dissertation di L. Wolf (in stampa).

⁶Th. Lyman, Science 56, 167 (1922).

di conseguenza⁷; su questo tuttavia non mi addentrerò qui. In gas con spettri di assorbimento semplici la formula (15) potrebbe risultare per il momento sufficiente.

München, Institut für theor. Physik, agosto 1924.

⁷*Suggerimenti su come si possa ottenere tale generalizzazione si trovano a pagina 308 del lavoro citato dell'autore. Forse per salti quantici negativi ($k < 0$), come per esempio secondo Bohr si verificano nelle righe di assorbimento principali di Zn, Cd, Hg, bisogna aspettarsi delle complicazioni, come lo scambio della dispersione normale e anomala in prossimità delle righe di assorbimento. Non pare tuttavia che finora la dispersione di questi vapori in ultravioletto sia stata misurata.*