Due osservazioni sulla diffusione dei raggi corpuscolari come fenomeno di diffrazione.[1]

G. Wentzel a Lipsia

(ricevuto il 19 novembre 1926)

1. Nel caso limite della meccanica classica il quadrato dell'ampiezza delle onde materiali di Schrödinger è identico alla densità di volume dei punti materiali di una corrente corpuscolare stazionaria. 2. Nel problema particolare della diffrazione che corrisponde alla diffusione dei raggi α il primo passo di un procedimento di approssimazione dato da Born fornisce esattamente la distribuzione angolare di Rutherford.

§ 1. Born[2] ha di recente proposto, in analogia con note idee sulla natura della luce, di trattare l'onda materiale ψ di Schrödinger come un campo guida virtuale (privo d'energia) per gli elettroni ed i protoni, mentre la vera energia materiale va pensata concentrata in questi. Il quadrato dell'ampiezza dell'onda ψ determina allora la densità di volume dei punti materiali in un corrispondente fascio di radiazione corpuscolare. Born ha usato questa ipotesi come base per una teoria degli urti elastici e anelastici; la diffusione dei raggi catodici e dei raggi α risulta il più semplice dei problemi da trattare con questo metodo.

Sorge ora la domanda: che relazione c'è tra questa teoria e i vecchi calcoli di quella diffusione che si fondano sulla meccanica classica e sul calcolo delle probabilità? Si pensi per esempio alla teoria di Rutherford della diffusione dei raggi α, che ha trovato sempre nuove conferme sperimentali, ed è servita perfino alla determinazione quantitativa del numero di cariche atomiche. È possibile dimostrare che in certi casi limite le asserzioni della vecchia teoria corpuscolare e della nuova teoria ondulatoria risultano identiche?

Possiamo rispondere affermativamente a questa domanda per il

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **40**, 590 (1927).

[2]M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863 e **38**, 803, 1926.

caso limite della meccanica classica. È noto che il passaggio al limite corrispondente è analogo a quello dall'ottica ondulatoria all'ottica dei raggi; si compie con la sostituzione

$$\psi = A\exp[2\pi iS/h] \, , \tag{1}$$

dove A ed S sono funzioni del punto "lentamente variabili" (S = iconale ovvero funzione d'azione). Per h abbastanza piccolo dall'equazione d'onda di Schrödinger si ottiene in *prima* approssimazione l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton per S, in *seconda* approssimazione la seguente equazione differenziale per la funzione d'ampiezza A ($\partial/\partial n$ = derivata nella direzione del "cammino meccanico" grad$S$):

$$\frac{\partial}{\partial n} \log A = -\frac{1}{2} \frac{\Delta S}{|\mathrm{grad} S|} \, . \tag{2}$$

D'altra parte ci si persuade facilmente con l'applicazione del teorema di Gauss

$$\int d\sigma \, \frac{\partial S}{\partial n} = \int d\tau \Delta S$$

ad un tratto infinitesimo di un "tubo di traiettorie" di sezione q, che vale sempre:

$$\frac{\partial}{\partial n} \log(q \cdot |\mathrm{grad} S|) = \frac{\Delta S}{|\mathrm{grad} S|} \, . \tag{3}$$

Confrontando la (2) e la (3) risulta:

$$\frac{\partial}{\partial n} (A^2 q |\mathrm{grad} S|) = 0 \, , \tag{4}$$

ovvero, poichè $|\mathrm{grad} S|$ significa l'impulso meccanico mv:

$$A^2 qv = \mathrm{cost.} \tag{5}$$

lungo ogni traiettoria[3]. Ma se si identifica A^2, come sopra preannunciato, con la densità di volume di una corrente corpuscolare, $A^2 qv$ significa la massa delle particelle che attraversano la sezione q in un secondo, e l'equazione (5) garantisce quindi la

[3] *Per una via alquanto diversa L. de Broglie* (C.R. 23 agosto 1926) *deriva una relazione analoga per quanti di luce, tuttavia in questo caso la velocità v è più o meno ipotetica.*

richiesta conservazione del numero di particelle.

Appare perciò giustificato identificare A^2 con il numero medio di particelle per centimetro cubo anche al di fuori del dominio di validità della meccanica classica.

§ 2. Il solo caso di diffusione corpuscolare nel quale teoria ed esperimento siano confrontabili quantitativamente è quello della diffusione dei raggi α già menzionato all'inizio. Poichè è dubbio se questo processo abbia luogo interamente nel dominio di validità della meccanica classica è assai raccomandabile trattare lo stesso per una volta anche come problema di diffrazione, ed applicare un altro tipo di approssimazione rispetto a quella che deriva dalla meccanica classica.

Secondo un procedimento proposto da Born (l. c.) integriamo l'equazione d'onda

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V)\psi = 0 \tag{6}$$

mediante una serie:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \cdots , \tag{7}$$

dove ψ_0 indica l'onda primaria:

$$\psi_0 = \exp[ik(\mathfrak{n}_0\mathbf{r})] , \quad k = 2\pi/\lambda = \frac{2\pi}{h}(2mW)^{1/2} , \quad |\mathfrak{n}_0| = 1 . \tag{8}$$

Si calcola la serie ψ_1, ψ_2,... con l'integrale di volume

$$\psi_i = -\frac{2\pi m}{h^2}\int d\tau'\cdot V(\mathbf{r}')\psi_{i-1}(\mathbf{r}')\cdot\frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \tag{9}$$

Allora risulta infatti

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0 ,$$

$$\Delta\psi_i + k^2\psi_i = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V\psi_{i-1} , \quad (i = 1,2,...)$$

ed equazione differenziale e condizione al contorno sono soddisfatte. È tuttavia essenziale per la convergenza del procedimento che il potenziale V vada a zero all'infinito almeno come r^{-2}. Il puro campo coulombiano $V = eE/r$ quindi non va bene, ma si deve tener conto per lo meno qualitativamente della schermatura dovuta al guscio elettronico esterno. L'ipotesi più comoda è

$$V = \frac{eE}{r}\cdot\exp[-r/R]\ , \tag{10}$$

dove R è dell'ordine di grandezza del raggio atomico. Infatti allora l'atomo (10) è all'esterno ($r \gg R$) completamente neutro, e all'interno ($r \ll R$) si aggiunge al campo del nucleo semplicemente lo "schermatura esterna":

$$V = \frac{eE}{r} - \frac{eE}{R} + \cdots\ .$$

Si dimostrerà che la scelta particolare della funzione esponenziale nella (10) è del tutto irrilevante per il risultato finale; essa offre solo il vantaggio di assicurare nel modo più semplice la convergenza del procedimento.

Si esegue ora la prima approssimazione. Poichè ci si può limitare a una distanza grande $\mathbf{r}$ dall'atomo, si può porre nella (9):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r}| - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|} = r - (\mathfrak{n}\mathbf{r}')$$

($\mathfrak{n}$ = vettore unitario nella direzione del "raggio secondario"). Di conseguenza sarà per la (8):

$$\psi_1 = -\frac{2\pi meE}{h^2}\,\frac{\exp[ikr]}{r}\int\frac{d\tau'}{|\mathbf{r}'|}\cdot\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}'|}{R} + ik(\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n},\mathbf{r}')\right]\ . \tag{11}$$

L'integrazione si compie nel modo più semplice in un sistema di coordinate polari (ρ,ϑ,φ) il cui asse giaccia parallelo al vettore $(\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n})$:

$$\psi_1 = -\frac{2\pi meE}{h^2}\,\frac{\exp[ikr]}{r}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{\infty}d\rho\cdot\rho\ \exp\left[-\frac{\rho}{R} + ik|\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n}|\rho\cos\vartheta\right]$$

$$= \frac{\exp[ikr]}{r}\,\frac{eE}{W}\,\frac{1}{|\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n}|^2 + \frac{1}{k^2R^2}}\ . \tag{12}$$

Se si introduce ora l'angolo di diffusione Θ compreso tra $\mathfrak{n}_0$ ed $\mathfrak{n}$, risulta

$$|\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n}| = 2\sin(\Theta/2)\ ,$$

di conseguenza:

$$\psi_1 = \frac{\exp[ikr]}{r}\,\frac{eE}{4W}\,\frac{1}{\sin^2(\Theta/2) + \frac{1}{4k^2R^2}}\ , \tag{13}$$

e il rapporto delle intensità tra radiazione diffusa e radiazione primaria sarà:

$$\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_0|^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{eE}{4W}\right)^2 \frac{1}{\left(\sin^2(\Theta/2) + \frac{1}{4k^2R^2}\right)^2} \,. \tag{14}$$

Ma kR è dell'ordine di grandezza: raggio atomico diviso lunghezza d'onda, cioè un numero assai grande. A prescindere dagli angoli di diffusione Θ piccolissimi la (14) coincide quindi esattamente con l'espressione di Rutherford per la distribuzione angolare delle particelle diffuse:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{eE}{4W}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)} \,.$$

Perciò in questo caso $\psi_0 + \psi_1$ è l'onda che corrisponde esattamente alla soluzione della meccanica classica. Non ho potuto stabilire se questo derivi da un caso o da una connessione più profonda.

Solo il termine successivo della serie (7), ψ_2, sarà quindi caratteristico della meccanica ondulatoria, cioè rappresenterà il vero fenomeno di diffrazione. Resta ancora da capire sotto quali condizioni esso risulti dimostrabile in pratica.

Leipzig, Institut für theoretische Physik, novembre 1926.