La misura di operatori quantomeccanici[1]

E.P. Wigner

(ricevuto il 24 maggio 1952)

La consueta ipotesi dell'interpretazione statistica della meccanica quantistica, che tutti gli operatori hermitiani rappresentino delle quantità misurabili, viene riconosciuta in generale come una comoda idealizzazione matematica, non come un'espressione di un dato di fatto. Si mostra qui che già la validità delle leggi di conservazione per grandezze quantizzate (come la legge del momento angolare o la legge per la conservazione della carica elettrica), che governano l'interazione tra oggetto di misura e apparato di misura, permette la misura della maggior parte degli operatori solo come caso limite. In particolare è probabile che non si possano soddisfare le condizioni per la misura di operatori che non siano commutabili con la carica totale. Lo stesso può valere per operatori che non siano commutabili con il numero di particelle pesanti.

1. L'idea fondamentale dell'interpretazione statistica della meccanica quantistica è stata espressa per la prima volta da Born[2]. Le sue idee sono state approfondite nella direzione fisico-intuitiva e ulteriormente sviluppate dalle ricerche di Heisenberg e di Bohr[3]. La formalizzazione matematica della teoria si deve principalmente alle ricerche di von Neumann[4]*.* Una pietra

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **133**, 101 (1952).

[2]Born, M.: Z. Physik **37**, 803 (1926). *"Il moto delle particelle segue leggi probabilistiche, ma la probabilità si propaga in accordo con la legge causale".*

[3]Heisenberg, W.: Z. Physik **43**, 172 (1927). - Die Physikalischen Prinzipien der Quantenmechanik. Leipzig 1930. - Bohr, N.: Nature, Lond. **121**, 580 (1928). - Naturwiss. **17**, 483 (1929) *e un altro articolo nel numero dedicato a Max Planck di Naturwissenschaften.* Vedi anche Mott, N.F.: Proc. Roy. Soc. Lond. **126**, 79 (1929) e Bohr, N. e Rosenfeld, L.: Phys. Rev. **78**, 794 (1950).

[4]Neumann, J. v.: Matematische grundlagen der quentenmechanik, in

angolare della teoria consiste nell'ipotesi che a ogni operatore autoaggiunto Q corrisponda una grandezza fisica misurabile. Il risultato della misura è sempre un autovalore dell'operatore Q; contemporaneamente la misura porta il sistema nello stato che viene descritto dall'autofunzione del risultato della misura. Sia φ la funzione di stato originaria del sistema, e indichiamo gli autovalori e le autofunzioni di Q con q_1, q_2...risp. con ψ_1, ψ_2... .Allora la misura dà il risultato q_ν con la probabilità $|(\psi_\nu,\varphi)|^2$ e il sistema dopo la misura[5] si trova nello stato ψ_ν. Con (ψ_ν,φ) si indica il prodotto scalare hermitiano di ψ_ν e φ. Si può qui ancora osservare che un operatore I che lasci invariate sia le probabilità di transizione che la variazione temporale del sistema non può neppur influire sullo stato dello stesso. Espresso in termini concreti, se per tutte le φ e ψ si ha sia $|(\psi,\varphi)|^2=|(\psi,I\varphi)|^2$, sia $(I\varphi)_t=I(\varphi_t)$ (dove l'indice t connota la variazione temporale del sistema), gli stati φ e $I\varphi$ sono completamente indistinguibili. Nella formulazione ortodossa della teoria gli I sono numeri complessi di valore assoluto 1.

La gran debolezza del formalismo su delineato sta nel fatto che non contiene alcuna prescrizione su come la misura dell'operatore Q possa essere eseguita. Invero lo schema di una prescrizione siffatta si dà facilmente[6]: si unisce l'oggetto misurato φ con uno strumento di misura, la funzione di stato del quale si può indicare con ξ. Lo strumento di misura è così fatto che la funzione di stato del sistema complessivo $\varphi\xi$, consistente dell'oggetto misurato e dello strumento di misura, dopo un certo tempo diventa

---

particolare cap. 6, Berlin 1932.

[5] *Nel caso che l'autovalore* q_ν *sia degenere e comprenda più autostati* $\psi_{\nu 1}$, $\psi_{\nu 2}$, ..., *la probabilità di* q_ν *è uguale a*

$$w_\nu=\sum_k |(\psi_{\nu k},\varphi)|^2$$

e lo stato dopo la misura è $\sum_k w_\nu^{-1/2}(\psi_{\nu k},\varphi)\psi_{\nu k}$.

[6] Neumann, J. v.: Matematische Grundlagen der Quantenmechanik, in particolare cap. VI, Berlin 1932.

$$\varphi\xi \to \sum_{\nu} (\psi_{\nu}, \varphi) \psi_{\nu} \chi_{\nu}, \tag{1}$$

dove i χ_{ν} sono stati macroscopicamente distinguibili dello strumento di misura: lo stato χ_{ν} notifica il risultato q_{ν} della misura[7]. Ma questa prescrizione rimane puramente formale finché non si indichi come si faccia a disporre lo strumento di misura nello stato ξ. Un'ulteriore difficoltà della teoria, epistemologicamente ancor più profonda, si cela nelle parole "stati macroscopicamente distinguibili". Questo punto è già stato discusso da Heisenberg ampiamente, e per quanto per ora possibile, completamente. Non sarà più ripreso qui. Il problema che si discuterà si riferisce invece alla possibilità d'una interazione tra oggetto e strumento di misura, come risulta simboleggiato dalla (1). Da ciò otterremo soltanto condizioni necessarie per la misurabilità di una grandezza. Anche quando un'interazione che corrisponde alla (1) non contraddice alcun principio noto è ben possibile che o ξ sia in linea di principio irrealizzabile, oppure che i χ_{ν} siano inaccessibili a una distinzione macroscopica diretta o anche indiretta. Infatti[8] la (1) sposta solo il problema della distinguibilità degli ψ_{ν} in quello della distinguibilità dei χ_{ν}, e si studieranno qui solo le condizioni e la possibilità di un tale spostamento.

---

[7]*Si riconosce dalla (1) anche la causa del carattere hermitiano degli operatori che corrispondono a qrandezze osservabili. Il passaggio dal primo membro della (1) al secondo viene realizzato mediante un operatore unitario. Esso porta $\psi_{\nu}\xi$, risp. $\psi_{\mu}\xi$ in $\psi_{\nu}\chi_{\nu}$, risp. $\psi_{\mu}\chi_{\mu}$. Ma queste ultime funzioni sono tra loro ortogonali, poichè le χ, in quanto macroscopicamente distinguibili, devono essere tra loro ortogonali. A causa dell'unitarietà della transizione ciò risulta allora anche per le $\psi_{\nu}\xi$, cioè anche per le ψ_{ν}, che costituiscono il sistema di autofunzioni di Q. Poichè inoltre le q_{ν} come risultati di una misura sono reali, ne segue il carattere autoaggiunto di Q.*

[8]Vedi Heisenberg, W.: l.c. e Neumann, J, v.: l.c., specialmente pp. 223, 224.

2. Finché si rimane nell'ambito della teoria generale espressa dalla (1) non si può fare sulla misurabilità alcuna affermazione concreta che vada oltre la Nota (7). Infatti lo strumento di misura della (1) in generale potrebbe essere un sistema assai semplice ed elementare, in un esempio di Heisenberg esso consiste di un solo quanto di luce[9]. Ma se si tira in ballo il postulato dell'invarianza relativistica dovrebbe essere ampiamente noto che almeno un operatore I_1 è commutabile con tutte le grandzze osservabili Q. L'operatore I_1 lascia invariati tutti gli stati con momento angolare intero, ma moltiplica per -1 tutti gli stati con momento angolare semiintero. L'osservazione di una grandezza, il cui operatore non sia commutabile con I_1 [come quella delle ampiezze quantizzate $\psi(x,y,z)+\psi(x,y,z)^*$] renderebbe possibile distinguere tra stati che per la teoria della relatività devono rimanere indistinguibili[10]. Questa restrizione dell'osservabilità è indipendente dalla teoria della misura, com'è espressa nella (1). Ma parleremo qui di una restrizione d'altro tipo, che ha la sua origine nelle leggi di conservazione delle grandezze quantizzate e che si fonda su una discussione della possibilità della rappresentazione (1). Questa restrizione non risulta così forte come quella su menzionata e avrà solo per conseguenza che lo strumento di misura dev'essere molto grande nel senso che esso deve contenere con probabilità considerevole un ammontare assai grande della grandezza quantizzata soggetta a conservazione, con l'operatore della quale il suo operatore sia non commutabile.

3. Grandezze quantizzate soggette a conservazione del tipo su menzionato sono per esempio la componente del momento angolare in una certa direzione, la carica elettrica complessiva del sistema, il numero delle "particelle pesanti" in esso. Da ora l'indice in

---

[9]Heisenberg, W.: l.c., capitolo II, 2, esempio b.

[10]Questo punto sarà discusso ulteriormente in modo alquanto più divulgativo in un lavoro di Wick, Wightman e Wigner che apparirà tra breve. Lo scritto presente deve la sua origine ad un'impostazione del problema che è emersa durante la stesura del lavoro su menzionato.

basso di una funzione di stato darà il numero di quanti (ħ, *e*, ecc.) che lo stato descritto dalla funzione di stato contiene. Per evitare indici frazionari si accrescerà tuttavia l'indice di 1/2 quando necessario. Inoltre per ora la (1) sarà assunta nella sua forma originaria; altre definizioni della misura saranno discusse alla fine di questa esposizione.

Nel caso più semplice le autofunzioni di un operatore tipico che non è commutabile con la grandezza da conservarsi hanno la forma $(\psi_0+\psi_1)/2^{1/2}$ e $(\psi_0-\psi_1)/2^{1/2}$. Quando per esempio la grandezza da conservarsi è il momento angolare nella direzione *Z*, $\psi_0+\psi_1$ e $\psi_0-\psi_1$ sono autofunzioni della componente *X* dello spin di una particella. L'operatore associato a questa componente è evidentemente non commutabile con il momento angolare nella direzione *Z*. L'equazione (1) afferma

$$(\psi_0+\psi_1)\xi\ (\psi_0+\psi_1)\chi, \quad (\psi_0-\psi_1)\xi\ (\psi_0-\psi_1)\chi', \tag{2}$$

dove $(\chi,\chi')=0$, e la freccia indica una trasformazione lineare unitaria, commutabile con l'operatore della grandezza conservata. Se sommiamo e sottraiamo le due equazioni (2) e contemporaneamente suddividiamo $\chi+\chi'$ e $\chi-\chi'$ nelle parti σ_ν e rispettivamente τ_ν che rappresentano stati con un valore precisamente determinato della grandezza da conservarsi

$$(\chi+\chi')/2^{1/2}=\sum \sigma_\nu, \quad (\chi-\chi')/2^{1/2}=\sum \tau_\nu, \tag{3}$$

otteniamo

$$\psi_0\xi\rightarrow(\psi_0\sum \sigma_\nu+\psi_1\sum \tau_\nu)/2^{1/2}, \tag{4a}$$

$$\psi_1\xi\rightarrow(\psi_0\sum \tau_\nu+\psi_1\sum \sigma_\nu)/2^{1/2}. \tag{4b}$$

Che l'apparato di misura debba contenere una quantità infinita della grandezza da conservarsi risulta chiaro già dalle (4). Per le (4) il valore d'aspettazione della quantità da conservarsi è uguale per i due stati che sono rappresentati dai secondi membri delle (4). Il suo valore d'aspettazione per l'oggetto della misura è in entrambi i casi 1/2, il suo valore d'aspettazione per lo strumento di misura è in entrambi i casi la media aritmetica dei valori d'aspettazione per $\sum \sigma_\nu$ e per $\sum \tau_\nu$. Dopo la misura l'oggetto misurato e lo strumento di misura sono di nuovo separati e il contenuto complessivo del sistema per quanto riguarda la quantità da conservarsi si compone in modo additivo a partire dai contenuti dell'oggetto di misura e dello strumento di misura. Ma il valore d'aspettazione della quantità da conservarsi è evidentemente più grande di 1 per il primo membro della (4b) rispetto al primo membro della (4a).

Si può ancora acutizzare questa contraddizione se si osserva che dalle (4) e dalla legge di conservazione discendono le equazioni

$$\psi_0\xi_\nu \to (\psi_0\sigma_\nu+\psi_1\tau_{\nu-1})/2^{1/2}, \quad \psi_1\xi_{\nu-1}\to(\psi_0\tau_\nu+\psi_1\sigma_{\nu-1})/2^{1/2}, \tag{5}$$

dove le ξ_ν sono le componenti di ξ in autofunzioni della quantità da conservarsi

$$\xi=\sum \xi_\nu. \tag{6}$$

Assumiamo ora

$$(\xi_\nu,\xi_\nu)=x_\nu,\ (\sigma_\nu,\sigma_\nu)=s_\nu,\ (\tau_\nu,\tau_\nu)=t_\nu;\ (\sigma_\nu,\tau_\nu)=a_\nu+ib_\nu, \tag{7}$$

($x_\nu,s_\nu,t_\nu,a_\nu,b_\nu$ reali); allora le equazioni

$$x_\nu=(1/2)s_\nu+(1/2)t_{\nu-1},\ x_{\nu-1}=(1/2)t_\nu+(1/2)s_{\nu-1}, \tag{8a}$$

$$0=a_\nu-ib_\nu+a_{\nu-1}+ib_{\nu-1} \tag{8b}$$

esprimono il carattere unitario della transizione indicata dalla freccia delle (5),

$$\sum x_\nu=\sum s_\nu=\sum t_\nu=1, \quad \sum a_\nu=\sum b_\nu=0 \tag{9}$$

la normalizzazione di ξ,χ,χ' e l'ortogonalità di χ e χ'. Dalle (8b) e (9) segue tuttavia immediatamente $a_\nu=b_\nu=0$, dalla (8a) segue

$$x_{\nu+1}-(1/2)s_{\nu+1}=(1/2)t_\nu=x_{\nu-1}-(1/2)s_{\nu-1},$$

cioè sia $x_{2\nu+1}-(1/2)s_{2\nu+1}$ che anche $x_{2\nu}-(1/2)s_{2\nu}$ sono indipendenti da ν. Ciò vale allora anche per t_ν, cosa che però è incompatibile con la (9). Quindi a rigore una misura che porti alla separazione di $\psi_0+\psi_1$ da $\psi_0-\psi_1$ è impossibile. Lo stesso si può dimostrare per mezzo di un'algebra un po' più minuziosa, che però non è essenzialmente diversa dalla precedente, anche per gli stati $\alpha\psi_0+\beta\psi_1$ e $-\bar{\beta}\psi_0+\bar{\alpha}\psi_1$, dove α e β sono numeri complessi arbitrari.

Poichè una misura della componente dello spin è possibile in pratica, deve anche esser possibile modificare la trattazione precedente in modo che essa dimostri la possibilità di una siffatta misura con precisione arbitraria. A questo scopo indichiamo con

$$(\psi_0+\psi_1)\xi\rightarrow(\psi_0+\psi_1)\chi+(\psi_0-\psi_1)\eta, \quad (\psi_0-\psi_1)\xi\rightarrow(\psi_0-\psi_1)\chi'+(\psi_0+\psi_1)\eta', \tag{10}$$

gli stati nei quali $(\psi_0+\psi_1)\xi$ e risp. $(\psi_0-\psi_1)\xi$ sono trasportati dal processo di misura. Se allora $(\chi,\chi')=0$, (η,η) ed (η',η') possono essere resi piccoli a piacere, e determinando gli stati χ e χ' dello strumento di misura si può in quasi tutti i casi decidere dello stato dell'oggetto misurato.

Possiamo disporre in modo tale che $\eta=-\eta'$ e anche $(\eta,\chi)=(\eta,\chi')=(\chi,\chi')=0$. Ciò significa che la misura può avere tre risultati: lo stato è $(\psi_0+\psi_1)/2^{1/2}$, lo stato è $(\psi_0-\psi_1)/2^{1/2}$, lo stato è indeterminato. Tuttavia la probabilità di ottenere l'ultimo risultato è (η,η) e, come vedremo subito, questa si può rendere arbitrariamente piccola. Per ottenere ciò occorre altresì che la scomposizione della ξ secondo la (6) abbia moltissime componenti.

Assumiamo che il loro numero sia n e che lo strumento di misura possa contenere non meno di una e non più di n unità della quantità da conservarsi. Allora le ξ_ν si annullano meno che per $0<\nu\leq n$. Introduciamo inoltre per brevità:

$$2\chi=2\sigma+\rho+\tau, \quad 2\chi'=2\sigma-\rho-\tau, \quad 2\eta=-2\eta'=\tau-\rho. \tag{11}$$

Questo per la (10) dà

$$\psi_0\xi\rightarrow\psi_0\sigma+\psi_1\rho, \quad \psi_1\xi\rightarrow\psi_0\tau+\psi_1\sigma. \tag{12}$$

Analogamente alla (6), le σ, τ, ρ si possono allora scrivere come una somma di autofunzioni di quantità da conservarsi. Tra le σ_ν hanno valore finito solo quelle con $0<\nu\leq n$, ρ_0 resta invece finito, mentre ρ_n già si annulla. Viceversa $\tau_1=0$, mentre τ_{n+1} è finito.

L'ortogonalità dei secondi membri della (12) porta a

$$(\sigma_\nu,\tau_\nu)+(\rho_{\nu-1},\sigma_{\nu-1})=0, \tag{13}$$

la condizione di normalizzazione è

$$(\xi_\nu,\xi_\nu)=(\sigma_\nu,\sigma_\nu)+(\rho_{\nu-1},\rho_{\nu-1})=(\sigma_\nu,\sigma_\nu)+(\tau_{\nu+1},\tau_{\nu+1}). \tag{13a}$$

Da qui vengono le condizioni

$$(\xi,\xi)=\sum(\xi_\nu,\xi_\nu)=1, \tag{14a}$$

$$(\chi,\chi')=4\sum(\sigma_\nu,\sigma_\nu)-\sum(\rho_\nu+\tau_\nu,\rho_\nu+\tau_\nu)=0, \tag{14b}$$

e poichè $(\chi,\eta)=(\chi',\eta)=0$

$$\sum(\sigma_\nu,\tau_\nu-\rho_\nu)=0, \tag{14c}$$

$$\sum(\tau_\nu+\rho_\nu,\tau_\nu-\rho_\nu)=0. \tag{14d}$$

Si possono soddisfare queste equazioni in molti modi. La scelta più semplice - che tuttavia non porta al valore di (η,η) più piccolo possibile - è quella per la quale

$$(\sigma_\nu,\tau_\nu)=(\sigma_\nu,\rho_\nu)=0 \tag{15}$$

per ogni valore di ν. Così le (13) e (14c) sono soddisfatte. Poi per quei ν, per i quali sia ρ_ν che τ_ν possono essere finiti, si può assumere

$$\rho_\nu=\tau_\nu \quad (1<\nu\leq n-1), \tag{15a}$$

e dare la stessa norma

$$(\rho_\nu,\rho_\nu)=(\tau_\nu,\tau_\nu)=c'. \tag{15b}$$

a tutti i ρ ed i τ che non si annullano. Allora la (14d) è soddisfatta, ed anche la (13a), quando la si utilizzi per determinare (ξ_ν,ξ_ν).

Infine si può anche assumere

$$(\sigma_\nu,\sigma_\nu)=c \tag{15c}$$

indipendentemente da ν (per $0<\nu\leq n$). Risulta quindi anche $(\xi_\nu,\xi_\nu)=c+c'$, e per la (14a)

$$n(c+c')=1. \tag{16a}$$

Ci rimane ancora la (14b). Essa dà

$$4nc=(\rho_0,\rho_0)+(\rho_1,\rho_1)+(\tau_n,\tau_n)+(\tau_{n+1},\tau_{n+1})+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{n-1}(2\rho_\nu,2\rho_\nu)=4c'+4(n-2)c'=4(n-1)c'. \tag{16b}$$

Dalle (16a) e (16b) si calcola $c'=1/(2n-1)$. Quando infine si calcola (η,η), per la (15a) i termini per $\nu=2,3,...,n-1$ si cancellano e si ottiene

$$(\eta,\eta)=c'=1/(2n-1). \qquad (17)$$

Questo tende a zero quando n diventa abbastanza grande. Con una scelta più vantaggiosa di σ,τ,ρ si sarebbe potuto ottenere che (η,η) andasse a zero come $1/n^2$. Ciononostante ξ dovrà avere un numero molto grande di componenti, e quindi l'apparato di misura un valore assai grande della grandezza da conservarsi, se si vorrà avere una grande sicurezza che l'interazione tra oggetto misurato e apparato di misura porti ad una misura. In particolare, se si vuol misurare la differenza di fase tra parti della funzione di stato che corrispondono a cariche totali diverse[11], la carica elettrica dell'apparato di misura - quando una misura siffatta è possibile - dev'essere assai indeterminata.

4. Ci si chiede ancora se la descrizione della misura contenuta nella (1) o nelle (2) non sia troppo piena di pretese. Si dimostra però che, sebbene ciò sia probabilmente vero, anche una definizione considerevolmente più lasca del processo di misura porta a risultati analoghi.

La generalizzazione più importante delle (2) consiste nel permettere una variazione dello stato dell'oggetto della misura anche quando esso sia originariamente in uno dei due stati $\psi_0+\psi_1$ o $\psi_0-\psi_1$. Nel caso che la misura debba soltanto distinguere tra loro questi due stati, lo stato finale dell'oggetto della misura rimane privo d'importanza (vedansi anche parecchi degli esempi nella Nota (3)). È già stato notato che la stessa distinzione tra $\varphi+\varphi'$ e $\varphi-\varphi'$ è inammissibile quando φ descrive uno stato con momento angolare intero, φ' uno stato con momento angolare semintero.

Se cambiamo le (2) in modo tale da sostituire soltanto ai secondi membri ψ_0 e ψ_1 con ψ'_0 e ψ'_1, le considerazioni precedenti non cambiano per nulla. Infatti il soddisfacimento delle equazioni così ottenute porta con sè anche il soddisfacimento delle (2)

---

[11]Questo punto sarà discusso ulteriormente in modo alquanto più divulgativo in un lavoro di Wick, Wightman e Wigner che apparità tra breve. Lo scritto presente deve la sua origine ad un'imposta-zione del problema che è emersa durante la stesura del lavoro su menzionato.

nella loro forma originaria. Assumeremo quindi in generale

$$(\psi_0+\psi_1)\xi\ (\sum\psi'_\mu)(\sum\chi'_\lambda), \quad (\psi_0-\psi_1)\xi\ (\sum\psi''_\mu)(\sum\chi''_\lambda). \tag{18}$$

Ci limitiamo di contro al caso in cui il numero dei quanti della quantità da conservarsi sia determinato in ξ. Allora, senza pregiudicare la generalità della trattazione, si può assumere questo numero uguale a zero.

Poichè i secondi membri delle (18) o non possiedono alcun quanto della quantità da conservarsi, oppure uno solo, risulta

$$\sum_\mu \psi'_\mu\chi'_{\nu-\mu}=0, \quad \nu\neq 0,1. \tag{19}$$

Per l'ortogonalità dei termini della somma nella (19) essi devono tutti annullarsi individualmente. Si può poi assumere che ψ'_0 e χ'_0 siano finiti, e quindi restano possibili solo i due casi seguenti:

1. ψ'_0,ψ'_1,χ'_0 finiti, tutti gli altri si annullano;
2. ψ'_0,χ'_0,χ'_1 finiti, tutti gli altri si annullano.

Anche per le grandezze due volte primate vale che possono essere finiti solo due ψ'' ed un χ'', oppure solo un ψ'' e due χ''. Perciò nel caso 1 da

$$2\psi_0\xi\rightarrow(\psi'_0+\psi'_1)\chi'_0+\sum\psi''_\mu\chi''_\lambda ,$$

risulta che $\psi''_1\chi''_0$ dev'essere finito e uguale a $-\psi'_1\chi'_0$. Nel caso 2 risulta parimenti $\psi'_0\chi'_1=-\psi''_0\chi''_1$. Una discussione semplicissima conduce ora al risultato che il caso 1 porta alla modificazione della (2) di cui già si è parlato nel capoverso precedente. Il caso 2 porta invece sostanzialmente a

$$(\psi_0+\psi_1)\xi\ \psi'_0(\chi_0+\chi_1), \quad (\psi_0-\psi_1)\xi\ \psi'_0(\chi_0-\chi_1), \tag{20}$$

in luogo della (2). In questo caso il processo di misura porta ad uno scambio della quantità da conservarsi tra oggetto e strumento di misura. In particolare il problema di distinguere tra $\psi_0+\psi_1$ e $\psi_0-\psi_1$ è sostituito da quello quasi equivalente del distinguere tra $\chi_0+\chi_1$ e $\chi_0-\chi_1$. Nel caso che questa differenza non sia immediatamente percettibile il risultato della sezione precedente resta invariato.

Princeton (N.J.), Palmer Physical Laboratory, University.