

**NUOVE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DELLA
GRAVITAZIONE DI EINSTEIN.
B. FORMULAZIONE ESPLICITA DEL CAMPO STATICO A
SIMMETRIA ASSIALE.
CON UN'APPENDICE SUL PROBLEMA STATICO
A DUE CORPI.**

RUDOLPH BACH A ESSEN-HÜGEL E H. WEYL A ZURIGO.

1. INTRODUZIONE

Secondo Weyl¹ e Levi-Civita² la forma fondamentale metrica di un campo statico a simmetria assiale nello spazio vuoto, con l'introduzione delle "coordinate canoniche cilindriche", si può portare nella forma

$$(1) \quad ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad f^2 d\sigma^2 = r^2 d\vartheta^2 + e^{2\gamma} (dr^2 + dz^2);$$

ϑ è l'azimut di un piano meridiano, $r = 0$ l'equazione dell'asse di simmetria, $x^{(1)} = z$, $x^{(2)} = r$ sono le coordinate nel piano meridiano; $f = e^\psi$ e γ dipendono solo da z ed r . ψ soddisfa all'equazione del potenziale

$$(2) \quad \Delta\psi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r} \right\} = 0$$

(ψ_z , ψ_r indicano le derivate rispetto a z ed r), e γ si determina da

$$(3) \quad \gamma_z = 2r\psi_z\psi_r, \quad \gamma_r = r(\psi_r^2 - \psi_z^2);$$

infatti per la (2)

$$(4) \quad d\gamma = 2r\psi_z\psi_r dz + r(\psi_r^2 - \psi_z^2) dr$$

è un differenziale esatto.

La soluzione di Schwarzschild per il campo a simmetria polare di un punto materiale si ottiene quando si assuma per ψ quella soluzione della (2) che nello spazio canonico dà il potenziale newtoniano di un segmento dell'asse ricoperto di materia di una certa densità costante. Si indichi con $2l$ la lunghezza di questo segmento, misurata in coordinata z , e con r_1 ed r_2

Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, B, Math. Z. **13**, 134-145 (1922).

¹Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Phys. **54**, 117-145 (1918); con un'aggiunta in: Ann. d. Phys. **59**, 185-188 (1919).

² ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. Nota VIII. Rend. Acc. dei Lincei (1919).

la distanza del punto considerato, misurata con coordinate canoniche alla maniera euclidea, dagli estremi del segmento. Si ottiene allora

$$(5) \quad \psi = \frac{1}{2} \ln \frac{r_1 + r_2 - 2l}{r_1 + r_2 + 2l}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{4r_1 r_2}.$$

Con una trasformazione conforme del piano meridiano si può dimostrare l'accordo con la formula di Schwarzschild.

2. IL CAMPO DI UN ANELLO

.....

3. IL CAMPO DI DUE CORPI SFERICI

Per generalizzare la soluzione data in 1. dobbiamo partire da una soluzione dell'equazione (2) che corrisponda a due ricoprimenti separati dell'asse z . Scegliamo quindi sull'asse z quattro punti P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) rispettivamente con le coordinate $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$. Poniamo

$$(27) \quad z_1 - z_2 = 2l; \quad z_3 - z_4 = 2l'; \quad z_2 - z_3 = 2d,$$

pensiamo i segmenti $2l$ e $2l'$ ricoperti con densità di massa costante e conseguentemente assumiamo per ψ :

$$(28) \quad \psi = \frac{m}{2} \cdot \ln \frac{r_1 + r_2 - 2l}{r_1 + r_2 + 2l} + \frac{m'}{2} \cdot \ln \frac{r_3 + r_4 - 2l'}{r_3 + r_4 + 2l'},$$

dove r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sono le distanze misurate alla maniera euclidea del punto considerato dai P_i . I due corpi non potranno ora restare liberamente in quiete senza sforzi di sostegno. Ma per il momento vogliamo determinare come si comporti il campo gravitazionale nello spazio vuoto; ivi valgono le equazioni (3). Calcoliamo quindi le derivate di ψ . Poiché si ha

$$\frac{\partial r_i}{\partial r} = \frac{r}{r_i}, \quad \frac{\partial r_i}{\partial z} = \frac{z - z_i}{r_i},$$

risulta

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{2ml \left(\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} \right)}{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2} + \frac{2m'l' \left(\frac{r}{r_3} + \frac{r}{r_4} \right)}{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{2ml \left(\frac{z - z_1}{r_1} + \frac{z - z_2}{r_2} \right)}{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2} + \frac{2m'l' \left(\frac{z - z_3}{r_3} + \frac{z - z_4}{r_4} \right)}{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}. \end{aligned}$$

Si ha identicamente:

$$(30) \quad z - z_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - 4l^2}{4l}; \quad z - z_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + 4l^2}{4l};$$

$$(31) \quad \begin{aligned} 16r^2 l^2 &= [(r_1 + r_2)^2 - 4l^2][4l^2 - (r_1 - r_2)^2]; \\ 16r^2 l'^2 &= [(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2][4l'^2 - (r_3 - r_4)^2]. \end{aligned}$$

Per mezzo della (30) la seconda riga della (29) si può trasformare in:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{m(r_2 - r_1)}{2r_1 r_2} + \frac{m'(r_4 - r_3)}{2r_3 r_4}.$$

Se questa e le espressioni (29) si pensano sostituite nella (3), si vede che $d\gamma$ sarà una forma quadratica in m ed m' . I due termini quadratici di questa forma corrispondono a ciascuno dei campi singoli generati dai due segmenti rivestiti di massa, il termine misto dà la modificazione del campo ottenuto per sovrapposizione dovuta all'interazione tra i due segmenti. (Il caso di tre o più segmenti non presenta nient'altro di nuovo.) Le soluzioni corrispondenti ai due campi singoli sono note dalla sezione 1, formula (5). Scriviamo questi campi parziali:

$$(32) \quad \gamma_{11} = \frac{m^2}{2} \cdot \ln \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{4r_1r_2}, \quad \gamma_{22} = \frac{m'^2}{2} \cdot \ln \frac{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}{4r_3r_4}.$$

Derivando si verifica che la (3) è soddisfatta. A questi campi singoli se ne aggiunge ancora uno proporzionale a mm' , che ora calcoliamo.

.....

...e rimane:

$$(41) \quad \frac{\gamma_{12}}{mm'} = \ln \frac{lr_4 - (l' + d)r_1 - (l + l' + d)r_2}{lr_3 - dr_1 - (l + d)r_2} + cost.$$

Perché γ_{12} si annulli all'infinito dev'essere $cost. = \ln(d/(l' + d))$. Se la costante è determinata in questo modo γ_{12} resta invariato per la sostituzione

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & l' & l \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & l & l' \end{pmatrix},$$

come si dimostra con un breve calcolo.

Per la discussione delle formule ottenute ci riduciamo al caso $m = m' = 1$; per la (5) questa condizione corrisponde proprio al caso che si tratti di due "punti materiali". Allora il risultato ottenuto si scrive così:

$$(42) \quad f^2 = \frac{r_1 + r_2 - 2l}{r_1 + r_2 + 2l} \cdot \frac{r_3 + r_4 - 2l'}{r_3 + r_4 + 2l'},$$

$$e^{2\gamma} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{4r_1r_2} \cdot \frac{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}{4r_3r_4}$$

$$\cdot \left(\frac{d(l' + d)r_1 + d(l + l' + d)r_2 - ldr_4}{d(l' + d)r_1 + (l + d)(l' + d)r_2 - l(l' + d)r_3} \right)^2.$$

Solo con questa assunzione per m, m' la parte spaziale $d\sigma^2$ della forma metrica fondamentale non sarà nè 0 nè ∞ sui segmenti dell'asse ricoperti di massa. Per esempio su P_1P_2 , se si pone

$$z - z_2 = l(1 - \cos u),$$

si ha:

$$\frac{d\sigma^2}{4l^2} = \frac{(l + l' + d)^2 (d + l \sin^2 \frac{u}{2})}{(l + d)^2 (l' + d + l \sin^2 \frac{u}{2})} du^2 + \frac{l' + d + l \sin^2 \frac{u}{2}}{d + l \sin^2 \frac{u}{2}} \sin^2 u d\vartheta^2.$$

Per $\lim l'/d = 0$, cioè quando l'influenza del secondo corpo è trascurabile, questa espressione diventa:

$$d\sigma^2 = 4l^2(du^2 + \sin^2 u d\vartheta^2),$$

il quadrato dell'elemento di linea di una superficie sferica. I due "punti materiali" sono quindi, se misurati con l'invariante $d\sigma^2$, corpi di rotazione sferici.

Sui tratti dell'asse per $z > z_1$ e per $z < z_4$ la forma metrica fondamentale è del tutto regolare. Tuttavia sul segmento P_2P_3 che separa i due corpi, sebbene questo segmento abbia una lunghezza finita

$$\int d\sigma = \frac{d(l+l'+d)}{(l+d)(l'+d)} \cdot \int_0^{2d} \sqrt{\frac{(2l+2d-\zeta)(2l'+\zeta)}{\zeta(2d-\zeta)}} d\zeta,$$

c'è una singolarità, poiché ivi γ non è uguale a 0, ma assume il valore costante

$$(43) \quad \Gamma = \ln \frac{d(l+l'+d)}{(l+d)(l'+d)}.$$

In ciò si manifesta la necessità che tra i due corpi siano presenti degli sforzi di sostegno; di questo si occupano più in dettaglio le seguenti considerazioni di Weyl.

4. IL PROBLEMA STATICO A DUE CORPI (DI H. WEYL).

Nel caso statico a simmetria assiale lo schema delle componenti della densità tensoriale dell'energia deve avere la forma seguente:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{T}_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1^1 & \mathbf{T}_2^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1^2 & \mathbf{T}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_3^3 \end{array}$$

dove si sono introdotti il tempo t come coordinata $x^{(0)}$, l'azimut ϑ come coordinata $x^{(3)}$; le componenti dipendono solo da $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. La possibilità di introdurre il "sistema di coordinate canonico" è, come mostrano le equazioni della gravitazione, sempre legata alla condizione

$$(44) \quad \mathbf{T}_1^1 + \mathbf{T}_2^2 = 0,$$

la quale afferma che lo sforzo nel piano meridiano consiste in una trazione in una data direzione ed in una pressione *di uguale intensità* ortogonale alla prima. Supponiamo che questa condizione sia soddisfatta e operiamo d'ora innanzi nello spazio rappresentativo canonico. Se introduciamo la notazione

$$(45) \quad \mathbf{T}_3^3 = r\rho', \quad \mathbf{T}_0^0 = r(\rho + \rho'),$$

le equazioni della gravitazione si scrivono

$$(46) \quad \Delta\psi = \frac{1}{2}\varrho, \quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2} + \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 \right\} = -\varrho';$$

$$(47) \quad \mathbf{T}_1^1 = -\mathbf{T}_2^2 = \gamma_r - r(\psi_r^2 - \psi_z^2), \quad -\mathbf{T}_1^2 = -\mathbf{T}_2^1 = \gamma_z - 2r\psi_r\psi_z.$$

Il fattore costante $8\pi\kappa$ delle leggi della gravitazione di Einstein è assorbito nelle componenti dell'energia. Se al di fuori di una regione finita si ha $\mathbf{T}_i^k = 0$, come *massa* del sistema di corpi che generano il campo gravitazionale (vedasi la definizione a pagine 247-248 del mio libro "Raum Zeit Materie" 4^a ed., Springer 1921) si ha il coefficiente m che compare nello sviluppo di $f^2 = e^{2\psi}$ in potenze dell'inverso della distanza R da un centro fissato: $f^2 = 1 - \frac{m}{R} + \dots$, che vale per R grandi. Per la (46) si ha $m = \int \varrho dV$, dove dV indica l'elemento di volume $2\pi r dr dz$ dello spazio rappresentativo canonico. Se la regione "vuota", nella quale i \mathbf{T} si annullano, presenta più fori, diciamo due, la funzione potenziale ψ si può suddividere in uno ed un sol modo in due parti $\psi_1 + \psi_2$, in modo che ψ_1 sia una funzione potenziale che si annulla all'infinito e regolare in tutta la regione esterna al primo foro, e ψ_2 in tutta la regione esterna al secondo foro. I coefficienti m_1, m_2 negli sviluppi

$$e^{2\psi_1} = 1 - \frac{m_1}{R} + \dots, \quad e^{2\psi_2} = 1 - \frac{m_2}{R} + \dots$$

s'hanno da considerare come le masse dei due sistemi singoli; quindi si ha $m = m_1 + m_2$ ed m_1 è uguale all'integrale di volume $\int \varrho dV$ esteso al primo foro, m_2 è uguale a quello esteso al secondo foro. Quindi ϱ è la *densità di massa nello spazio canonico*. Se sono presenti più corpi, devono essere mantenuti in quiete mediante sforzi di sostegno che si oppongano alle forze gravitazionali; ma sempre nello spazio tra i corpi privo di *materia* (non di sforzi) si deve porre

$$(48) \quad \varrho = 0.$$

Non faremo ulteriori ipotesi su \mathbf{T}_i^k . Se ψ è noto come funzione potenziale nello spazio G privo di materia, dalla (4) assieme all'ingiunzione che γ si annulli all'infinito, si determina γ al di fuori di una regione L *semplicemente connessa*, tutta al finito, che racchiuda tutti i corpi. All'interno della parte L' di L priva di materia scegliamo γ a piacere, mantenendo la connessione regolare con l'esterno, ma in modo tale che γ si annulli come r^2 quando ci si approssimi all'asse di simmetria. Gli sforzi di sostegno (che si annullano al di fuori di L) si ottengono allora dalle (46), (47). Nei miei lavori precedenti prima citati da Bach avevo assunto in particolare $\varrho' = 0$; allora l'equazione differenziale (46) per γ , assieme alla condizione al contorno $\gamma = 0$ sull'asse di simmetria, determina γ e quindi i \mathbf{T}_i^k ($i, k = 1, 2$) univocamente. Gli sforzi radiali-assiali ottenuti in tal modo sono ben adatti ad eliminare la singolarità peggiore, un γ diverso da 0 sull'asse; essi però non eliminano questa singolarità completamente, perché la derivata γ_r come prima non si

annulla in generale sull'asse. Non si può fare a meno di uno sforzo azimutale ρ' , legato ad una densità d'energia d'ugual grandezza; ci dedichiamo ora ad una determinazione più accurata di \mathbf{T}_i^k con le ipotesi prima fatte.

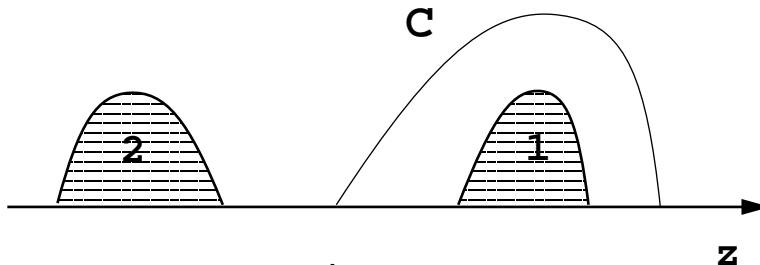


Figura 1.

Se si ha a che fare per esempio con due corpi separati, ciascuno dei quali includa un tratto dell'asse (Fig.1), la forza K (agente nella direzione dell'asse) con la quale gli sforzi di sostegno tengono fermi l'uno rispetto all'altro i due corpi è uguale a 2π per il flusso del vettore $(\mathbf{T}_1^1, \mathbf{T}_1^2)$ attraverso una curva C che separi i due corpi nel piano meridiano:

$$K = 2\pi \int_C (\mathbf{T}_1^2 dz - \mathbf{T}_1^1 dr).$$

Poiché la divergenza di questo vettore si annulla in tutto G , K non dipende dalla posizione precisa di C . La parte del semipiano meridiano non occupata dai corpi è semplicemente connessa, e pertanto in G si ha una funzione γ^* univoca, che si annulla all'infinito, la quale si determina dalla (4):

$$d\gamma^* = r(\psi_r^2 - \psi_z^2)dr + 2r\psi_r\psi_z dz.$$

Su un pezzo dell'asse appartenente al confine di G è quindi $\gamma_z^* = 0$, $\gamma_r^* = 0$; di conseguenza $\gamma^* = \text{cost.}$, $\gamma_r^* = 0$. Sui due pezzi che vanno all'infinito si ha in particolare $\gamma^* = 0$; il valore costante che γ^* assume nella parte dell'asse posta tra i due corpi sarà invece indicato con Γ . Le formule (47) si scrivono ora

$$\mathbf{T}_1^1 = \gamma_r - \gamma_r^*, \quad \mathbf{T}_1^2 = -(\gamma_z - \gamma_z^*);$$

quindi

$$\int_C (\mathbf{T}_1^2 dz - \mathbf{T}_1^1 dr) = \int_C \{(\gamma_z^* - \gamma_z)dz + (\gamma_r^* - \gamma_r)dr\} = \int_C d(\gamma^* - \gamma)$$

è uguale alla differenza di $\gamma^* - \gamma$ all'inizio e alla fine della curva C . Poiché γ è nullo sui pezzi dell'asse che appartengono a G , questa differenza è uguale a Γ . Da ciò risulta in conclusione, con l'utilizzo delle consuete unità,

$$(49) \quad K = \frac{c^2 \Gamma}{4\kappa}.$$

Se si possono introdurre i nostri sforzi di sostegno in modo tale che soddisfino la condizione (44) che rende possibile un sistema di coordinate canonico e

se lo spazio tra i corpi è privo di materia nel senso della condizione (48), essi impediscono sempre ai due corpi di seguire l'attrazione gravitazionale mediante la forza uguale K , data dalla (49); possiamo perciò con un certo fondamento fisico designare questa forza K come la forza gravitazionale con la quale i due corpi si attraggono. Il valore costante di γ^* sul tratto dell'asse compreso tra i corpi ha assunto quindi un significato interessante.

Nel caso calcolato da Bach nella sezione 3 otteniamo quindi

$$K = \frac{c^2}{4\kappa} \ln \frac{(d+l)(d+l')}{d(d+l+l')}$$

come valore della forza, con la quale si attirano due punti materiali, le cui masse posseggano i raggi gravitazionali l ed l' e la cui distanza nello spazio rappresentativo canonico sia uguale a $2d$. Supponiamo che l ed l' siano piccoli rispetto a d ; allora in prima approssimazione si ottiene il valore newtoniano

$$\frac{c^2}{\kappa} \cdot \frac{ll'}{(2d)^2}.$$

Non si deve sopravvalutare il significato fisico di questo risultato; per la soluzione del vero problema a due corpi, la determinazione del moto di due masse pesanti che si attraggono, in questo modo non si è ottenuto nulla. Si è ottenuta però un'espressione esatta fisicamente sensata per la forza con la quale si attraggono due punti materiali secondo la teoria di Einstein.

.....

(ricevuto il 16 luglio 1921)