La definizione del concetto di tempo.[1]

Gerold v. Gleich a Ludwigsburg

(ricevuto il 22 dicembre 1927)

L'universo spaziotemporale della teoria della relatività non è nient'altro che un diagramma fittizio. I due concetti di tempo tra loro distinti della t. d. r. sono soltanto conseguenza di trasformazioni fisicamente infondate delle coordinate del diagramma, e rispettivamente di un'applicazione a sproposito della teoria degli invarianti.

§ 1. Talvolta si dimentica che le moderne speculazioni sul concetto di tempo sono originate esclusivamente dall'elettrodinamica della seconda metà del XIX secolo. Sia per essere intuito che per la sua rappresentazione oggettiva il tempo ha bisogno di un processo nello spazio. Allo scopo si offrivano immediatamente i moti circolari piani, che si sono considerati a priori come "uniformi": in primo luogo la rotazione apparente del cielo delle stelle fisse. In secondo luogo moti periodici il cui andamento entro il singolo periodo non occorreva che fosse uniforme, per esempio l'orbita apparente del sole attorno alla terra. Il fatto che la durata di una rotazione terrestre e quella della rivoluzione attorno al sole siano in rapporto numerico fisso, sebbene i due moti siano evidentemente indipendenti tra loro[2] potrebbe valere come dimostrazione plausibile dell'uniformità della rotazione terrestre[3], quindi della sua idoneità come misura del tempo[4]. Tra i moti periodici non uniformi il pendolo gioca il

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **47**, 280 (1928)

[2]*I tentativi di tempo in tempo ripetuti di porre in relazione funzionale le rotazioni dei pianeti con i periodi orbitali non possono esser presi sul serio.*

[3]*Dubitiamo tuttavia oggi per ragioni meccaniche che ciò sia di fatto rigorosamente esatto.*

[4]*Poiché è uniforme, la scoperta della precessione non ha potuto offrire alcuna possibilità per una revisione del concetto di*

ruolo principale, senza il quale non si sarebbe mai giunti all’idea di attribuire al tempo in sè siffatte oscillazioni periodiche. Abbiamo realizzato approssimativamente il moto circolare uniforme nell’esecuzione pratica degli orologi.

Quando Keplero ha formulato la sua seconda legge, la legge delle aree, egli è giunto tacitamente ad una nuova illustrazione del concetto di tempo. Diremmo oggi: il tempo è proporzionale al settore di un moto centrale ("imperturbato"). Se qualcuno avesse considerato il moto angolare del sole sull’eclittica come misura "giusta" del tempo, avrebbe dovuto perciò ritenere il tempo funzione della distanza istantanea del sole.

L’osservazione non è del tutto superflua, poiché il tempo solare (il tempo delle meridiane) fino a tempi relativamente recenti valeva come "tempo vero", e in astronomia porta ancora convenzionalmente questo nome. Da un punto di vista primitivo il concetto di tempo poteva essere associato sia al moto angolare del sole rispetto alle stelle fisse che alla rotazione della terra, cioè alle culminazioni delle stelle fisse.

Solo un punto di vista oltremodo primitivo identificherebbe il concetto di "tempo" e quello di "orologio". Evidentemente i processi eseguiti nello spazio, rotazione terrestre, rivoluzione terrestre, moto del pendolo, rotazione delle lancette dell’orologio sono solo "immagini" del tempo nello spazio, e l’astronomia non può proprio fare a meno di considerare tempo e spazio come categorie distinte, tra loro indipendenti[5].

§ 2. Con formulazione matematica di deve dire: ogni funzione che contenga sia variabili di lunghezza che di tempo, posta uguale ad una costante ovvero allo zero, definisce un "moto", ma niente

---

tempo. Al riguardo non fa nulla che in seguito l’anno tropico non sia risultato esattamente costante. Invece la nutazione avrebbe potuto condurre un astronomo ingenuo all’idea che il trascorrere del tempo non sia "uniforme", ma dipenda dalle coordinate della luna.

[5]*Lo scopo di questo saggio è di occuparsi dell’opposta asserzione della t. d. r..*

affatto l’espressione di una dipendenza reciproca dei concetti di spazio e di tempo, o di una "struttura" di qualche tipo del cosmo come di un universo spazio-temporale mutuamente stratificato. Inversamente un moto può esser reso matematicamente percepibile solo ponendo uguale a zero una funzione del tipo anzidetto, col ché la struttura della funzione determina le modalità del moto. Per ciò si ha naturalmente bisogno di una determinazione convenzionale[6] delle unità di spazio e tempo, che si possono sottoporre entrambe a una trasformazione di similitudine, ma non ad una trasformazione con coefficienti che contengano le coordinate dello spazio[7].

Un moto è dato completamente da

$$f(t,x_1,x_2,x_3,...) = 0 \,, \tag{1}$$

dove t è il tempo, le x_i sono coordinate spaziali arbitrarie.

Quando la formula (1) soddisfa alle osservazioni a meno di un inevitabile errore d’osservazione "casuale", si assume che essa corrisponda ad una "legge di natura". Si ha tanta più fiducia in essa, quanto più semplice risulta la formula[8]. Al posto delle coordinate spaziali stesse possono intervenire nella (1) anche le loro derivate prime e seconde[9] rispetto al tempo. Oltre alla (1) si possono ancora dare una o più equazioni del tipo

$$F(x_1,x_2,x_3,...) = 0 \,, \tag{1a}$$

che restringono il moto a determinate regioni dello spazio[10]. Se oltre alla (1) vale anche una relazione analoga

---

[6]*Come peraltro già Laplace ha esposto. Vedi Méc. céleste I, p. 17.*

[7]*Come invece si permette la t. d. r. g..*

[8]*Il concetto di semplicità è relativo, come mostra la t. d. r. g., che ritiene le sue equazioni gravitazionali particolarmente semplici.*

[9]*Ci riserviamo di entrare in seguito nella questione, perché non derivate superiori.*

[10]*Quando sono contenute solo le* x_i*, si chiamano notoriamente condizioni "olomome", quando anche le loro derivate rispetto al tempo, "non olonome".*

$$\varphi(t, x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0 \ , \qquad (2)$$

o si tratta di due processi del tutto distinti, per esempio la (1) rappresenta i moti di uno o più pianeti attorno al baricentro del sistema solare, e la (2) il moto della luce che, secondo il punto di vista del non-relativista ("galileiano", per scegliere una designazione positiva) non sono mutuamente in relazione causale. Infatti le (1) e (2) possono differire anche di molto. Oppure i moti (1) e (2) sono forzosamente accoppiati tra loro, come per esempio nel rotolamento di un corpo su una superficie in moto di una certa forma. Allora anche le (2) sono "condizioni" come le (1a), le cosidette "condizioni reonomiche". Il fatto dell'accoppiamento forzoso deve però esser dato fin dall'inizio, come nell'esempio anzidetto, alla formulazione del problema, oppure dimostrato fisicamente. Ora il relativista (come il galileiano) non può fornire la prova fisica che il moto della luce sia accoppiato forzosamente col moto dei pianeti. Ciononostante egli accoppia sconsideratamente le due leggi di natura mediante certe operazioni matematiche, cioè tratta (nella t. d. r. g.) la (2) tacitamente come condizione reonomica della (1). Si arriva così a pensare che la (1) da sola sia falsa o solamente approssimata, e che solo con l'intervento della (2) diventi di precisione "assoluta"[11]. Un galileiano che condivide quest'opinione assumerà che la teoria dei moti planetari elaborata in base alle leggi di Newton vada migliorata tenendo conto di perturbazioni che non hanno affatto la loro origine nel moto della luce, ma nella propagazione di onde elettromagnetiche. Cercherà di fondare fisicamente il modo d'agire di queste perturbazioni[12]. Il

[11] *Formulata di solito dicendo che Newton sarebbe corretto da Einstein come la teoria degli epicicli da Keplero. L'affermazione non dimostrata, che la t. d. r. g. produca esattamente la precessione osservata del perielio di Mercurio è ripetuta continuamente in tutti gli scritti relativistici nonostante tutte le obiezioni.*

[12] *A quest'ambito appartengono le vecchie teorie elettrodinamiche della gravitazione, ora date per obsolete.* - E. Anding, Astr.

relativista rinuncia a questo e si aiuta con puri sviluppi matematici che lo conducono ad un completo sovvertimento del concetto di tempo.

§ 3. Il punto di partenza per queste moderne speculazioni sul tempo è notoriamente costituito dalla trasformazione che da H.A. Lorentz prende il nome, che Lorentz per suo conto aveva proposto solo per lo studio del campo di cariche elettriche in moto, mentre Einstein l'ha estrapolata[13] fuori dal dominio dell'elettrodinamica e con ciò ha sovvertito il concetto di tempo usato finora. Per lui serve esclusivamente allo scopo di poter attribuire alla velocità della luce rispetto a due sistemi d'assi in moto relativo uniforme lo stesso valore. Per il moto uniforme di un punto parallelo all'asse X di un sistema d'assi in quiete sussiste l'espressione[14]

$$dx/dt = K \; ; \qquad (3)$$

per lo stesso moto relativo ad un sistema d'assi primato che si muova uniformemente con la velocità v parallelamente all'asse OX (parimenti asse OX') vale naturalmente

$$dx'/dt = K' \; , \qquad (3a)$$

dove per il galileiano è[15] in ogni caso $K' = K - v$.

Naturalmente per il relativista, poiché l'esperienza quoti-

Nachr. **220**, 353, 1923*, ha dimostrato che la velocità finita delle onde gravitazionali non può causare un moto apsidale apprezzabile. Ho verificato il conto per tutt'altra via e l'ho confermato.*

[13] *Lorentz ha immediatamente accettato l'interpretazione di Einstein. Vedasi* H.A. Lorentz, Theory of Electrons 1909, p. 230*: "It would be unjust not to add that, besides the fascinating boldness of its starting point, Einstein's theory has another marked advantage over mine".*

[14] *Chiedo venia, se per amor di chiarezza nell'esposizione successiva insisto qui su cose del tutto triviali.*

[15] *Da qui risulta che si può sempre assumere il primo sistema, invece che in quiete, in moto uniforme. Anche allora v è la velocità relativa dei due sistemi d'assi.*

diana parla assai chiaro, K' è diverso da K. In un solo caso no, in quello per il quale la verifica sperimentale è assai difficile da ottenere[16], cioè quello della velocità della luce. Un galileiano che si lasci convertire dal relativista, dice: credo quia absurdum. Il non convertito al posto delle (3) e (3a) può proporre la relazione comune $d^2x/dt^2 = 0$, che vale simultaneamente per i due sistemi d'assi menzionati, ovvero che - espresso più modernamente - è "invariante rispetto al gruppo di Galilei-Newton"[17]. Alla fin fine quest'invarianza salta fuori dal fatto che un'equazione differenziale di second'ordine possiede due costanti di integrazione arbitrarie. D'imporre a priori il postulato dell'invarianza di un'espressione al galileiano difficilmente passerebbe per la testa. Infatti il requisito dell'invarianza di una relazione del tipo (1) rispetto ad una trasformazione lineare

$$\left.\begin{aligned} t' &= a_{00}t + a_{10}x_1 + a_{20}x_2\ ,\ldots \\ x'_1 &= a_{01}t + a_{11}x_1 + a_{21}x_2\ ,\ldots \\ x'_2 &= a_{02}t + a_{12}x_1 + a_{22}x_2\ ,\ldots\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

è equivalente all'ipotesi che la totalità delle formule (4) sia una condizione reonomica per la (1), e questo, prima di essere affermato, dovrebbe essere fondato fisicamente. Allora la legge di natura (1) sarebbe di fatto modificata con ragione, analogamente a come le formule del moto di un singolo pianeta subiscono variazioni (perturbazioni) per il moto dei restanti pianeti. Ma se il fondamento fisico non s'ha da portare, il postulato dell'invarianza della (1) rispetto alla (4) muta il concetto di tempo. In fisica l'uso della teoria degli invarianti sembra a priori non senza pericoli, e d'altro canto si potrebbe dire che dalla

---

[16]*Non credo qui di dovermi addentrare in una discussione rinnovata dei bastantemente noti esperimenti d'interferenza.*

[17]*Vedasi per esempio* F. Klein, Vorlesungen über die Entw. d. Math. **19**, 53, 1927. *Il gruppo di Galilei-Newton risulta là alquanto più cospicuo di come lo si vede qui, poiché vengono introdotte ulteriori coordinate spaziali e la possibilità di invertire il tempo e di spostarne l'origine.*

trasformazione di Lorentz la matematica venga influenzata in senso elettrodinamico. Osservato per inciso, Olaf Roemer avrebbe potuto attribuire le variazioni periodiche nell'inizio delle eclissi delle lune di Giove invece che alla propagazione finita della luce ad una variazione periodica del concetto di tempo o avrebbe potuto supporre una modifica della legge di gravitazione dovuta alla struttura dello spazio. Errori sistematici nelle osservazioni impongono la correzione delle leggi di natura. La t. d. r. g. ha intrapreso la strada opposta e scorge in un "errore sistematico nelle osservazioni" (perielio di Mercurio), a dispetto di un accordo per lo meno difettoso, una verifica a posteriori per il suo cambiamento del concetto di tempo.

§ 4. La questione dell'invarianza si afferra nel modo più chiaro se oltre alla "coordinata temporale" si considera una sola coordinata spaziale. Per trasformazioni lineari si arriva alla stessa cosa se al posto delle variabili stesse si pongono i loro differenziali[18]; solo non si dipenderà dalla scelta di una determinata origine delle coordinate ovvero del tempo zero, ed è un vantaggio. È chiaro a priori che una trasformazione lineare con certi coefficienti rappresenta un moto non appena in essa intervenga la coordinata temporale. Si abbia quindi in luogo della (4)

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \alpha\cdot dx + \beta\cdot dt\ , \\ dt' &= \gamma\cdot dx + \delta\cdot dt\ , \end{aligned}\right\} . \tag{5}$$

Se si indicano le velocità dx/dt e dx'/dt' con ξ e ξ', risulta con semplice divisione

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\ . \tag{6}$$

Se si riferisce la trasformazione a due sistemi di assi che si muovano l'uno relativamente all'altro con velocità uniforme v, dev'essere per $\xi = 0$, $\xi' = v$, e per $\xi' = 0$, $\xi = -v$, cioè dev'essere, come mostra la (6), $v = \beta/\delta = \beta/\alpha$ ed $\alpha = \delta$, sicché con

---

[18] *Che lavorare con i differenziali invece che con le derivate rappresenti un passo indietro nell'analisi superiore, fino a poco fa era riconosciuto quasi generalmente.*

$\varepsilon = \gamma/\alpha$ sarà

$$\xi' = \frac{\xi + v}{\varepsilon\xi + 1} . \tag{7}$$

ε è un parametro disponibile. Finora la trasformazione non diceva nient'altro che i sistemi d'assi primato e non primato si muovono uniformemente l'uno rispetto all'altro. Nel momento in cui si comincia ad avvalersi del parametro ε, che deve avere le dimensioni ($L^{-1}T$), si va a toccare il concetto di tempo, o, se si vuole, si crea una "legge di natura", che lo definisce di bel nuovo. Ma questa nuova legge di natura non viene seguita dal relativista fino alle sue ultime conseguenze, poiché egli ha evitato il passaggio dal sistema d'assi a riposo nello spazio a quello che giace parallelo alla congiungente terra-pianeta. Sulle conseguenze ho dato indicazioni di recente[19].

La nuova legge di natura del relativista consiste nel fatto che la velocità della luce, riferita a sistemi d'assi in moto diverso, non è relativa, come assume il galileiano, ma risulta qualcosa d'assoluto. In altre parole, il relativista ammette che la formula (7) per il valore determinato $\xi = c$ porti la variabile ξ in se stessa. Relativisticamente, cioè a seguito del *postulato di assolutezza* per la luce, dev'essere quindi

$$c = \frac{c + v}{1 + \varepsilon c} ,$$

dalla quale risulta

$$\varepsilon = v/c^2 . \tag{8}$$

Il requisito che il determinante della trasformazione (5) sia $D = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$, cioè che quasta trasformazione debba essere ortogonale, non ha niente a che fare con il problema qui posto (postulato di assolutezza della luce). Esso significa evidentemente che è $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. E solo con l'imposizione di questo *nuovo* postulato la (5) diventa la trasformazione di Lorentz della t. d. r. sp.[20], dalla quale è determinato il concetto di tempo di quest'ultima.

La funzione $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, di cui si parla in modo così

---

[19] Zs. f. Phys. **43**, 499, 1927.

[20] *Vedi sotto la formula (9).*

celebrativo, non è quindi derivata dal postulato della luce, ma evidentemente dalle ricerche teoriche sugli elettroni in moto, quando ancora non si era pensato di toccare il concetto di tempo e per esempio non si vedeva in un "tempo locale" nient'altro che una funzione ausiliaria. Da lì[21] viene la formula

$$(1-v^2/c^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = - \rho$$

per il campo dell'elettrone in moto, mentre per quello in quiete vale $\Delta\varphi = - \rho$.

Qui si ha a che fare con la sola contrazione di Lorentz, contro la quale il galileiano non ha niente da obbiettare, senza la dilatazione del tempo di Einstein. Anche se egli non ritiene ancora incondizionatamente decisivo il nuovo esperimento di Courvoisier, poiché è di natura assai delicata. Forse si conferma l'ipotesi (vedi Ann. d. Phys. **83**, 249, 1927) che la carica dell'elettrone venga per così dire polarizzata dal suo moto, cosicché la sua forza coulombiana, data ortogonalmente alla direzione del moto da $e(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, sarebbe proporzionale al diametro dell'elettrone nella direzione del moto. Questa ipotesi non è inverosimile, se ci si raffigura l'elettrone come un complesso di un numero estremamente grande di particelle d'etere assai piccole, che nello stato di quiete dell'elettrone come un tutto ruotano assai velocemente in piani con "tutte le inclinazioni possibili", se si assume inoltre che per la traslazione dell'elettrone quei piani orbitali si addensino in prossimità d'un piano perpendicolare alla direzione di traslazione.

§ 5. La trasformazione di Lorentz relativistica

$$\frac{1}{\alpha}\, dx' = dx + vdt \ , \quad \frac{1}{\alpha}\, dt' = dt + (v/c^2)dx \ , \qquad (9)$$

con, come già osservato, un α a rigore del tutto arbitrario, sarà ancora simmetrica se si esprimerà la velocità relativa v in unità della velocità della luce, $u = v/c$. Con ciò la (7) sarà

---

[21] *Vedasi per esempio* Enc. Math. Wiss. V, **2**, 173, 174; φ *potenziale,* ρ *densità spaziale elettrica,* Δ *operatore di Laplace.*

$$\xi' = \frac{\xi + u}{1 + \xi u} \ . \qquad (10)$$

Questa non è altro che il teorema di Einstein di addizione delle velocità, che il galileiano non può accettare, poiché egli nella (7) ammette solo $\varepsilon = 0$ e considera il postulato dell'assolutezza della velocità della luce come conseguenza di un "esperimento sporco". Del resto la ε relativistica con le unità chilometro e secondo è nel sistema solare dell'ordine $3 \cdot 10^{-10}$. Ne risulta che la (9) non è verificabile[22] nel sistema solare.

In contrasto col relativista il galileiano è dell'idea che il concetto di simultaneità sia qualcosa di assoluto. L'eclissi di una luna di Giove è infatti di per sè un processo effettivamente simultaneo per l'intero universo. Il fatto che da diversi pianeti sia osservato a tempi diversi non influenza in alcun modo l'unicità dell'istante temporale determinato dall'eclissi. Se si conosce la velocità della luce e il moto relativo di due pianeti, l'osservatore su di uno come quello sull'altro può calcolare l'istante vero dell'eclissi in modo del tutto univoco. Infatti altrimenti il calcolo degli "errori sistematici di osservazione", che noi chiamiamo aberrazioni planetarie, non sarebbe proprio possibile. Il notorio uomo[23] sul treno, che dubita della "simultaneità", se la cava ancor più facilmente. L'"aberrazione planetaria" che per lui interviene si può determinare con una costruzione da scuola elementare. Che per esempio l'eclissi esattamente centrale della luna I di Giove, che dista dal centro di Giove circa $4{,}2 \cdot 10^5$ km, avvenga solo circa 1,4 sec più tardi di quando i centri del sole, di Giove e del satellite sono in linea retta, non cambia proprio niente. Analogamente gli istanti di osservazione della centralità di un'eclissi lunare per i centri della terra e della luna sono diversi di un tempo-luce uguale a

---

[22] *La questione se in generale ha validità scientifica il proporre "leggi di natura" i cui effetti stiano al di sotto dei limiti dei probabili errori di osservazione qui non sarà esaminata più davvicino.*

[23] *Vedasi* A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Rel.-Theorie, 1917, p. 17.

1,282 sec, per le superficî della terra e della luna di 1,255 sec, e quindi non sono identici con l'istante della centralità effettiva; ma quest'ultimo si può calcolare senza storie[24] e quindi si può definire la simultaneità con ogni precisione.

Si ha inoltre che l'origine dei tempi dell'astronomo di un altro corpo celeste può essere per noi del tutto ugualmente valida, poiché anche noi possiamo fissare quest'origine in modo del tutto a piacere. La pretesa del relativista, che la simultaneità sia non determinabile, ha proprio evidentemente solo lo scopo di una suggestione per far apparire credibile la relatività dello scorrere del tempo, cioè del concetto di tempo, di modo che al disattento per lo più sfugga una *quaternio terminorum* tra scorrere del tempo e origine del tempo.

§ 6. All'introduzione del postulato di ortogonalità, superflua dal punto di vista del postulato dell'assolutezza del moto della luce (quindi della t. d. r. sp.), ha forse contribuito anche l'analogia con la necessità di questo postulato per le trasformazioni delle coordinate cartesiane in R_2 ed R_3, ovvero, il ché è parecchio la stessa cosa, la concretizzazione, compiuta così correntemente dalla tecnica, del tempo come una "coordinata temporale" perpendicolare ad una coordinata di lunghezza. Per facilitare l'intuizione viene soppressa[25] la coordinata z e si dispone l'asse dei tempi come asse l

$$l = i \cdot K \cdot t \,, \quad \tau = K \cdot t \,, \quad i = (-1)^{1/2} \qquad (11)$$

perpendicolare al piano xy. Si pensi l'asse y perpendicolare al piano del foglio, allora si può disegnare un diagramma con l'asse l come asse delle ascisse e l'asse x come asse delle ordinate. La misura delle unità di lunghezza per tempo e lunghezze nel diagramma sta all'arbitrio del disegnatore, e trasformazioni di similitudine tra l'asse x e l'asse l sono evidentemente ammesse

---

[24] *Anche qualora si dovessero formulare determinate ipotesi, se e in che misura una sorgente di luce in moto possa trasmettere o no la sua traslazione al moto della luce.*

[25] *Così anche* H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 1923, p. 142.

senza restrizioni, nel diagramma come nel calcolo. Tra le coordinate spaziali naturalmente no, perché altrimenti queste o sarebbero coordinate affini, oppure lo spazio stesso sarebbe "postulato" come non euclideo.

Nel diagramma al punto che nella realtà si muove uniformemente corrisponde una retta, che con opportuna scelta dell'origine *O* delle coordinate passa da questa e fa con l'asse *l* l'angolo η. La tangente di questo rappresenta la velocità del corpo; la sua lunghezza però dipende dalle unità (moduli) del diagramma, quindi dall'arbitrio del disegnatore. Il relativista attribuisce a questo diagramma - completato mentalmente con le coordinate *y* e *z* - una realtà certa. Inoltre egli chiamerà questo per esteso "universo spaziotemporale", e "linea d'universo" la curva (nel caso particolare di velocità costante una retta) del punto in moto , che in verità non è altro che una "linea del diagramma"[26]. Anche il quanto di luce ha naturalmente la sua "linea d'universo" nel diagramma di *l* ed *x*. [Nel diagramma tetradimensionale di (*lxyz*) non è evidentemente una linea, ma uno spazio R_3, che corrisponde all'onda sferica.] Il corrispondente angolo η è tuttavia molto più grande di quelli delle tangenti delle "linee d'universo" di corpi materiali che mai si realizzino in pratica. Se si scelgono per esempio i moduli del diagramma in modo che per la luce è $\eta = 45^o$, allora η per una velocità di 30 km/sec sarà solo circa 20 secondi d'arco, cioè uguale alla *costante d'aberrazione*. Ma se si sceglie per 30 km/sec η uguale a 1^o, per la luce sarà $\eta = 89^o 40' 52''$. Da qui risalta con tutta evidenza che una medesima inclinazione rispetto agli assi nel diagramma (*lx*) a

---

[26]*Altrettanto poco sono "linee d'universo" le "linee ferroviarie" dell'orario ferroviario grafico. - Talvolta il relativista crede anche che il suo R_4 (il suo universo spaziotemporale) si possa proiettare nello spazio ordinario (l'R_3), o che lo si possa tagliare con esso, o rappresentare in esso. Ma di fatto al contrario l'R_3 reale assieme al tempo viene composto in un R_4, che però a rigore non è un vero R_4, poiché proprio la coordinata temporale non può mai essere completamente equivalente ad una qualsivoglia coordinata spaziale.*

seconda della scelta delle unità di lunghezza del disegno deve avere per la realtà della natura un significato del tutto diverso. Trasformazioni ortogonali arbitrarie, che sono senz'altro permesse rispetto agli assi *xyz*, nel diagramma (*lx*) e quindi nei sistemi (*lxy*) e (*lxyz*) assolutamente non sono senz'altro permesse, e ancor meno si può sostenere che esse sarebbero sorgente di una nuova conoscenza della natura.

§ 7. Per decidere la questione, se sia consentito o no il "trasformare assieme" la coordinata temporale, basta riflettere su che cosa significhi fisicamente una trasformazione ortogonale di l ed x da soli. Essa si scrive come una rotazione di un angolo φ analoga alla (5)

$$dx' = \cos\varphi \cdot dx - \sin\varphi \cdot dl \ , \quad dl' = \sin\varphi \cdot dx + \cos\varphi \cdot dl \ . \tag{12}$$

Evidentemente questa rotazione che avviene nel diagramma non significa nel mondo reale nient'altro che il sistema d'assi *xyz* in R_3 vien mosso in un $x'y'z'$ omotetico con velocità uniforme. L'angolo φ (arbitrario) corrisponde alla velocità relativa data v dei due sistemi d'assi, senza naturalmente esserle proporzionale. Poiché l è immaginario puro, i secondi membri della (12) sono complessi. Per farli reali aiuta la sostituzione $\varphi = iw$. Con la (11), nella quale K è una costante arbitraria, segue dalla (12) con le note formule ($\sin iw = i\mathfrak{Sin}w$, $\cos iw = \mathfrak{Cos}w$):

$$dx' = \mathfrak{Cos}w \cdot dx + \mathfrak{Sin}w \cdot d\tau \ , \quad d\tau' = \mathfrak{Sin}w \cdot dx + \mathfrak{Cos}w \cdot d\tau \ . \tag{13}$$

Poiché $\mathfrak{Tg}w = v/K$ e dal passaggio dai differenziali alle variabili stesse segue

$$x'(1-v^2/K^2)^{1/2} = x + vt \ , \quad t'(1-v^2/K^2)^{1/2} = t + (v/K^2)x \ . \tag{14}$$

Questo è il significato della rotazione nel diagramma dell'angolo arbitrario

$$\varphi = i\mathfrak{ArTg}(v/K) \ ,$$

dove v è la data velocità relativa dei due sistemi d'assi, K una costante arbitraria. Poiché per $K = c$ la trasformazione (14) diventa la trasformazione di Lorentz, il relativista può scorgere in essa una conferma del suo postulato di assolutezza della luce. Il galileiano nega ciò, poiché solo proprio alla fine c interviene arbitrariamente al posto del K completamente arbitrario. Egli ricusa quindi le rotazioni del diagramma (lx), cioè le trasformazioni ortogonali tra la coordinata temporale da un lato ed una o tutte le coordinate spaziali dall'altro, quindi le rotazioni d'assi generali ovvero le trasformazioni ortogonali nell'R_4 relativistico, che si fonda proprio su assi eterogenei. Sulla stessa base va rifiutata l'introduzione nella fisica di un operatore di Laplace generalizzato

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2}$$

(naturalmente non nella geometria dell'R_4 di per sè).

§ 8. Se si esegue la trasformazione (13) prima per

$$w_1 = \mathfrak{ArcTg}(v_1/K) \ ,$$

poi per

$$w_2 = \mathfrak{ArcTg}(v_2/K) \ ,$$

cioè se nel diagramma degli (lx) si ruota in successione di w_1 e poi di w_2, il risultato è evidentemente lo stesso che se si fosse eseguita immediatamente la rotazione di $w_1 + w_2$[27]. Da qui segue di nuovo immediatamente il teorema relativistico di *addizione delle velocità*. Però in verità non si addizionano velocità, ma soltanto le arcotangenti iperboliche di v_1/K e di v_2/K. Perché è noto che

$$\mathfrak{ArcTg}x + \mathfrak{ArcTg}y = \mathfrak{ArcTg}\,\frac{x + y}{1 + xy} \ . \tag{15}$$

Poiché ora la tangente iperbolica non può mai essere > 1, perché infatti l'iperbole equilatera ha due asintoti tra loro perpendicolari ($\mathfrak{Tg}(\infty) = 1$), nel diagramma non si può costruire nessuna velocità maggiore di $v/K = 1$. Il galileiano vede in ciò un difetto del diagramma. Ma il relativista, che crede nella realtà del diagramma e pone la velocità $K = c$, ne desume la legge di natura, che la velocità limite assoluta dell'universo dovrebbe essere proprio la velocità della luce.

---

[27] *Si può esprimere ciò anche rilevando come la trasformazione (13) abbia "proprietà di gruppo".*

§ 9. Ma proprio nulla impedisce di per sè, in contrasto con la t. d. r. sp., di immaginarsi l'asse dei tempi nel diagramma delle coordinate tempo ed x come reale, cioè $\tau = K \cdot t$. Allora la trasformazione ortogonale si scrive

$$dx' = dx \cdot \cos\varphi - d\tau \cdot \sin\varphi \quad , \quad d\tau' = dx \cdot \sin\varphi + d\tau \cdot \cos\varphi \ . \qquad (16)$$

Con $\mathrm{tg}\varphi = v$[28]$/K$ e passaggio dai differenziali alle variabili stesse risulta la trasformazione che corrisponde alla formula (14)

$$x'(1+v^2/K^2)^{1/2} = x - vt \ , \quad t'(1+v^2/K^2)^{1/2} = t + (v/K^2)x \ , \qquad (17)$$

e con $K = c$ risulta una trasformazione del tutto equivalente alla trasformazione di Lorentz, che parimenti soddisfa il postulato di assolutezza della velocità della luce. Il teorema di addizione di *questo* universo, un secondo universo della "geometria della luce", è tuttavia identico al teorema di addizione della funzione circolare arcotangente

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}\,\frac{x + y}{1 - xy} \ . \qquad (18)$$

Nella cinematica di quest'altro universo la somma delle "velocità" non è minore, bensì maggiore della loro somma algebrica. In un caso non si sommano due v ma due integrali della forma

$$\int \frac{dv}{c^2 - v^2} \ ,$$

nell'altro

$$\int \frac{dv}{c^2 + v^2} \ .$$

In questo secondo universo non si ha una velocità limite dell'universo. Ma per questo una somma finita di velocità finite può diventare infinita, cioè quando la somma degli angoli raggiunge il valore di $\pi/2$, e in particolare ciò dipende interamente dalla scelta dei moduli, quindi dall'arbitrio del disegnatore. Infatti

$$\mathrm{tg}(\pi/2) = \infty \ .$$

---

[28] *Non c'è alcun bisogno di trattare questa velocità come immaginaria.*

Quanto minore è v/c (nel sistema solare è notoriamente dell'ordine di 10^{-4}), tanto più s'annulla la diversità tra loro dei due universi relativistici della velocità assoluta, come rispetto all'universo del galileiano, che ritiene il "trasformare assieme" la coordinata temporale un'operazione solo matematicamente, ma non anche fisicamente lecita.

§ 10. Naturalmente, scegliendo l'altro modo di esprimersi (invece della rotazione), $x^2 + l^2$ con

$$l = i \cdot c \cdot t \tag{19}$$

è in ogni caso un invariante rispetto a trasformazioni ortogonali; allora, poiché è uguale a $x^2 - c^2 \cdot t^2$, è uguale a zero e rappresenta così la velocità della luce. Con ogni valore di φ della trasformazione

$$x' = x \cdot \cos\varphi - l \cdot \sin\varphi \ , \quad l' = x \cdot \sin\varphi + l \cdot \cos\varphi \ ,$$

per quanto nella realtà si trasformi ad assi che si muovono con velocità diversa (però uniforme), risulta evidentemente sempre $x'^2 + l'^2 = 0$. Solo che per ogni diverso valore di φ anche il concetto di tempo sarà diverso. Il galileiano è uno scettico e non crede che il t' ottenuto in questo modo e con $l' = i \cdot c \cdot t'$ rappresenti "il tempo". Allo stesso modo come egli pone in dubbio che una e una sola onda sferica della luce, rispetto ad un atomo che decade "a riposo" (cioè in moto nel sistema solare al massimo con 0,0001 velocità della luce), e rispetto ad un elettrone scagliato da questo atomo verso la sorgente di luce per esempio con 0,9 velocità della luce possa avere "la stessa" velocità di propagazione. Cosa che altresì si sottrae alla verifica sperimentale, perché dall'elettrone in moto veloce non può esser trasportato nessun osservatore con regolo e orologio. Inoltre in tutta la faccenda non c'entrano regoli e orologi, ma soltanto la definizione che l'osservatore dà del concetto di tempo. Per un osservatore pensato su un quanto di luce, se è un relativista, il concetto di tempo non è più neppure definibile.

Il galileiano ritiene che il postulato dell'assolutezza sia il $\pi\rho\omega\tau o\nu\ \psi\epsilon\upsilon\delta o\sigma$ della t. d. r.. Da esso e dalla fede nella realtà dell'universo di Minkowski, che di fatto è solo un diagramma, una "metafora", è sorta l'idea che lo spazio e il tempo si potrebbero trasformare tra loro.

§ 11. Mentre la t. d. r. sp. ha così radicalizzato il concetto di tempo in modo radicale fin quasi al solipsismo, col quale non si può aver più fisica, ma ancor soltanto per così dire una "parafisica", la t. d. r. g. ha tacitamente ripiegato su una definizione di tempo completamente diversa, più netta, anche se nient'affatto del tutto oggettiva. Il concetto di tempo della t. d. r. g. è difficile da rappresentare in formule in tutta chiarezza, poiché si fonda sulla postulata invarianza di espressioni più o meno complicate. Però con approssimazione assai grossolana si può spiegare così:

Nella t. d. r. g. il relativista parte dall'idea che una forma differenziale quadratica del tipo

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2 \quad (\text{con } l = i \cdot c \cdot t) \qquad (20)$$

debba essere un invariante rispetto a tutte le possibili rotazioni d'assi nel corrispondente R_4. Egli si è abituato, rinunciando ad una dimostrazione fisica, a considerare questo postulato come qualcosa di analogo all'assioma delle parallele. Il galileiano non contesterà mai l'invarianza della (2) nel caso particolare $d\sigma = 0$, quando cioè la (20) rappresenta il moto della luce. Ma le cose vanno altrimenti quando $d\sigma$ è diverso da zero. Che cosa allora questo $d\sigma$ rappresenti fisicamente non lo si sa proprio dire, quindi per il galileiano non è neppure da porre in discussione. Dal suo punto di vista dev'essere sempre

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (ds \text{ tridimensionale}), \qquad (21)$$

poiché egli ritiene lo spazio tridimensionale ed euclideo[29] per antonomasia, a meno che gli si dimostri il contrario. $ds/dt = v$ è allora la velocità di un corpo che si muove sulla sua orbita lungo la curva

---

[29]*É fuorviante che le esposizioni divulgative della t. d. r. g. cerchino talvolta di far credere che la teoria della gravitazione di Einstein abbia qualcosa a che fare con la geometria di Riemann o con quella di Lobatschewski.*

$$f(x,y,z) = 0 \,. \tag{22}$$

Il relativista impugna altresì la validità della (21), poiché egli negli sviluppi successivi si è visto indotto a credere che il suo R_3 "immerso" in R_4 non sia più euclideo, ossia che le sue coordinate originariamente pensate come cartesiane debbano sparire, perché ciò avvenga. Infatti in un campo gravitazionale la sua forma differenziale è in luogo della (20) il noto "tensore fondamentale"

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k \qquad (i,k = 1,2,3,4) \,, \tag{23}$$

dove x_4 è la coordinata temporale o a rigore sempre solo

$$d\sigma^2 = g_{44} \cdot dx_4^2 + \sum_{ik} g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k \qquad (i,k = 1,2,3) \,. \tag{23a}$$

Il determinante D_4 della matrice simmetrica con 4^2 termini dei g_{ik} è quindi uguale a $g_{44} \cdot D_3$, dove D_3 è il determinante della matrice con 3^2 termini dei g_{ik} che è in relazione con i differenziali delle sole coordinate spaziali. Se tenendo conto dell'ortogonalità il relativista richiede $D_4 = 1$, e se inoltre è $g_{44} \neq 1$, poiché nel frattempo s'è introdotta come differenza di g_{44} dall'unità[30] l'espressione della legge di Newton (del suo potenziale)[31], deve valere necessariamente la condizione

$$D_3 = 1/g_{44} \neq 1 \,.$$

Così e solo per questo lo spazio tridimensionale immerso perde il suo carattere euclideo, e precisamente a seguito dell'applicazione della teoria degli invarianti relativamente alle trasformazioni ortogonali.

Per quanto riguarda la definizione del concetto di tempo, la situazione si può già abbastanza vedere dalla (20). Il galileiano è convinto che per il suo spazio euclideo l'elemento di linea *ds* nella (21) è invariante rispetto a tutte le possibili trasformazioni ortogonali, cioè alle possibili rotazioni d'assi. Se quindi il relativista postula l'analoga invarianza di $d\sigma \neq 0$ in

---

[30] *A questo proposito la scelta del segno non conta.*

[31] *Vedasi* ZS. f. Phys. **44**, 127, 1927.

una forma differenziale quadratica di 4 variabili, ne consegue, poiché nello spazio relativistico l'asse dei tempi va proprio pensato perpendicolare a tutti e tre gli assi spaziali, che si deve richiedere l'invarianza di

$$d\sigma^2 = ds^2 + dl^2 \tag{24}$$

rispetto a tutte le rotazioni possibili del diagramma, la cui ascissa è $l = i\cdot c\cdot t$, e la cui ordinata è l'arco s della curva (22) raddrizzato sulla retta. Quindi relativamente alla rotazione

$$s' = s\cdot\cos\varphi - l\cdot\sin\varphi\ , \quad l' = s\cdot\sin\varphi + l\cdot\cos\varphi\ , \tag{25}$$

con valori del tutto arbitrari di φ. Analogamente a prima nel § 7 con $i\varphi = w$ ed $l = i\tau$ la (25) diventa:

$$s' = s\cdot\mathfrak{Cos}\,w + \tau\cdot\mathfrak{Sin}\,w\ , \quad \tau' = s\cdot\mathfrak{Sin}\,w + \tau\cdot\mathfrak{Cos}\,w\ , \tag{26}$$

dove w può avere tutti i valori tra $-\pi/4$ e $\pi/4$ e dove

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{c\cdot dt}$$

è la velocità v del corpo nel suo cammino divisa per c. Nel caso particolare chiaro, che si tratti per esempio di un pianeta senza massa che descrive un'orbita circolare di raggio a attorno al sole, si ha

$$v_0 = ds/dt = k/(a)^{1/2}$$

(k costante di Gauss), quindi

$$\frac{ds}{d\tau} = v_0/c = k/[c(a)^{1/2}]\ ,$$

parimenti una costante. Si osservi per inciso che con v_0 ovvero v, tramite la costante di Gauss k, che tacitamente contiene la massa del sole, penetrano di soppiatto nel concetto di tempo la massa del centro gravitazionale e la sua eventuale carica. Se si tien conto dell'eccentricità dell'orbita planetaria anche questa quantità evidentemente solo casuale si infiltrerà nel concetto di tempo.

Dalla (26) discende

$$\frac{v_*}{c} = \frac{(v_0/c)\mathfrak{Cos}\,w + \mathfrak{Sin}\,w}{(v_0/c)\mathfrak{Sin}\,w + \mathfrak{Cos}\,w}\ . \tag{27}$$

Poiché ora evidentemente v_* deve rappresentare la velocità del pianeta nel sistema di coordinate trasformato, le formule (25), (26) e (27) provocano un cambiamento del concetto di tempo, che sarà quindi una funzione dell'angolo φ ovvero di w da scegliersi a piacere, che quindi dipende dall'arbitrio dello sperimentatore concettuale. Il cambiamento del concetto di tempo sarà tanto più forte quanto più grande si supporrà quest'angolo. Il galileiano ritiene questa situazione insopportabile. Egli rifiuta il postulato dell'invarianza della (24) e quindi il postulato generale dell'invarianza dell'elemento di linea tetradimensionale $d\sigma$. Per suo convincimento fisico vede in questo postulato un'applicazione a sproposito della teoria degli invarianti.

Di conseguenza sono quindi per lui completamente prive di scopo le operazioni differenziali certo matematicamente corrette - cioè i tensori della teoria della gravitazione di Einstein - intricate, che con la loro complicazione rendono più gravosa l'intuizione della situazione fisica, e che sono introdotte col tensore fondamentale.

§ 12. Il relativista, che involontariamente percepisce che una variabile temporale trasformata assieme alle altre perde completamente la sua capacità di rappresentare il concetto di tempo, perviene a considerare il suo preteso invariante $d\sigma$ come rappresentante del "vero" concetto di tempo ("tempo proprio"). Per mezzo del diagramma (s,l) e con le formule elementari della geometria differenziale egli può definire[32]:

$$d\sigma = \frac{dl}{\cos\varphi} \quad , \qquad \frac{ds}{dl} = \operatorname{tg}\varphi \ , \tag{28}$$

e per una certa analogia con il caso (peraltro di tutt'altra natura) della formula (14) del § 7 con $K = c$ (scelta arbitraria, niente affatto necessaria) porre:

$$\operatorname{tg}\varphi = i\cdot(v/c) \ .$$

Allora il rappresentante del tempo $d\sigma$ sarà uguale a

---

[32] *Una spiegazione di che cosa $d\sigma$ rappresenti fisicamente è evidente che non la si dà, poiché non si può proprio dire che cosa l'arco tetradimensionale σ potrebbe in verità rappresentare, salvo una linea ausiliaria in un diagramma.*

$$dl(1 - v^2/c^2)^{1/2} = i\cdot cdt(1 - v^2/c^2)^{1/2} .$$

Il relativista ottiene così una relazione del tipo (2) del § 2. E quando in seguito a ciò nell’integrale dell’energia del moto ellittico [una relazione del tipo della formula (1) del § 2, identica alla legge di Newton], cioè:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) ,$$

(k costante di Gauss, r raggio vettore, a semiasse dell’orbita) al posto di dt^2 si sostituisce l’espressione

$$(1 - v^2/c^2)\cdot dt^2 ,$$

un conto bastantemente noto dà che, trascurando l’assai piccolo v^4/c^4, questa sostituzione è equivalente al fatto che al posto del potenziale newtoniano k^2/r compaia l’espressione

$$\frac{k^2}{r} \left(1 + \frac{2k^2}{c^2 r} \right) .$$

Questo avrebbe[33] per conseguenza per il pianeta Mercurio una perturbazione secolare del perielio di 28’’; accidentalemente lo stesso valore che Riemann e Gauss[34] trovarono in base a considerazioni del tutto diverse. Ma poiché il relativista deve tenere per lecite rotazioni ortogonali arbitrarie (non solo quelle col valore speciale arctg($i\cdot v/c$)), in quanto egli si ricorda della proprietà gruppale della trasformazione (27) del § 8 (altrimenti perderebbe ogni significato serio addirittura il programma delle "equazioni generalmente covarianti"), allora un multiplo arbitrario di φ, quindi $n\cdot\varphi$, ha gli stessi diritti del valore prima selezionato φ. Ma a questo $n\cdot\varphi$ corrisponde il potenziale

$$\frac{k^2}{r} \left(1 + \frac{2nk^2}{c^2 r} \right)$$

ed una perturbazione secolare del perielio di Mercurio di $n\cdot 28$ secondi d’arco.

Nella t. d. r. g. succede ancora che nel tensore fondamentale

---

[33]*Vedasi* Ann. d. Phys. **72**, 231, 1923.

[34]*Vedasi per esempio* F. Tisserand, Mécanique Céleste IV, 507, 1896.

i quadrati dei differenziali, anche delle coordinate spaziali, presentino dei coefficienti che sono diversi dall'unità e inoltre ancora funzioni delle coordinate spaziali stesse. È noto che l'elemento di linea di Einstein pone

$$g_{11}= - \left(1 + \frac{2k^2x^2}{c^2r^3} \right) , \quad g_{22}= - \left(1 + \frac{2k^2y^2}{c^2r^3} \right) , \text{ ecc.},$$

cosa che discende esclusivamente dalla relazione precedente $D_4 = g_{44} D_3$. Di trasformazioni lineari quindi a rigore non si può proprio più parlare. In sostanza tali ipotesi fan sì che al posto del raggio vettore r subentri nelle formule classiche un'espressione del tipo

$$r\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\cdot\frac{n_i}{r} \right)$$

(n_i numero intero), una trasformazione che il galileiano ovviamente ritiene impossibile. Ho già dimostrato in precedenza[35] che una siffatta deformazione dello spazio da sola con $n_i = 1$ dovrebbe avere per conseguenza nel caso di Mercurio una perturbazione secolare del perielio di 14 secondi d'arco. Poiché il concetto di tempo resta intoccato da queste curvature dello spazio, che inoltre con la cosidetta geometria assoluta non hanno niente a che fare, su questo qui non insisterò oltre.

Riassumendo la t. d. r. g. viene respinta dal galileiano come una conseguenza di trasformazioni fisicamente infondate e come un'applicazione a sproposito della teoria degli invarianti. A sproposito da un lato perché da essa lo spazio viene distorto in uno non euclideo senza dimostrazione fisica, solo con operazioni matematiche formali. Dall'altro lato in particolare perché essa trasforma tra loro categorie eterogenee come spazio e tempo, di modo che il concetto di tempo, che nella t. d. r. sp. nell'anno 1905 era stato annunciato funzione del moto rettilineo relativo, oramai dal 1913 è stato ridotto ad una funzione della massa del centro gravitazionale di volta in volta considerato, e della distanza del punto in moto da questo centro.

Ludwigsburg, 20 dicembre 1927.

---

[35]Astr. Nachr. **220**, 365, 1924.