I fondamenti geometrici del gruppo di Lorentz[1]

F. Klein

Siete tutti più o meno a conoscenza del fatto che la teoria del gruppo di Lorentz o, ciò che è lo stesso, il moderno principio di relatività dei fisici, trova sistemazione nella teoria generale della misura proiettiva, come è stata sviluppata in connessione con il fondamentale lavoro di Cayley del 1859. Si era parlato con il mio defunto amico Minkowski di un accordo, che io nel trascorso semestre invernale sviluppassi questo argomento più estesamente nelle mie lezioni sulla geometria proiettiva, ovvero che lo esponessi come risultato conclusivo delle mie lezioni. Lo studio della misura proiettiva, che già per tanti aspetti è divenuto fondamentale, riceve qui un'applicazione nuova e sorprendente, perché i moderni sviluppi dei fisici, che al novellino fanno così facilmente l'impressione di paradossi, risultano per così dire come corollari di una linea di pensiero generale già da lungo tempo ben stabilita. È impossibile non avvertire che questo incontro di due ambiti di pensiero totalmente separati nella loro origine storica debba essere esaltante in massimo grado su entrambi i fronti; io tanto più spero un qualche interesse in proposito anche da parte dei fisici, poiché i geometri hanno già varie volte ottenuto dei risultati che si sono rivelati poi degli strumenti benvenuti nel laboratorio della fisica teorica.

Quando io ora mi accingo ad esporvi in dettaglio nelle sue linee essenziali quanto detto, incontro una grossa difficoltà: sono costretto a dare per scontati il *concetto di gruppo* e certe strutture concettuali fondamentali della geometria proiettiva, come le *coordinate omogenee del punto e del piano*, le *collineazioni* corrispondenti alle sostituzioni lineari di queste coordinate, infine per ogni gruppo costruito con le collineazioni una corrispondente *teoria degli invarianti*, tutto ciò beninteso per spazî con un numero arbitrario di dimensioni, mentre tuttavia so bene che non solo i numerosi fisici presenti, che io considero

---

[1]Physik. Zeitschr. **12**, 17 (1911).

qui come ospiti assai benvenuti, ma anche la maggior parte dei matematici di professione più giovani, che appartengono alla nostra società, si sono occupati di queste cose per così dire solo "par distance". Molti di loro sono stati finora senza dubbio dell’idea che la geometria proiettiva, sebbene sia stata un tempo sul fronte avanzato della produzione matematica, oggi però possa avere ancor solo il significato di una disciplina matematica specialistica. Perciò è assai utile che la mia conferenza di oggi dia espressione all’idea opposta, che cioè la geometria proiettiva nell’ambito della struttura matematica complessiva alla quale noi tutti aspiriamo debba considerarsi di pari valore rispetto alle altre discipline fondamentali, come l’algebra o la teoria delle funzioni. Ma questo impulso ideale non può tuttavia eliminare la difficoltà che risulta da un’effettiva mancanza di una preparazione sufficiente. Mi attacco quindi al metodo che in tali circostanze più promette un successo, *vi propongo le cose secondo il loro sviluppo storico*, e vi devo pregare di accogliere il calore con cui parlerò del pensiero proiettivo come un surrogato della mancanza di precisione nei dettagli.

Comincerò, come detto, presentandovi il lavoro originale di Cayley del 1859, il sesto di una serie di dissertazioni, nelle quali Cayley ha allora raccolto le sue idee e conoscenze nel campo della teoria degli invarianti per sostituzioni lineari (A sixth memoir upon Quantics, Vol. 149 di Philosoph. Transactions R. Society, - Vol. II delle Opere, p. 561 segg.). Sfogliando non avrete immediatamente nessuna particolare impressione, poiché prima di tutto vengono sviluppati dettagli sulle forme quadratiche; ma è tuttavia facile estrarre l’impostazione della questione e la sua splendida risposta. Lo sviluppo della geometria nella prima metà del secolo scorso aveva portato a dividere lo studio dello spazio in due campi distinti: la geometria della posizione (geometria descrittiva) che si occupa delle proprietà delle figure che rimangono invariate per proiezioni arbitrarie, e la geometria della misura, i cui concetti fondamentali (distanza, angolo, ecc.) non possiedono affatto quest’invarianza. Questa divisione si sarebbe fissata nella mente dei matematici del tempo, malgrado che Poncelet già avesse fatto l’osservazione decisiva che, in una visione generale, il cerchio nel piano e la sfera nello spazio - quindi gli oggetti fondamentali della trattazione metrica - potevano essere considerati come sezioni coniche, ossia superfici di secondo grado, che con l'infinito del piano, ovvero dello spazio hanno in comune una certa forma immaginaria, determinata da un'equazione di secondo grado, - i cosidetti punti ciclici del piano, ovvero il cerchio sferico dello spazio. Ora il merito di Cayley è d'aver riconosciuto che in quelle asserzioni di Poncelet si trova il mezzo di far regredire la suddetta divisione della geometria in due discipline mutuamente estranee, o meglio di sostituirla con una concezione fondamentalmente diversa. Il suo risultato è - come tutte le idee fondamentali della scienza matematica - estremamente semplice: tutte le relazioni metriche delle figure geometriche si possono senz'altro considerare come relazioni proiettive, purché si aggiungano alle figure - che siano piane o spaziali - i punti ciclici ovvero il cerchio sferico: la geometria metrica appare quindi come quella parte della geometria proiettiva che tratta di figure che hanno in comune la coppia di punti ciclici ovvero il cerchio sferico.

Queste affermazioni risulteranno molto più chiare quando avrò scritto alcune formule semplicissime.

Prima solo nel piano. Siano x, y le consuete coordinate ortogonali del punto. Poniamo, passando a coordinate omogenee,

$$x=x_1/x_3, \qquad y=x_2/x_3;$$

chiamiamo inoltre u_1,u_2,u_3 le coordinate omogenee della linea retta rappresentata dall'equazione $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$. La coppia di punti ciclici è allora data in coordinate del punto dalla giustapposizione delle due equazioni

$$x_3=0, \quad x_1^2+x_2^2=0, \tag{1}$$

e in coordinate di linea come inviluppo di tutte le rette che soddisfano la singola equazione

$$u_1^2+u_2^2=0. \tag{2}$$

Si consideri ora, per restare nel semplicissimo, la formula per la distanza di due punti

$$r=[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]^{1/2}.$$

Scriviamo, passando a coordinate omogenee:

$$x=x_1/x_3,\quad y=x_2/x_3,\quad \bar{x}=y_1/y_3,\quad \bar{y}=y_2/y_3,$$

e otteniamo

$$r=[(x_1y_3-y_1x_3)^2+(x_2y_3-y_2x_3)^2]^{1/2}/(x_3y_3)\ . \tag{3}$$

Il numeratore si annulla quando i due punti dati sono allineati con uno dei punti ciclici, il denominatore quando uno dei punti dati giace sulla congiungente dei due punti ciclici. Entrambe sono proprietà proiettive della figura complessiva costituita dai due punti dati e dai punti ciclici! Ma algebricamente da qui segue (mi è impossibile esporre più in dettaglio) che l'espressione di r cambia solo di un fattore costante quando sottoponiamo simultaneamente i nostri quattro punti ad una collineazione arbitraria. Pertanto chiamiamo r un *invariante* dei nostri quattro punti rispetto alla totalità delle collineazioni, ovvero anche un "invariante simultaneo" dei due punti ora dati e delle forme algebriche che stanno a primo membro nelle (1) e (2). Il contenuto della geometria proiettiva del piano, parlando algebricamente, non è altro che lo studio degli invarianti che certe figure piane possiedono rispetto alla totalità delle collineazioni piane, in particolare anche delle relazioni che tali invarianti possono mostrare tra loro; si inquadrano quindi nella geometria proiettiva tutte le leggi che possono sussistere tra le distanze di certi punti del piano. -

Nello spazio la faccenda è solo più complicata per l'accresciuto numero di coordinate. Siano x,y,z le consuete coordinate rettangolari; passando a coordinate omogenee poniamo

$$x=x_1/x_4,\qquad y=x_2/x_4,\qquad z=x_3/x_4.$$

Il "cerchio sferico" è allora dato in coordinate del punto dalla coppia di equazioni

$$x_4=0,\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \tag{4}$$

nelle corrispondenti coordinate del piano (u_1,u_2,u_3,u_4) dalla sola equazione

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=0. \tag{5}$$

Si consideri di nuovo l'espressione per la distanza di due punti.

Se sostituiamo in quest'ultima le coordinate omogenee $x_1:x_2:x_3:x_4$ e $y_1:y_2:y_3:y_4$ otteniamo

$$r=[(x_1y_4-y_1x_4)^2+(x_2y_4-y_2x_4)^2+(x_3y_4-y_3x_4)^2]^{1/2}/(x_4y_4)\ . \qquad (6)$$

e a questa formula si associano considerazioni che sono del tutto analoghe a quelle associate alla (3). -

Gli accenni precedenti basteranno a rendere un po' comprensibile il significato del lavoro fondamentale di Cayley. Posso ora parlare un momento delle considerazioni che ho sviluppato nel mio programma inaugurale di Erlangen[2] del 1872. In Cayley si parla sempre solo degli invarianti rispetto alla totalità delle collineazioni della varietà di volta in volta considerata. In proposito sottolineai allora che si poteva anche parlare di invarianti rispetto ad un *sottogruppo* di collineazioni. Da qui risultò una nuova luce sull'essenza della geometria metrica e sulla concezione ad essa relativa di Cayley. È un'osservazione triviale che tutte le asserzioni della geometria metrica valgono indipendentemente dalla posizione e dalla grandezza assoluta delle figure, e proprio per questo possono essere distinte dalle asserzioni di contenuto individuale, come le si enuncia in topografia. Ciò si esprime alla maniera della matematica moderna se si introducono due *gruppi* di trasformazioni collineari strettamente imparentati tra loro: il gruppo dei *movimenti* e il gruppo delle *trasformazioni di similitudine* (il gruppo delle trasformazioni "congruenti" e il gruppo delle trasformazioni "equiformi" secondo la nomenclatura introdotta da Heffter e Koehler nel loro manuale[3]), e ora si dice: le proprietà metriche sono caratterizzate dal fatto che sono invarianti rispetto a questi gruppi. Abbiamo quindi: *La geometria metrica e la geometria proiettiva provengono entrambe dallo studio di una teoria degli invarianti, e la loro relazione reciproca consiste nel fatto che il gruppo della geometria metrica è un sottogruppo del gruppo*

"Considerazioni comparative sulle nuove ricerche geometriche" stampato nel volume 43 dei Mathematischen Annalen ed altrove.

[3]*Manuale di geometria analitica, Vol. I, Lipsia 1905.*

associato alla geometria proiettiva.

Un paio di formule semplici chiariranno questa situazione ed anche altre cose. Possiamo rimanere nel piano e per semplicità utilizzare le solite coordinate ortogonali x,y (non omogenee). Scriviamo allora

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}, \\ y' &= \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}, \end{aligned} \tag{7}$$

e consideriamo qui le $\alpha_{11}....\alpha_{23}$ come quantità variabili a piacere, sicché ci troviamo davanti al gruppo a sei parametri delle cosidette trasformazioni affini. Da esso risulta il gruppo a quattro parametri delle trasformazioni equiformi se si richiede che $dx'^2+dy'^2$ coincida a meno d'un fattore con dx^2+dy^2. Ciò accade se e solo se sono soddisfatte le due condizioni

$$\alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2=\alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2, \quad \alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}=0,$$

quando perciò la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

è, come si dice, ortogonale. Si ottiene invece il gruppo a tre parametri delle trasformazioni congruenti quando si assume inoltre che la matrice sia unimodulare, cioè se si pone il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

uguale ad 1. Risulterà allora

$$dx'^2+dy'^2=dx^2+dy^2.$$

Scriviamo infine la collineazione più generale nel piano

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}}{\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}}, \\ y' &= \frac{\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}}{\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Si riconosce facilmente che:

Il gruppo delle trasformazioni affini (7) consiste di quelle collineazioni che trasformano in sè una determinata linea retta, la retta all'infinito.

Il gruppo delle trasformazioni equiformi consiste invece delle collineazioni che lasciano invariata una certa coppia di punti che giacciono su questa retta, la coppia dei punti ciclici.

Dal punto di vista geometrico la definizione del gruppo delle trasformazioni congruenti non è affatto così semplice. Ci accontentiamo qui della caratterizzazione algebrica: sono le trasformazioni equiformi, il cui determinante su indicato è uguale ad 1. Le trasformazioni equiformi sono naturalmente eo ipso affini.

Dovrò io aggiungere che ora - come termine intermedio tra geometria proiettiva e geometria metrica - si può definire una geometria affine, che tratta tutte quelle proprietà delle figure piane che sono invarianti per il gruppo (7)? Avremmo allora tre geometrie da confrontare, delle quali le geometrie proiettiva e metrica sarebbero i casi estremi. Ne guadagnerebbe in tal modo la sistematica, ma l'esposizione sarebbe inutilmente allungata, poiché si dovrebbero in fondo dire più volte le stesse cose. Quindi in seguito si parlerà fondamentalmente solo delle geometrie proiettiva e metrica e alla geometria affine, che però comparirà particolarmente nella parte finale, si penserà solo occasionalmente. -

In questo senso distinguo solo tra la trattazione elementare (diretta) delle relazioni metriche e quella proiettiva iniziata da Cayley. E questa distinzione si formula così, (nel senso del programma di Erlangen):"La trattazione proiettiva (superiore) studia le relazioni invarianti che le figure proposte possiedono rispetto alla totalità delle collineazioni *in seguito all'introduzione dei punti ciclici*; la trattazione elementare le relazioni invarianti che le figure come tali possiedono rispetto al gruppo ristretto di quelle collineazioni (equiformi o congruenti) che trasportano in sè i punti ciclici".

Ora sono alla fine di questi preliminari generali e vi prego solo di tener presenti in particolare le seguenti idee: teoria degli invarianti è un concetto relativo; si può rispetto ad ogni gruppo di trasformazioni parlare di una corrispondente teoria degli invarianti. Quest'idea è così naturale che appare spontaneamente nei campi più diversi, e quindi anche in fisica teorica. La terminologia con la quale viene espressa è naturalmente assai diversa a seconda dei campi. Infatti il ricercatore di diverso tipo, e quindi anche il fisico, non ha nel suo lavoro il tempo e neppure l'occasione di verificare se certe leggi astratte di cui abbisogna non si trovino già pronte nel magazzino della matematica pura, egli procede invece - e ciò apporta una certa freschezza alla sua linea di pensiero - procurandosi da sè caso per caso gli strumenti matematici di cui ha bisogno. Il successivo intendersi con il matematico di professione, che mi sembra altresì una cosa importante, poiché egli precisa le idee e scopre ogni sorta di relazioni, richiede prima di tutto una traduzione delle espressioni usate qui e là nella lingua dell'altro. Pertanto anticipando enuncerò la regola:

"Ciò che i fisici moderni chiamano *teoria della relatività* è la teoria degli invarianti della varietà spazio-temporale tetradimensionale x,y,z,t (l'"universo" di Minkowski) rispetto ad un determinato gruppo di collineazioni, il "gruppo di Lorentz"; - ovvero più in generale, e girato nell'altro verso:

"Si può benissimo, se lo si ritiene importante, sostituire il nome "teoria degli invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni" con l'espressione teoria della relatività rispetto ad un gruppo".

Ho già osservato qualcosa rispetto alle ricerche di matematica pura che a suo tempo la dissertazione di Cayley ha unito. Questa è infatti la posizione storica di questo lavoro eccellente: non solo ha risposto in modo decisivo al vecchio problema della relazione tra geometria metrica e geometria proiettiva, ma ha portato in primo piano una nuova impostazione del problema, che sarebbe risultata ricca di conseguenze nelle direzioni più diverse. La geometria metrica risulta dalla proiettiva se si aggiungono i punti ciclici, dati dall'equazione $u_1^2+u_2^2=0$ (ovvero, nello spazio, il cerchio sferico, dato dall'equazione $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$. Che cosa accadrà se, più significativamente, si sceglierà, al posto di questa, una qualche equazione di secondo grado $\sum\sum a_{ik}u_i u_k=0$?

Restiamo nel piano, dove la nostra nuova equazione rappresenta una qualche curva di seconda classe. Per il geometra proiettivo queste curve si dividono in cinque tipi diversi, che io qui enumero, pensando di scegliere invece del sistema di coordinate parallele ortogonali usato fin qui, di volta in volta un opportuno sistema di coordinate triangolari (le cui "coordinate di linea" saranno parimenti chiamate $u_1:u_2:u_3$). La lista è la seguente:

A. Sezione conica propria.

1. $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$, sezione conica immaginaria.
2. $u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$, sezione conica reale.

B. Coppia di punti.

3. $u_1^2+u_2^2=0$, coppia di punti immaginari (coincidente con l'equazione (2) dei punti ciclici).
4. $u_1^2-u_2^2=0$, coppia di punti reali.

C. Punto singolo (contato due volte)

5. $u_1^2=0$.

- Il principio di questa enumerazione è così semplice che chiunque scriverà la corrispondente tabella, per analogia, nel caso di n variabili $u_1...u_n$: prima le equazioni con n quadrati collegati tra loro da + o da -; poi quelle con (n-1) quadrati e così via. Il caso della prima categoria lo chiameremo generale, specializzato una volta quello seguente, due volte quello della terza categoria, e così di seguito.

Per ognuno di questi casi costruiamo un analogo della formula (3) per la distanza di due punti ed otteniamo ciò che Cayley chiamava la quasi-distanza corrispondente. Per il caso della coppia di punti immaginari manterremo semplicemente la formula (3) (solo che ora $x_1:x_2:x_3$ e $y_1:y_2:y_3$ non sono necessariamente coordinate parallele ortogonali, ma in generale si dovrà parlare delle rispettive coordinate triangolari). Nei due casi seguenti (la coppia di punti reali ed il punto doppio) si dovranno apportare delle piccole modifiche, sulle quali ritorneremo. Più difficile risulta la legge solita per la quasi-distanza nei due primi casi (delle sezioni coniche proprie); qui non ci addentreremo oltre su questo argomento, poiché esso richiederebbe molto spazio e nei suoi dettagli non interviene nella conferenza di oggi. Il risultato è comunque *che otteniamo cinque tipi (e solo cinque tipi) di geometria metrica nel piano, dei quali solo uno, che corrisponde alla coppia di punti immaginari, ci è noto dall'esempio della metrica elementare. Chiamiamo la quintessenza della teoria che così nasce studio generale della misura proiettiva* (ora per il piano, poi per lo spazio, in generale per varietà di dimensione arbitraria).

Non è ora affatto mia intenzione d'entrare nei dettagli di questa teoria; si metterà in evidenza solo il suo significato generale. Devo immediatamente rimuovere un pregiudizio che alcuni possono coltivare: il profano sarà inizialmente assai poco incline ad attribuire un qualche valore ad impostazioni dei problemi che derivino in primis solo dall'esercizio conoscitivo soggettivo, per così dire estetico, del matematico. Ma la storia della scienza insegna che la faccenda è tutta un'altra; si tratta di un gran mistero e difficile da esprimere a parole; direi che tutto ciò che ha un bell'aspetto dal punto di vista matematico prima o poi assume un significato che va al di là del suo ambito ristretto. Così è successo con la teoria delle sezioni coniche, che è stata sviluppata per il suo interesse intrinseco dai geometri dell'antichità e che improvvisamente con la scoperta delle leggi di Keplero ha assunto la massima importanza per la nostra comprensione della natura. E proprio così è accaduto con lo studio della misura proiettiva, che si collega immediatamente alla teoria delle sezioni coniche. Dapprima è avvenuto che esso risultasse di grande significato epistemologico, poiché si rivelava il fondamento più semplice per le *geometrie non euclidee*, che erano sorte dalle ricerche sull'indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi, e che all'inizio erano ritenute qualcosa di molto difficile da capire[4]; fornirò ancora qualche dettaglio in

---

[4]*Vedansi i miei lavori "Sulla cosidetta geometria non euclidea" nei volumi 4 e 6 di Mathematischen Annalen (1871 e 1873).*

proposito. Successivamente è risultato che esso si dimostrasse anche in altri campi della matematica pura uno strumento utile per chiarire situazioni complesse, come nella teoria delle funzioni automorfe ed anche nella teoria dei numeri[5]. E ora, negli ultimi anni, vien fuori che esso fornisce pure un fondamento razionale alle più moderne speculazioni della fisica, in particolare permette di comprendere facilmente la differenza tra la meccanica classica e quella nuova.

La relazione tra misura proiettiva e teoria delle parallele, alla quale mi sono riferito, si può, se ci restringiamo di nuovo al piano, riassumere così nei suoi risultati esteriori: nel caso 1 della tabella di pag. 9 (quindi assumendo una sezione conica immaginaria) si ottiene la geometria non euclidea di Riemann, nel caso 2 (cioè assumendo una sezione conica reale) la geometria di Bolyai-Lobacevskij-Gauss. Posso ricordare un punto particolare, che grazie alla concezione proiettiva è senz'altro chiaro, mentre altrimenti facilmente appare circondato da un'aureola mistica: il numero di collineazioni mediante le quali una sezione conica non nulla viene trasformata in sè è ∞^3, ma sale ad ∞^4 non appena la sezione conica degenera in una coppia di punti. Da qui deriva che le trasformazioni equiformi (trasformazioni di similitudine) della metrica euclidea a noi così consuete svaniscono come categoria particolare nelle geometrie non euclidee; rimangono solo le ∞^3 trasformazioni di congruenza (movimenti). La conseguenza è che nelle geometrie non euclidee si ha una unità di lunghezza assoluta, non solo, come per Euclide, un'unità assoluta per l'angolo. Del resto i due gruppi, il G_3 dell'una o dell'altra geometria non euclidea ed il G_4 della geometria euclidea, per la loro struttura interna hanno poco a che fare tra loro. Proprio per questo è così difficile capire le geometrie non euclidee dal punto di vista della geometria euclidea: una figura, mossa in modo non euclideo, subisce, se considerata dal punto di vista euclideo,

---

[5] *Vedansi l'esposizione generale di Fricke-Klein, Lezioni sulla teoria delle funzioni automorfe (Parte I, Lipsia 1897), e inoltre le mie lezioni autografe su capitoli scelti della teoria dei numeri (Lipsia 1897).*

delle strane distorsioni. Ma ogni difficoltà sparisce se mi sono abituato al modo di pensare generale proiettivo. Infatti il G_8 della geometria proiettiva (cioè la totalità delle collineazioni del piano) comprende sia il G_3 di una o dell'altra geometria non euclidea che il G_4 della geometria euclidea. Se mi avvalgo della geometria proiettiva, ho lo stesso vantaggio di un viandante che stando su un monte può guardar giù ad un tempo in diverse valli, mentre prima, stando in una singola valle, poteva solo difficilmente farsi un'idea dell'andamento delle altre valli. Ed ora un ultimo punto, non trascurabile! Tutta le diversità di principio dei casi 1, 2 e 3 è tuttavia ovvia per il geometra proiettivo, poiché si può stabilire una transizione continua fra i tre casi. Si scelga semplicemente come equazione fondamentale della misura proiettiva:

$$u_1^2+u_2^2+\varepsilon u_3^2=0, \tag{9}$$

e si lasci che il parametro ε partendo da valori positivi vada a valori negativi passando per lo zero! Risulterà allora che la geometria di Riemann si trasformerà, passando per la geometria euclidea, nella geometria di Bolyai, Lobacevskij e Gauss. Si va più vicini alla realtà se ci si limita ad una regione di estensione arbitraria attorno al punto $u_3=0$, (grande quanto basta per comprendere il nostro intero sistema solare o anche tutte le stelle fisse) e poi si rende ε, positivo o negativo, così piccolo che all'interno di questa regione la distanza, misurata alla maniera non euclidea, differisca dal suo ammontare euclideo meno di una quantità piccola prefissata. -

Mi si consenta di procedere ancora un po' oltre in questi dettagli sulle misura proiettiva nel piano; naturalmente succede per preparare certe considerazioni che utilizzerò per il confronto della vecchia e della nuova meccanica. Applico ora l'anzidetto principio di continuità anche ai casi 3, 4 e 5 della nostra tabella di pag. 9. Riferita al consueto sistema di coordinate rettangolari, la forma fondamentale sia

$$u_1^2+\varepsilon u_2^2=0, \tag{10}$$

e darò ad ε una volta un valore assai piccolo positivo, una seconda volta un valore assai piccolo negativo, la terza volta il valore 0. Con x,y si indichino le corrispondenti coordinate d'un punto (le solite, non omogenee). Come distanza di questo punto dall'origine si ottiene allora, con l'opportuna modifica della formula (3):

$$r=[\varepsilon x^2+y^2]^{1/2}, \tag{11}$$

e cosidereremo ora che forma abbia il sistema dei cerchi condotti attorno ad O come centro (cioè le curve r=cost.). Per ε positivo avremo evidentemente delle ellissi allungate (il cui asse maggiore cade nella direzione dell'asse X), per ε negativo delle iperboli, i cui asintoti $y/x=+(-\varepsilon)^{1/2}$ fanno un angolo assai piccolo con l'asse X, per ε nullo una coppia di linee rette $y=\pm(\text{cost.})^{1/2}$, che corrono parallele all'asse X. È divertente riconoscere come questa coppia di parallele sia la forma di transizione tra le ellissi e le iperboli dei casi con ε positivo ovvero negativo!

Possiamo inoltre considerare nei casi con ε non nullo le trasformazioni equiformi e congruenti che corrispondono alla nostra misura. Poiché per $\varepsilon>0$, $\varepsilon<0$ i due punti rappresentati dalla (10) sono distinti, determinano univocamente la loro congiungente, la retta impropria. Le nostre trasformazioni saranno quindi trasformazioni affini e si potranno scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} x'&=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}, \\ y'&=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}. \end{aligned} \tag{12}$$

Qui i coefficienti a secondo membro vanno determinati nel caso equiforme in modo tale che $\varepsilon(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y)^2+(\alpha_{21}x+\alpha_{22}y)^2$ coincida con εx^2+y^2 a meno di un fattore arbitrario. Ciò dà per i coefficienti α_{ik} due condizioni, il cui numero sale a tre se passando alle trasformazioni congruenti, poniamo uguale ad 1 il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Abbiamo quindi ∞^4 transformazioni equiformi e ∞^3 trasformazioni congruenti, ovviamente in accordo preciso con quelle che conosciamo nel caso $\varepsilon=1$ della metrica euclidea.

Ci dedichiamo ora al caso doppiamente specializzato $\varepsilon=0$, e imporremo come condizione *che anche in questo caso debbano intervenire soltanto trasformazioni affini (12)* (- questa è una libera convenzione, poiché la retta all'infinito è solo una delle linee rette che contengono il punto $u_1^2=0$, cioè il punto all'infinito dell'asse X, e quindi non c'è naturalmente nessuna necessità che essa venga portata in sè dalle trasformazioni da noi considerate -). Otteniamo allora per le trasformazioni equiformi semplicemente $\alpha_{21}=0$; ogni trasformazione

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}, \\ y' &= \qquad\quad \alpha_{22}y+\alpha_{23} \end{aligned} \tag{13}$$

si dovrà considerare equiforme. *Il gruppo equiforme contiene nonostante la nostra convenzione restrittiva ancora cinque parametri.* Come "movimenti", cioè come trasformazioni congruenti si possono allora considerare quelle delle (13) che in primo luogo siano unimodulari, e in secondo luogo lascino invariata la distanza di due punti x,y e $\bar{x},\bar{y}$, cioè nel nostro caso $(y-\bar{y})$. Ciò dà $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{22}=1$ *ed il gruppo dei movimenti, come prima a tre termini, è dato dalle formule:*

$$\begin{aligned} x' &= x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}, \\ y' &= \qquad\; y+\alpha_{23}. \end{aligned} \tag{14}$$

Le trasformazioni equiformi contengono quindi due paramentri in più di quelle congruenti. Diremo che adesso possiamo scegliere indipendentemente l'unità di lunghezza lungo l'asse X e l'asse Y. In particolare avremo in $y-\bar{y}$ per due punti dati a piacere un invariante del movimento; *ma se in particolare* $y-\bar{y}=0$, anche $x-\bar{x}$ è un *invariante del movimento*.

Si tratta ora di estendere tutte queste leggi assai semplici a un numero di variabili maggiore. O meglio, vogliamo arrivare esattamente a 4 variabili x,y,z,t (e chiameremo con Minkowski la totalità dei sistemi di valori di queste variabili universo, x,y,z coordinate spaziali, t tempo). Rinunciamo ad elencare sistematicamente i corrispondenti tipi possibili di misura proiettiva, poiché ciò si può compiere assai facilmente. Ci limitiamo piuttosto a dimostrare che qui, nell'universo tetradimensionale, il sistema della meccanica si inquadra sotto il concetto della misura proiettiva, e precisamente sia il sistema della meccanica classica, sia quello della nuova meccanica di Lorentz, Einstein, Poincaré e Minkowski, e in tal modo l'essenza dei due sistemi, e in particolare la loro posizione reciproca, può essere messa pienamente in chiaro.

Si ponga d'ora in poi $x=x_1/x_5$, $y=x_2/x_5$, $z=x_3/x_5$, $t=x_4/x_5$. L'equazione lineare generale tra x,y,z,t si scriverà allora corrispondentemente: $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4+u_5x_5=0$; in particolare $x_5=0$ è ciò che chiameremo l'"infinitamente lontano" dell'universo. La nostra vecchia conoscenza, il cerchio sferico, avrà come prima l'equazione:

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=0; \tag{15}$$

ma ora, poiché abbiamo cinque coordinate omogenee, lo dobbiamo considerare una forma *due volte specializzata*. Accanto ad essa costruiamo la forma *specializzata una volta*

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2/c^2=0, \tag{16}$$

dove c indicherà la "velocità della luce", e quindi $1/c^2$ (introducendo delle unità che sono d'uso generale in meccanica) è una quantità assai piccola. In coordinate del punto questa forma è data dalla coppia di equazioni:

$$x_5=0, \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2=0, \tag{17}$$

e determina quindi univocamente l'"infinitamente lontano" dell'universo. Se qui, per arrivare al cerchio sferico, si lascia diventare c infinito, si otterranno per questo tre equazioni in coordinate del punto:

$$x_5=0, \quad x_4=0, \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0. \tag{18}$$

Si ha qui $x_4/x_5=t=0/0$; il cerchio sferico va pensato, potremmo dire, come atemporale. L'infinitamente lontano dell'universo è solo una delle varietà lineari che contengono il cerchio sferico; esso appare infatti privilegiato rispetto ad altre varietà lineari dello stesso tipo, quando facciamo risultare il cerchio sferico dalla (16) ovvero dalla (17) per passaggio al limite. -

Estenderemo pari pari a queste forme (16,17) ovvero (15,18) tutte le considerazioni che abbiamo prima associato all'equazione (10), cioè $u_1^2+\varepsilon u_2^2=0$.

Comincerò con il cerchio sferico, poiché ho introdotto il principio che, data la preminenza concettuale della varietà lineare $x_5=0$, si dovranno cercare le corrispondenti trasformazioni d'universo equiformi e congruenti solo tra le trasformazioni d'universo affini. Di conseguenza non ha più scopo ora mantenere la notazione omogenea: scriveremo piuttosto lo schema generale delle trasformazioni che intervengono in analogia con le equazioni (13) nella forma seguente:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+\alpha_{14}t+\alpha_{15}, \\ y' &= \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z+\alpha_{24}t+\alpha_{25}, \\ z' &= \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+\alpha_{34}t+\alpha_{35}, \\ y' &= \alpha_{44}t+\alpha_{45}. \end{aligned} \tag{19}$$

Chiameremo equiformi queste trasformazioni quando esse portano in sè il sistema di equazioni (18). Per questo si dà una sola condizione, che la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \tag{20}$$

sia ortogonale. Ciò produce in modo noto cinque equazioni per i nove coefficienti $\alpha_{11},..\alpha_{33}$; in totale dei 17 coefficienti che compaiono nelle (19) ne restano quindi arbitrari 12. - Tra le trasformazioni equiformi così determinate indicheremo allora secondo la (14) come *trasformazioni congruenti* quelle per le quali la matrice (20) è unimodulare e inoltre $\alpha_{44}=1$. *Il gruppo delle trasformazioni congruenti così determinate contiene ancora dieci parametri.* Siano x,y,z,t e $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$ le coordinate di due punti d'universo, allora per il gruppo delle trasformazioni congruenti resta da dire solo che la differenza $t-\bar{t}$ non cambia; solo quando $t-\bar{t}$ è in particolare uguale a zero anche $(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2$ è un invariante. *Due punti d'universo hanno quindi un invariante "puramente geometrico" quando la loro differenza temporale è nulla.*

Non c'è bisogno di dire che con queste asserzioni sulle trasformazioni equiformi e congruenti relative al cerchio sferico siamo di fatto arrivati alle basi della meccanica classica, dopo ciò che di recente è stato rilevato più volte da altri autori. Le equazioni fondamentali della meccanica classica restano di fatto immutate quando noi:

1. sostituiamo il sistema di coordinate spaziali ortogonali x,y,z con un altro di ugual orientazione,
2. pensiamo di sottoporre il sistema ortogonale ad una qualsiasi traslazione uniforme,
3. variamo a piacimento l'istante iniziale dal quale misuriamo il tempo t.

Proprio questo trova la sua espressione nel gruppo delle nostre trasformazioni congruenti. In particolare alle traslazioni uniformi (2) corrispondono nelle nostre formule i termini con $\alpha_{14}t$, $\alpha_{24}t$, $\alpha_{34}t$. E al fatto che le nostre trasformazioni equiformi contengano due parametri in più rispetto a quelle congruenti corrisponde la circostanza che nella meccanica classica l'unità di tempo e l'unità di lunghezza possono essere scelte arbitrariamente in modo indipendente l'una dall'altra (su questo si basa lo studio della "similitudine" in meccanica classica). -

Trattiamo in secondo luogo il caso della forma fondamentale (17) specializzata solo una volta (che ancora non ha alcun nome particolare, ma che certo ne meriterebbe uno):

$$x_5=0, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2=0.$$

Le trasformazioni equiformi sono qui necessariamente affini, e quindi ritorniamo alla notazione non omogenea. Lo schema generale di una trasformazione affine è:

$$\begin{aligned} x'&=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+\alpha_{14}t+\alpha_{15}, \\ y'&=\alpha_{21}x+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{25}, \\ z'&=\alpha_{31}x+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{35}, \\ y'&=\alpha_{41}x+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{45}. \end{aligned} \tag{21}$$

Abbiamo una trasformazione equiforme se la sostituzione omogenea di x,y,z,t data mediante la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\ldots\ldots\alpha_{14} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{41}\ldots\ldots\alpha_{44} \end{bmatrix}$$

manda la forma quadratica $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ in un multiplo di se stessa. Ciò impone ai 20 coefficienti α_{ik} 9 condizioni; *il gruppo delle trasformazioni equiformi contiene quindi ora 11 parametri.*

Da questo nasce il gruppo delle trasformazioni congruenti (come a suo tempo definito) imponendo che il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots\cdots \alpha_{14} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{41} \cdots\cdots \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

debba avere il valore fisso 1. *Abbiamo così un gruppo con 10 parametri*. Se x,y,z,t e $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$ sono le coordinate di due punti d'universo qualsiansi, rispetto ad esso il quadrato della quasi-distanza:

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2-c^2(t-\bar{t})^2$$

risulta un invariante.

Abbiamo ancora da elaborare un punto più delicato, che già prima avrebbe potuto essere considerato, nella discussione sulla coppia di punti $u_1^2+\varepsilon u_2^2=0$ come forma fondamentale di una misura piana. Per estrarre dalla totalità delle trasformazioni equiformi quelle congruenti ci siamo ristretti a porre nelle sostituzioni (12) il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

uguale ad 1. Così vien fatto nel caso della misura euclidea, dove come forma fondamentale si pone una coppia di punti immaginari. Ma ciò è tuttavia conclusivo solo nel caso della coppia di punti immaginari (per il caso di ε positivo). Se la coppia di punti è reale (ε negativo) la trattazione geometrica dettagliata dà che le trasformazioni equiformi unimodulari non costituiscono più un continuo, come si potrebbe ragionevolmente pretendere dalla totalità delle trasformazioni equiformi. Invece la loro totalità si suddivide in quattro continui. *Solo quelle trasformazioni che lasciano invariato il segno dell'espressione differenziale* εdx^2+dy^2 *e inoltre hanno un* α_{22} *positivo si possono indicare come movimenti in senso stretto, poiché esse si possono sempre congiungere con continuità alla trasformazione "identica"* $x'=x$, $y'=y$. Alla definizione data prima delle trasformazioni congruenti si devono aggiungere quindi per ε negativo ancora esplicitamente le suddette condizioni. Ciò non ha alcuna influenza sul numero dei parametri prima dato. Anche nel caso limite $\varepsilon=0$, quando abbiam posto $\alpha_{22}=1$, abbiamo già usato la nuova convenzione. - Qualcosa di analogo c'è anche nel caso ora da trattare della forma (17) (che a causa del segno negativo con il quale il termine $c^2x_4^2$ interviene nella sua equazione, fino ad un certo punto va confrontato con il caso della coppia di punti reali del piano). Ora lo studio geometrico dettagliato mostra, - cosa che non è difficile, ma che richiederebbe più spazio di quanto qui possiamo dargli - che il gruppo delle trasformazioni congruenti, come l'abbiamo definito prima, comprende due continui, e *che di questi due continui noi possiamo utilizzare come gruppo dei movimenti solo quello caratterizzato da* α_{44} *positivo.*

Possiamo quindi aggiungere esplicitamente la prescrizione di α_{44} positivo al nostro gruppo a dieci parametri. Otteniamo allora proprio il *gruppo di Lorentz* della "nuova" meccanica. Di solito si dice però che il gruppo di Lorentz abbia sei parametri (non dieci). Ma ciò deriva dal fatto che in fisica matematica non si considerano le trasformazioni (21) delle coordinate x,y,z,t, ma solo le corrispondenti trasformazioni dei differenziali $dx,dy,$ dz,dt, nei quali le costanti aggiuntive $\alpha_{15},\alpha_{25},\alpha_{35},\alpha_{45}$ della formula (21) ovviamente spariscono. Il fatto che il gruppo delle trasformazioni equiformi contenga ora solo un parametro in più rispetto a quello delle congruenti trova la sua controparte nella circostanza che con l'assegnazione della costante c (la velocità della luce) nella nuova meccanica l'unità spaziale e l'unità temporale sono legate tra loro (sicché solo una delle due può essere presa ad arbitrio).

Pertanto la vecchia meccanica e la nuova meccanica sono parimenti inquadrate nello schema della misura proiettiva con quattro variabili x,y,z,t. - la meta, che mi prefissavo all'inizio di questa esposizione, è raggiunta. Tutto quello che ho detto all'inizio sulla relazione della geometria metrica con quella proiettiva si potrebbe trasporre pari pari. Mi limito tuttavia ad aggiungere ancora due brevi considerazioni.

Primo: secondo la terminologia, che prima ho incidentalmente ricordato, possiamo dire che sia la meccanica classica che la nuova meccanica sono una "teoria della relatività" rispetto ad un gruppo di dieci parametri. Ci si potrebbe chiedere allora: perché l'espressione "teoria della relatività" viene utilizzata esclusivamente come attributo della nuova meccanica? Vien da rispondere in proposito: perché la nuova meccanica è sorta storicamente dalle peripezie riguardanti l'elettrodinamica. Basta, per render chiaro lo stato delle cose, scrivere le equazioni di Maxwell per l'etere puro nella notazione di Hertz:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Queste equazioni restano ovviamente immutate se si sostituisce il sistema x,y,z con un altro sistema di coordinate ortogonali (ugualmente orientato), o se si sposta arbitrariamente l'origine del tempo: -ciò costituisce complessivamente un gruppo di sette parametri. Ma esse non restano affatto immutate se si sottopone il sistema di coordinate a una traslazione uniforme, e quindi si pone:

$$x'=x+\alpha_{14}t, \quad y'=y+\alpha_{24}t, \quad z'=z+\alpha_{34}t.$$

Qui stava il motivo per il quale sotto la signoria delle equazioni di Maxwell si considerò l'etere elettrodinamico come in quiete nello spazio, per il quale l'idea dello spazio assoluto ritornò in auge. Rimane il gruppo con sette parametri delle variazioni che corrispondono alla transizione puramente esteriore da un sistema di coordinate x,y,z,t ad un altro equivalente. - Allora venne la scoperta che questo gruppo a sette parametri è contenuto in un altro a dieci parametri che lascia le equazioni di Maxwell invariate, ossia il gruppo di Lorentz. Di nuovo lo spazio assoluto (o forse meglio: l'universo assoluto) sparì, - l'universo ritornò ad essere, come prima, un concetto relativo -, e senza pensare che, mutatis mutandis, si ripristinava soltanto la situazione precedente, si coniò l'espressione "teoria della relatività" come se fosse nuova, riferita esclusivamente al gruppo di Lorentz.

Ma come osservazione conclusiva potrei scegliere questa: si è prima suggerito che le difficoltà che ognuno incontra a penetrare nelle dottrine non euclidee cominciando dall'assuefazione alla geometria euclidea vengono senz'altro meno se si assume come punto di partenza il punto di vista superiore del pensiero proiettivo. L'analogo potrebbe valere per lo studio delle nuove relazioni che compaiono nella meccanica quando si pone a fondamento il gruppo di Lorentz. Nel loro studio appare inadeguato partire sempre dalle idee che valgono in meccanica classica e poi apprendere come queste debbano essere artificiosamente deformate per adattarsi alla nuova meccanica. Sembra invece più giusto innalzarsi subito dal punto di vista della vecchia meccanica ad uno più ampio, che comprenda poi la vecchia e la nuova meccanica l'una accanto all'altra come casi particolari. Dopo, come è stato prima anticipato, non è neppure necessario addentrarsi nella concezione proiettiva dell'universo, infatti basta la concezione affine. Si arriverà così a scrivere una teoria sistematica degli invarianti dell'"universo" affine, per la quale già esistono tutti gli elementi nelle ricerche multidimensionali dei matematici e, partendo da essa, a trattare i due tipi della meccanica, il vecchio e il nuovo, l'uno accanto all'altro. In tal modo risulta poi spontaneamente come la vecchia meccanica sia un caso limite della nuova, come quindi possa essere considerata un'approssimazione della seconda. Chi porta a compimento questo programma?

Minkowski aveva senza dubbio studiato con gran cura le cose qui richieste. Ma poiché egli scrisse per la vasta cerchia dei lettori più interessati al punto di vista fisico, nell'interesse della comprensibilità della sua opera ritenne più opportuno non esporre le sue considerazioni più profonde sull'argomento, ma solo la forma già cristallizzata dell'algoritmo al quale esse portano nel caso del gruppo di Lorentz. Questo è il calcolo vettoriale tetradimensionale di Minkowski, che egli pose al vertice dei suoi sviluppi elettrodinamici senza fondamento più profondo, come un certo sistema di processi algebrici convenzionalmente fissato[6].

---

[6]*Nella mia conferenza del 10 maggio avevo parlato in particolare anche di un'elegante rappresentazione dei coefficienti del gruppo di Lorentz mediante dieci parametri indipendenti, che risulta in*