Lo spostamento verso il rosso nell’universo di de Sitter.[1]

Kornel Lanczos a Friburgo

Con sei figure. (Ricevuto il 27 giugno 1923.)

Una relazione di v. Laue su un lavoro di Eddington[2] apparsa da poco mi ha dato motivo di sottoporre la questione indicata nel titolo ad uno studio più accurato. v. Laue è dell’idea che la variabilità spaziale della velocità della luce nell’universo di de Sitter dia luogo ad uno spostamento verso il rosso - questa variabilità viene interpretata a sua volta come effetto gravitazionale dell’orizzonte massivo irraggiungibile assunto da Einstein, Weyl e de Sitter all’equatore dell’universo. Più ci accostiamo all’equatore, maggiore sarà l’azione della massa e lo spostamento verso il rosso ad esso collegato. Un osservatore percepisce uno spostamento verso il rosso rispetto alla sua propria linea se la luce viene da latitudini inferiori, e invece uno spostamento verso il violetto se la sorgente luminosa si trova a latitudini superiori. Eddington sostiene inoltre uno spostamento verso il rosso anche per lo scambio tra sorgente luminosa e punto d’osservazione, e spiega questo risultato apparentemente "paradossale" per il fatto che oltre all’azione del campo metrico deve comparire anche un effetto Doppler.

Non esiste una contraddizione effettiva tra i due punti di vista. Infatti mentre Eddington considera linee geodetiche, le osservazioni di v. Laue si riferiscono a linee d’universo statiche, che nell’universo di de Sitter non sono anche geodetiche. Tuttavia uno studio più accurato di questo problema non mi pare superfluo per l’importante significato che è associato alle osservazioni cosmiche di spostamento verso il rosso come punto di appoggio per le nostre concezioni cosmologiche, da un lato per contrastare errori che si possono incontrare ancora di frequente rispetto ad un’applicazione conseguente dei principî relativistici, dall’altro perché il problema si presta anche a gettare

---

[1] Zeitschr. f. Phys. **17**, 168 (1923).

[2] *vedasi* Die Naturwissenschaften **11**, 382, 1923.

una luce su alcuni concetti generali. In particolare due punti mi paiono bisognosi di un chiarimento. In un lavoro ho cercato di dimostrare[3] che non c'è alcun bisogno di attribuire all'equatore dell'universo di de Sitter un orizzonte massivo, poiché la singolarità che ivi compare è solo apparente, mostra un carattere condizionato della scelta delle coordinate. Se questo è giusto, non si può considerare come origine dello spostamento verso il rosso l'orizzonte massivo, puranche possibile, ma non necessario. Inoltre ci si può proporre del tutto in generale la questione: come si può giungere a un criterio oggettivo per decidere se un dato spostamento verso il rosso origini dalla struttura metrica del campo, o vada interpretato come un puro effetto Doppler? Sta nello spirito della teoria della relatività il ricondurre l'origine di tutti i fatti fisici a relazioni geometriche invarianti dello spazio dell'universo. Quindi le asserzioni che si fondano su un sistema di coordinate "statico" hanno - come si può dimostrare facilmente - un carattere del tutto inattendibile e casuale e non possono quindi intervenire come spiegazione oggettiva.

Consideriamo infatti il consueto elemento di linea pseudo-euclideo:

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2 \,, \tag{1}$$

e introduciamo al posto di x ed u due nuove coordinate mediante la seguente trasformazione:

$$x = \Phi\cos it \,, \quad iu = \Phi\sin it \,. \tag{2}$$

Otteniamo adesso la forma:

$$-ds^2 = d\Phi^2 + dy^2 + dz^2 - \Phi^2 dt^2 \,. \tag{3}$$

Questo elemento di linea ha un comportamento del tutto analogo a quello dell'elemento di linea di de Sitter nell'intorno dell'equatore, se si interpretano t come tempo, Φ come latitudine geografica. Siamo anche qui in presenza di un sistema "statico" e possiamo interpretare Φ come velocità variabile della luce. Potremmo parlare anche in questo caso di un "orizzonte massivo irraggiungibile" nella posizione $\Phi = 0$, dove la velocità della

---

[3] *Vedasi* Phys. Zeitschr. **23**, 539, 1922.

luce e con essa il determinante della metrica si annullano. Constatiamo pure uno spostamento verso il rosso o verso il violetto per linee d'universo statiche - del tutto analogo a quello che si ha nell'universo di de Sitter. Ma qui sappiamo per certo che questo spostamento verso il rosso non origina dalla metrica, quindi si può parlare solo di un effetto Doppler, abbiamo a che fare solo con lo spazio pseudoeuclideo privo di gravitazione della teoria della relatività speciale. Lo spostamento delle righe spettrali avviene qui per il fatto che l'osservatore e la sorgente luminosa, "a riposo" nel sistema statico, nello spazio euclideo si trovano in moto accelerato, e quindi la velocità relativa della sorgente luminosa al momento dell'emissione rispetto all'osservatore nel momento dell'assorbimento dà luogo ad un effetto Doppler. Le relazioni tra le accelerazioni sono inoltre tali che uno spostamento verso il rosso si trasforma nel corrispondente spostamento verso il violetto quando sorgente ed osservatore si scambiano di posizione - cosa che non avviene nel consueto effetto Doppler senza accelerazione. Riconosciamo da questo esempio quanto poco si possa far affidamento sulle "coordinate statiche" e sulla "velocità della luce", e come sia fondato cercare in base ad un segno distintivo invariante uno spostamento verso il rosso che origini solo dalla metrica. La velocità della luce dipende completamente dalle unità di misura per spazio e tempo, quindi dalle coordinate casualmente utilizzate. Se si misura il tempo in ogni punto con il "tempo proprio" allora la velocità della luce è per definizione ovunque = 1. L'introduzione di un "tempo cosmico" universale in base a considerazioni statiche non è possibile in generale, e quando lo è non assume tuttavia alcun significato obbiettivo.

È noto[4] come si possa determinare uno spostamento verso il rosso in modo invariante. Ciò discende immediatamente dalla possibilità di usare un atomo emittente come orologio a tempo proprio. Inviamo dalla posizione della sorgente di luce un segnale luminoso in due istanti che si susseguono in breve e misuriamo il

---

[4] *Nota aggiunta alla correzione delle bozze: vedasi* H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5[a] ed., 1923, Appendice III.

tempo proprio t_0 trascorso nel frattempo. Alla posizione dell'osservatore misuriamo il tempo t_1 trascorso tra il risplendere dei due segnali, di nuovo in tempo proprio. Sappiamo poi che la frequenza osservata ν_0 di una riga spettrale emessa dalla sorgente luminosa si comporta rispetto alla frequenza ν_1 della stessa riga spettrale nella posizione dell'osservatore come il tempo t_0 rispetto al tempo t_1:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{t_0}{t_1} \quad . \tag{4}$$

Tradotta geometricamente, questa descrizione fisica significa la costruzione seguente (Fig. 1).

In un punto P_0 sulla linea d'universo della sorgente di luce (L) costruiamo il cono di luce che gli appartiene, quindi la totalità delle linee geodetiche nulle che escono da esso. E in particolare interviene solo il cono nullo aperto di sopra. Analogamente procediamo con quello uscente dal punto adiacente Q_0 della linea d'universo. L'intervallo tra questi due punti sia ds_0. I due coni di luce intercetteranno sulla linea d'universo dell'osservatore (B) un tratto ds_1. Allora il rapporto tra la frequenza osservata ν_0 e la frequenza propria ν_1 è dato dal rapporto tra questi due elementi di linea:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{ds_0}{ds_1} \ . \tag{5}$$

Uno spostamento verso il rosso (per brevità indicheremo così ogni spostamento delle righe spettrali, anche se non avviene proprio verso il rosso) dovrà dipendere quindi in generale oltre che dalla posizione dei due punti P_0 e P_1 ancora dalla direzione dei due elementi di linea ds_0 (sorgente luminosa) e ds_1 (osservatore). Nella teoria della relatività speciale, nella quale un trasporto d'intervallo diretto "rigido" da un punto ad un altro è consentito, potremmo trasferire l'elemento di linea ds_0 parallelamente a se stesso nel punto P_1 e determinare poi lo spostamento verso il rosso solo dall'angolo che individuano i due elementi di linea e dalla direzione del raggio. Fisicamente quest'angolo risulta dalla velocità relativa dell'osservatore rispetto alla sorgente di luce e il risultato della costruzione geometrica appare nell'interpretazione fisica sotto forma del principio di Doppler.

Nella teoria della relatività generale un siffatto trasporto di intervalli non è immediatamente possibile. In ogni caso possiamo però confrontare tra loro proprio come nella teoria della relatività speciale gli spostamenti verso il rosso che abbiano luogo nello stesso punto d'osservazione P_1 per elementi di linea ds_1 diversamente orientati. Ciò significa che possiamo facilmente calcolare dall'effetto Doppler, proprio come nella teoria della relatività speciale, lo spostamento relativo verso il rosso per due osservatori che compiano le loro osservazioni della stessa sorgente luminosa esterna simultaneamente nello stesso punto, ma muovendosi con velocità diverse. Infatti allora interviene solo l'intorno immediato del punto P_1 e perciò possiamo sostituire le superfici d'onda con i loro piani tangenti e introdurre nel punto d'osservazione la metrica pseudoeuclidea. Quindi per caratterizzare lo spostamento verso il rosso nel punto P_1 basta misurarlo per una certa orientazione dell'elemento di linea registrante ds_1, in tutte le altre direzioni risulta poi subito dal confronto con questa direzione secondo il principio di Doppler. Ci si chiede ora quale direzione dobbiamo scegliere come direzione normale. Nella teoria della relatività speciale scegliamo naturalmente un osservatore che si trovi in quiete rispetto alla sorgente luminosa, la cui linea d'universo quindi corra parallela alla linea d'universo della sorgente luminosa. In questa direzione non si ha alcuno spostamento verso il rosso. Se la linea d'universo della sorgente luminosa non è una retta, ma essa si trova quindi in moto accelerato, l'osservatore nell'istante dell'assorbimento dev'essere momentaneamente in quiete rispetto alla sorgente luminosa all'istante dell'emissione. Solo in tal modo succede che il tratto P_0Q_0 - l'elemento di linea che invia la luce - sia orientato parallelamente all'elemento di linea P_1Q_1 - l'elemento di linea che registra -. Ma in tal modo abbiamo determinato una proprietà geometrica che si può trasferire immutata anche nella teoria della relatività generale. Dovremo orientare l'elemento di linea ds_1, dal quale sarà caratterizzato lo spostamento verso il rosso alla posizione d'osservazione P_1, parallelamente all'elemento di linea ds_0 della sorgente luminosa durante l'emissione. Un elemento di linea così orientato sarà indicato con $d\sigma$.

Quando su una superficie bidimensionale si voglia tracciare una parallela da un punto P_1 ad un tratto infinitamente piccolo P_0Q_0 si procede nel modo seguente. Si traccia da P_1 una linea geodetica fino a P_0 e si misura l'angolo γ che l'elemento di linea dato individua con questa linea geodetica. Se trasportiamo lo stesso angolo nel punto P_1 abbiamo la direzione parallela cercata. In uno spazio con più dimensioni si procederà così: si costruirà ancora la linea geodetica P_0P_1 e si trasporterà il tratto P_0Q_0 lungo questa linea per passi infinitesimi mantenendolo parallelo a se stesso finché si sia raggiunto il punto P_1. In ogni caso i due elementi di linea paralleli P_0Q_0 e P_1Q_1 individuano lo stesso angolo con la linea geodetica P_0P_1. Per lo spostamento verso il rosso questa circostanza da sola è quella decisiva. Non è infatti necessario che i due elementi di linea ds_0 e ds_1 siano orientati parallelamente, possono anche essere sghembi, purché l'angolo che fanno con la linea geodetica P_0P_1 sia lo stesso. Tutte queste direzioni sono equivalenti per lo spostamento verso il rosso, come riconosceremo da quanto segue. Non incontriamo alcuno spostamento verso il rosso tra due osservatori in moto relativo, purché non sia presente alcuna componente della velocità nella direzione del raggio. Tutti questi osservatori equivalenti per la misura di uno spostamento verso il rosso hanno in comune la proprietà che essi individuano lo stesso angolo con la linea geodetica nulla P_0P_1. Tuttavia quest'angolo non ha un significato immediato. Infatti il coseno dell'angolo (immaginario) relativo ad una linea nulla sarà infinito per tutte le direzioni. Tuttavia possiamo scegliere un punto P'_0 nell'intorno immediato di P_0, però all'interno del cono di luce, e tracciare la linea geodetica non da P_0, ma da P'_0. Ora, per due elementi di linea ds_1 e ds_2 nel punto P_1 diversamente orientati possiamo determinare gli angoli γ_1 e γ_2 individuati con questa linea ausiliaria e formare il rapporto:

$$\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} \quad . \tag{6}$$

Questo rapporto tende ad un valore limite determinato quando P'_0 va in P_0. Se in particolare questo valor limite è = 1, ci esprimeremo così:"ds_1 e ds_2 fanno con la linea nulla P_0P_1 lo stesso angolo".

Esattamente così si possono confrontare tra loro anche i due angoli che ds_0 nel punto P_0 e ds_1 nel punto P_1 individuano con la linea nulla P_0P_1.

L'intera costruzione geometrica di cui abbiamo bisogno per misurare uno spostamento verso il rosso ha luogo in realtà in una superficie bidimensionale. Possiamo pensare di individuare con le linee ds_0, P_0P_1, ds_1 una striscia infinitamente sottile di una superficie bidimensionale, e abbiamo allora il grande vantaggio di affrontare un problema puramente bidimensionale. Risulta inoltre allora la circostanza fortunata che l'equazione della linea geodetica, per quanto interviene nel nostro problema, è direttamente integrabile.

Sulla superficie bidimensionale che ci interessa pensiamo di introdurre coordinate isometriche, di modo che l'elemento di linea appaia nella forma seguente:

$$ds^2 = G(dx^2 - dy^2) \ . \tag{7}$$

Vogliamo ora dimostrare che una curva che soddisfi l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \varepsilon G \tag{8}$$

- dove ε significherà una costante positiva infinitamente piccola - rappresenta una linea geodetica.

Abbiamo ora, trascurando quantità al confronto infinitamente piccole:

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{(2\varepsilon)^{1/2} G} \ , \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds} = \frac{1}{(2\varepsilon)^{1/2} G} \ . \tag{9}$$

Per la coordinata x l'equazione di una linea geodetica si scrive:

$$\ddot{x} = - \left\{ {1 \atop r\ s} \right\} \dot{x}_r \dot{x}_s \ . \tag{10}$$

Deriviamo logaritmicamente la prima delle equazioni (9) rispetto a ds; otteniamo:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} \right) \ . \tag{11}$$

D'altra parte abbiamo con la forma (7) dell'elemento di linea:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ r\ s \end{Bmatrix} \dot{x}_r \dot{x}_s = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial G}{\partial y} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial G}{\partial x} \dot{y}^2 \right) . \tag{12}$$

Ma ora tenendo conto delle equazioni (9) possiamo porre $\dot{x} = \dot{y}$ e scrivere il secondo membro della (12) nella forma seguente:

$$\frac{\dot{x}}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} \right) .$$

Un confronto con l'equazione (11) mostra che l'equazione (10) è effettivamente soddisfatta. Possiamo procedere esattamente nello stesso modo con la coordinata y.

Se poniamo nell'equazione (8) $\varepsilon = 0$ otteniamo le linea geodetica nulla:

$$\frac{dy}{dx} = 1 , \quad y - x = \text{cost.} \tag{13}$$

Vediamo quindi che le curve (8) rappresentano davvero le linee geodetiche adiacenti alla linea geodetica nulla, di cui abbiamo proprio bisogno per la nostra costruzione. Determiniamo l'angolo che ds_0 e risp. ds_1 individuano con una linea siffatta.

Caratterizziamo questi elementi di linea con i differenziali $d\xi_0$, $d\eta_0$ e risp. $d\xi_1$, $d\eta_1$, e poniamo ancora per semplicità:

$$\frac{dy}{dx} = p , \quad \frac{d\eta}{d\xi} = q . \tag{14}$$

Secondo le formule fondamentali generali della teoria delle superfici per il coseno dell'angolo γ che individuano le due direzioni p e q abbiamo la relazione seguente:

$$\cos\gamma = \frac{1 - pq}{(1 - p^2)^{1/2}(1 - q^2)^{1/2}} . \tag{15}$$

Ma sostituiamo il valore di p dato dall'equazione (8); risulta allora:

$$\cos\gamma = \frac{1 - q}{(2\varepsilon G)^{1/2}(1 - q^2)^{1/2}} = \left(\frac{1}{2\varepsilon} \frac{1 - q}{G(1 + q)} \right)^{1/2} . \tag{16}$$

In essa abbiamo tralasciato le quantità al confronto infinitamente piccole. Ora possiamo costruire il rapporto (6) relativo agli elementi di linea ds_0 e ds_1, e passando al limite per $\varepsilon = 0$ otteniamo:

$$\frac{\cos\gamma_0}{\cos\gamma_1} = \left(\frac{1 - q_0}{G_0(1 + q_0)}\right)^{1/2} : \left(\frac{1 - q_1}{G_1(1 + q_1)}\right)^{1/2} . \tag{17}$$

G_0 e G_1 indicheranno qui il valore di G nei punti P_0 e rispettivamente P_1.

Ora calcoliamo le due lunghezze ds_0 e ds_1 dalle quali si perviene allo spostamento verso il rosso. Esse si ottengono procedendo nelle direzioni indicate da q_0 e risp. q_1 fino a raggiungere una linea nulla adiacente. Abbiamo:

$$\frac{ds_0}{ds_1} = \frac{d\xi_0}{d\xi_1}\left(\frac{G_0(1 - q_0^2)}{G_1(1 - q_1^2)}\right)^{1/2} . \tag{18}$$

Ma dall'equazione (13) per la linea nulla ricaviamo la seguente dipendenza tra i differenziali:

$$d\xi_0 - d\eta_0 = d\xi_1 - d\eta_1 \tag{19}$$

ovvero:

$$d\xi_0(1 - q_0) = d\xi_1(1 - q_1) .$$

Tenendo conto di questa relazione otteniamo per la (18):

$$\frac{ds_0}{ds_1} = \left(\frac{1 - q_1}{G_1(1 + q_1)}\right)^{1/2} : \left(\frac{1 - q_0}{G_0(1 + q_0)}\right)^{1/2} . \tag{20}$$

Un confronto con l'equazione (17) mostra immediatamente il sussistere della relazione seguente:

$$\frac{ds_0}{ds_1} = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_0} , \tag{21}$$

mediante la quale arriviamo infine al seguente semplice risultato per il rapporto della frequenza osservata rispetto alla frequenza propria:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_0} . \tag{22}$$

Uno spostamento delle righe spettrali dipende soltanto dai due angoli che l'elemento di linea che emette la luce e l'elemento di linea che la registra fanno con la retta che li congiunge.

Se in particolare si ha parallelismo delle due direzioni i due angoli sono uguali, il rapporto al secondo membro è = 1 e non risulta alcuno spostamento verso il rosso. In Fig. 2 è quindi *$ds = d\sigma$, i tratti paralleli compresi tra linee nulle adiacenti hanno tutti la stessa lunghezza.*

L'equazione (22) vale nella teoria della relatività generale esattamente come in quella speciale. Infatti non si osserva alcuna differenza di principio se la geometria è euclidea oppure no. Però nella teoria della relatività speciale interpretiamo lo spostamento delle righe spettrali come effetto Doppler. Possiamo fare esattamente lo stesso anche nella teoria della relatività generale, poiché anche in essa lo spostamento verso il rosso è determinato dalle stesse quantità. Dobbiamo solo tener presente che la frase: "Un osservatore a riposo rispetto alla sorgente di luce" va intesa nel senso che l'elemento di linea dell'osservatore è diretto parallelamente all'elemento di linea che emette la luce.

Arriviamo quindi al seguente notevole risultato:

Non c'è alcuno spostamento verso il rosso che derivi dalla metrica. Ogni spostamento verso il rosso va inteso come effetto Doppler.

Lo spostamento verso il rosso delle righe solari viste sulla terra non va inteso come se all'effetto Doppler si aggiungesse un "effetto gravitazionale", ma nel senso che l'effetto Doppler "vero" è diverso da quello "apparente", che si calcola tracciando le linee d'universo in uno spazio pseudoeuclideo. Nello spazio euclideo le parallele ad una retta sono anch'esse delle linee rette. Ciò non accade più in una geometria non euclidea, poiché il "quinto postulato di Euclide" non è soddisfatto. Per l'azione del sole le parallele vengono deflesse dalla loro direzione, sicché le linee d'universo statiche non sono più parallele, ma fanno un angolo con queste, che dà luogo ad un effetto Doppler. L'osservazione dello spostamento verso il rosso delle righe solari va quindi intesa in realtà come criterio per il sussistere o meno dell'"assioma delle parallele" euclideo.

Discuteremo ancora un po' più in dettaglio questo caso del campo di gravitazione statico a simmetria sferica, determinando effettivamente l'andamento delle parallele che intervengono nel problema, che per brevità chiameremo "parallele nulle". A causa della simmetria sferica esse giacciono in un piano che può essere assegnato mediante una certa direzione spaziale costante e mediante l'asse dei tempi, e sono quindi completamente rappresentabili nel piano del disegno. In questo piano all'esterno del sole vale l'elemento di linea di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \tag{23}$$

Cerchiamo quelle linee che tagliano le linee nulle che escono dalla sorgente luminosa posta sulla superficie del sole ovunque con lo stesso angolo individuato dalla linea d'universo della sorgente stessa. Per poter applicare le nostre formule dobbiamo introdurre in primo luogo coordinate isometriche, quindi al posto del raggio vettore r una variabile u, definita nel modo seguente:

$$du = \frac{dr}{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \tag{24}$$

La sua introduzione esplicita non è tuttavia richiesta, poiché per mezzo di questa equazione possiamo sempre riportarci ad r. La condizione per una parallela nulla è che il rapporto

$$\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_0}$$

sia ovunque = 1. Se sostituiamo questo valore nell'equazione (17) perveniamo all'equazione differenziale delle parallele nulle nella forma seguente:

$$\frac{1 - q}{G(1 + q)} = \frac{1 - q_0}{G_0(1 + q_0)} \quad . \tag{25}$$

Nel nostro caso abbiamo ora:

$$q_0 = 0 \ , \quad G_0 = 1 - \frac{\alpha}{R} \ ,$$

se indichiamo con R la distanza della sorgente di luce dal centro - quindi il raggio del sole. Per semplicità scegliamo questa distanza come unità di lunghezza, e quindi poniamo:

$$R = 1.$$

L'eliminazione di q dall'equazione (25) dà la seguente equazione differenziale:

$$q = \frac{du}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \frac{dr}{dt} = - \alpha \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{2 - \alpha - \frac{\alpha}{r}} \, , \tag{26}$$

che possiamo risolvere con una semplice quadratura, ed otteniamo:

$$(2 - \alpha)r + 2\lg(r - 1) - \alpha^2\lg(r - \alpha) + \alpha t = \text{cost.} \tag{27}$$

Per campi deboli possiamo porre:

$$\frac{\alpha}{2}\, t = C - [r + \lg(r - 1)] \, . \tag{28}$$

Queste curve sono tracciate in Fig. 3. Lungo queste curve non ha luogo alcuno spostamento verso il rosso. Esse rappresentano le linee d'universo di un osservatore che può qui esser considerato come quello "che si trova in quiete relativa rispetto alla sorgente di luce". Riconosciamo che le linee d'universo statiche tagliano queste parallele sotto un angolo costante nel tempo, che cresce all'aumentare della distanza e tende rapidamente ad un certo valore limite. E in particolare le parallele sono deflesse verso l'interno, la terra ha una velocità di allontanamento dal sole rispetto ad un osservatore "in quiete". L'effetto Doppler si manifesta quindi con uno spostamento verso il rosso. Se applichiamo la nostra figura al sistema solare, un'ascissa unitaria sta ad indicare una distanza di $6{,}96 \cdot 10^{10}$ cm (raggio del sole), una unità dell'ordinata un tempo di $1{,}12 \cdot 10^{6}$ sec. La terra sta ad una distanza di $r = 215$.

Rovesciando l'asse dei tempi otterremmo le parallele nulle relative a onde luminose convergenti. Le linee nulle *a* e *b* in Fig. 4 vanno allora nelle linee nulle *a'*, *b'*. Ma proprio queste linee nulle intervengono nella costruzione dello spostamento verso il rosso quando la sorgente sia posta sulla terra (*E*), l'osservatore sul sole (*S*). Dalla direzione delle parallele nulle riconosciamo che ora il moto della terra è diretto verso il sole, e quindi sul sole dovremmo osservare uno spostamento verso il violetto, - come, a causa del carattere statico del campo, risulta anche da una considerazione più immediata.

.
.
.
.