

**Il problema dei campi infinitamente deboli  
nella teoria della gravitazione di Einstein<sup>1</sup>**

Kornel Lanczos a Francoforte s.M.

(ricevuto l'1 novembre 1924)

*Si tratta il problema di come un dato campo metrico, curvo in un qualche modo, sia modificato dall'introduzione di una materia infinitamente debole. Si enunciano le equazioni di campo del problema, e la loro soluzione è ricondotta ad un "tensore di Green". Si sviluppa un nuovo metodo per la soluzione delle equazioni differenziali tensoriali: quello delle "equazioni integrali tensoriali". Esse sono in stretto rapporto con le equazioni integrali di Fredholm.*

1. *Introduzione.* La teoria della gravitazione di Einstein pone una relazione di geometria differenziale tra la metrica dell'universo e la materia. Il tensore di curvatura riemanniano  $R_{ik}$  è fissato dalla materia, e poiché l'elemento di linea è caratterizzato fino ad un certo punto dal tensore di curvatura, si proporrebbe l'idea di trattare la materia per così dire come generatrice del campo. Si potrebbe avanzare la proposta di calcolare il tensore fondamentale dalla materia, come nella situazione in cui la materia fosse data come funzione della posizione. Ma in realtà metrica e materia sono così strettamente e così simultaneamente tra loro collegate che non si può parlare di un rapporto di causa ed effetto di qualche tipo. Infatti non ha senso alcuno presupporre le dieci componenti  $T_{ik}$  del tensore materiale come funzioni delle quattro coordinate e da esse determinare la metrica, poiché queste componenti sono proprio rese possibili dal fatto che noi abbiamo già prima introdotto una metrica.

Ma una proposta così fatta ha significato, quando si tratti

---

<sup>1</sup>Zeitschr. f. Phys. **31**, 112 (1925).

non di una generazione, bensì solamente di un'influenza sul campo metrico, e in particolare in primo luogo di un'influenza infinitamente debole. Pensiamo ad un campo metrico dato in qualche modo, nel quale introduciamo una materia, il cui tensore d'universo sia ovunque misurato e dato. Possiamo ora chiederci: quant'è grande la variazione del campo metrico provocata, supponendo che essa rimanga così piccola, che a seguito di essa le componenti del tensore materiale risultino modificate impercettibilmente? Il campo così modificato lo possiamo poi deformare ulteriormente per sovrapposizione di un nuovo strato di materia e così via; si può in conclusione con l'esecuzione successiva di deformazioni infinitamente piccole realizzare una deformazione arbitrariamente grande. Mediante questo procedimento di una distorsione graduale della superficie d'universo la proposta di determinare il tensore metrico dalla materia ottiene per la prima volta un contenuto razionale.

Il metodo più semplice per una siffatta costruzione graduale del campo consiste nel trattare il fattore  $k$  nelle equazioni

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = kT_{ik} , \quad (1)$$

che invero è una costante universale, come un parametro variabile, che si può far crescere con continuità a partire dallo zero fino al suo valore finale. Scegliamo come punto di partenza il sottofondo metrico in assenza di materia, cioè: lo spazio euclideo per le equazioni originarie, una pseudosfera per le equazioni cosmologiche. Trattiamo quindi il tensore metrico  $g_{ik}$  come funzione di  $k$  e lo sviluppiamo in una serie di potenze, i coefficienti della quale si possono senz'altro calcolare sostituendo questa serie nelle equazioni di campo (1). Si vede facilmente<sup>2</sup> che i coefficienti successivi della serie si possono calcolare per integrazioni successive fino ad un ordine alto a piacere, se solo si è in condizione di integrare le equazioni di campo per un campo infinitamente debole. Quest'ultimo problema è stato risolto già da Einstein per il caso euclideo; il caso non euclideo costituirà l'oggetto del presente lavoro.

---

<sup>2</sup>Vedasi a proposito il mio lavoro in ZF. f. Phys. **13**, 7, 1923.

2. *Posizione del problema.* Il metodo di integrazione or ora delineato ha il grave difetto che il dominio di convergenza dello sviluppo in serie resta problematico. E' possibile che non raggiunga il valore di  $k$  desiderato. Inoltre il problema che si offre in realtà ed è realizzato dalla natura ha un carattere alquanto diverso e non se ne può venire a capo con questi metodi.

Sulla base di argomenti plausibili ben noti siamo condotti all'ipotesi che la struttura metrica dell'universo su grande scala non possa essere quasi-euclidea. Sia che lo scostamento dal comportamento euclideo si basi sul fatto che la densità media della materia è diversa da zero, oppure che si debba tener conto di un termine cosmologico (universo iperbolico di de Sitter), ovvero che i due fattori agiscano insieme (universo cilindrico di Einstein), il carattere macroscopico della metrica dell'universo assai probabilmente si discosta nettamente dal comportamento euclideo. Sopra questa base macroscopica della metrica si sovrappongono i campi di gravitazione dei corpi in movimento e degli astri, che ciascuno individualmente - a prescindere dal loro intorno immediato - modificano il campo solo infinitamente poco. Ci interessa proprio questo campo aggiuntivo infinitamente debole, che è generato dai corpi fisici in movimento, mentre il campo metrico di sfondo per conto suo su grandi intervalli di tempo può essere considerato come praticamente immutabile. Con ciò abbiamo descritto nelle sue linee generali il problema della presente ricerca.

Se riusciamo ad integrare le equazioni di campo per una deformazione infinitamente piccola abbiamo trovato allo stesso tempo una generalizzazione desiderabile del metodo della serie. Se infatti il nostro sviluppo in serie precedente risulta divergente per un qualche  $k$ , possiamo scegliere come base una nuova metrica determinata mediante la serie entro il dominio di convergenza, e intraprendere un nuovo sviluppo a partire da questa come superficie di base. Poniamo quindi:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik} + k' T'_{ik} , \quad (2)$$

e sviluppiamo  $g_{ik}$  in potenze di  $k'$ . Il dominio di convergenza di questa serie si estenderà sicuramente al di là di quello della

prima. Possiamo pertanto - eventualmente iterando il procedimento - proseguire l'integrazione delle equazioni della gravitazione di Einstein fino a campi arbitrariamente forti.

3. *Le equazioni di campo per una deformazione infinitamente debole di un dato campo metrico.* Sia dato un certo campo metrico, individuato per il fatto che  $g_{ik}$  è noto in funzione della posizione. Perciò è pure nota la distribuzione delle masse nel campo, poiché possiamo calcolare il tensore di curvatura  $R_{ik}$ . Si introducano in questo campo delle masse che deformino il campo in modo infinitamente debole. Indaghiamo la connessione tra deformazione e masse deformanti. Il tensore metrico  $g_{ik}$  sarà variato della quantità infinitamente piccola  $\delta g_{ik}$ , che d'ora in poi indicheremo con  $\gamma_{ik}$ . Come differenza di due tensori  $\gamma_{ik}$  è un tensore esso stesso.

Poiché il tensore di curvatura  $R_{ik}$  caratterizza la distribuzione di materia, dobbiamo prima di tutto calcolare la sua variazione  $\delta R_{ik}$  per una variazione  $\gamma_{ik}$  applicata a  $g_{ik}$ . Già sappiamo che  $\delta R_{ik}$  è un tensore. Per calcolarlo possiamo quindi prendere a fondamento un sistema di coordinate a piacere, e se riusciamo a portare l'espressione così trovata in una forma invariante, sappiamo di già che abbiamo trovato in questo modo l'espressione generale. Ci poniamo allo scopo in un sistema di coordinate geodetico, nel quale quindi tutte le quantità tra parentesi graffe

$$\left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}$$

si annullano nel punto considerato. Oltre a ciò si porteranno i  $g_{ik}$  nella forma normale ortogonale.

Vediamo immediatamente che il prodotto delle graffe nell'espressione di  $R_{ik}$  non può giocare alcun ruolo, poiché contiene quadraticamente le quantità entro le graffe. Basta quindi che noi consideriamo solo i primi due termini:

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln g}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right] g^{rs} \quad (3)$$

La variazione del primo addendo si compie facilmente, infatti è

$$\frac{\partial^2 \frac{\delta g}{g}}{\partial x_i \partial x_k} ,$$

e poiché

$$\frac{\delta g}{g} = \gamma_{rs} g^{rs} = \gamma \quad (4)$$

è uno scalare, abbiamo qui a che fare con la derivata seconda di uno scalare.

Nel seguito dovremo assai di frequente indicare la "derivazione tensoriale". La designeremo con il simbolo " $\vartheta$ "<sup>3</sup> al posto di " $\partial$ ". E' noto che per questa operazione valgono le stesse regole che per la derivazione ordinaria, con l'eccezione dello scambio dell'ordine di due derivazioni, che qui non è consentito. Abbiamo invece dell'uguaglianza la regola:

$$\frac{\vartheta^2 A_i}{\vartheta x_p \vartheta x_q} = \frac{\vartheta^2 A_i}{\vartheta x_q \vartheta x_p} + R^a_{ipq} A_a , \quad (5)$$

dove  $A_i$  è un vettore,  $R_{kipq}$  il tensore di Riemann-Christoffel. Regole costruite analogamente valgono anche per tensori d'ordine superiore. Nella derivazione tensoriale abbiamo inoltre la grande comodità che il tensore metrico si comporta come una costante rispetto alla derivazione - la sua derivata tensoriale si annulla infatti identicamente - e quindi può essere portato a piacere sotto o fuori dal segno di derivazione.

Vediamo immediatamente che nel nostro sistema di coordinate  $\partial^2 \gamma / (\partial x_i \partial x_k)$  coincide con  $\vartheta^2 \gamma / (\vartheta x_i \vartheta x_k)$ , e abbiamo così già trovato la forma invariante per il primo addendo.

La variazione del secondo addendo dà:

$$- \frac{\partial \delta \begin{bmatrix} i & k \\ s \end{bmatrix}}{\partial x_s} - (\delta g^{rs}) \frac{\partial}{\partial x_s} \begin{bmatrix} i & k \\ r \end{bmatrix} . \quad (6)$$

---

<sup>3</sup> Mi pare che questo simbolismo, per la sua somiglianza con il modo solito di contrassegnare le derivate ordinarie, sia in molti casi più maneggevole ed elastico - in particolare nel caso di derivate multiple - dell'utilizzo dei simboli  $\Gamma$ .

Trattiamo i due termini separatamente. Il primo termine dà:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{is}}{\partial x_k \partial x_s} - \frac{\partial^2 \gamma_{ks}}{\partial x_i \partial x_s} \right) . \quad (7)$$

Per arrivare ad un'espressione invariante, sostituiamo la derivata ordinaria con quella tensoriale. Nel nostro sistema di coordinate si ha:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_s^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} g^{rs} + \gamma_{ks} \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{bmatrix} i & r \\ s & \end{bmatrix} + \gamma_{is} \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{bmatrix} k & r \\ s & \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{is}}{\partial x_k \partial x_s} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i^s}{\partial x_s} + \gamma_{is} \left[ \frac{\partial^2 \gamma_{rs}}{\partial x_r \partial x_k} - \frac{\partial^2 \lg g^{1/2}}{\partial x_s \partial x_k} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x_i \partial x_k} \gamma^{rs} . \end{aligned} \quad (9)$$

Costruiamo ora l'espressione (7); il coefficiente di  $\gamma_{is}$ , a meno del fattore 1/2, è:

$$\frac{\partial^2 \lg g^{1/2}}{\partial x_k \partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \begin{bmatrix} k & r \\ s & \end{bmatrix} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} \right) . \quad (10)$$

Ma si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 \lg g^{1/2}}{\partial x_k \partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{bmatrix} k & s \\ r & \end{bmatrix} = R_{ks} . \quad (11)$$

Esattamente così si può procedere con i coefficienti di  $\gamma_{ks}$ , ed alla fine resta un solo termine:

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x_i \partial x_k} \gamma^{rs} ,$$

che noi ricaviamo dal secondo addendo.

Esprimiamo innanzitutto i  $\delta g_{ik}$  con i  $\gamma_{ik}$ :

$$\delta g^{ik} = -g^{ir} g^{ks} \delta g_{rs} = -\gamma^{ik} \quad (12)$$

e abbiamo a che fare con la seguente espressione:

$$\gamma^{rs} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \begin{bmatrix} i & k \\ r & \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x_i \partial x_k} \right). \quad (13)$$

Ora possiamo grazie alla simmetria del tensore  $\gamma_{ik}$  riunire i coefficienti di  $\gamma^{rs}$  e di  $\gamma^{sr}$ , e abbiamo allora:

$$\frac{1}{2} \gamma^{rs} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \begin{bmatrix} i & k \\ r & \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{bmatrix} i & k \\ s & \end{bmatrix} - \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x_i \partial x_k} \right). \quad (14)$$

L'espressione che sta tra parentesi ha un suo semplice significato invariante. Non è nient'altro che il tensore:

$$R_{irsk} + R_{krsi},$$

quindi - a prescindere dal fattore 2 - la parte simmetrica del tensore di curvatura  $R_{mnpq}$  rispetto al primo e al quarto (ovvero anche al secondo e al terzo) indice. Introduciamo per esso il simbolo  $\bar{R}_{mqnp}$ , poniamo quindi:

$$R_{irsk} + R_{krsi} = 2\bar{R}_{ikrs}. \quad (15)$$

Questo tensore è simmetrico non solo nella prima e nella seconda coppia di indici, ma resta invariato quando si scambino le due coppie di indici:

$$R_{ikmn} = R_{mnik}.$$

Così si è completata la scrittura del tensore  $\delta R_{ik}$ , che indicheremo con  $\rho_{ik}$ , in forma invariante, e troviamo sommando tutti i termini<sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup>Gli ultimi tre termini si possono anche raccogliere con l'introduzione del seguente tensore:

$$B_{ikmn} = R_{imnk} + R_{nkim}.$$

Allora i termini aggiuntivi del secondo membro si possono scrivere:

$$2\bar{B}_{ikrs} \gamma^{rs},$$

dove  $\bar{B}_{ikmn}$  significa la parte simmetrica di  $B_{ikmn}$  rispetto ad  $i, k$ ,

$$2\rho_{ik} = \Delta\gamma_{ik} - \left( \frac{\partial\chi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\chi_k}{\partial x_i} \right) + R_{i\ sk}^s \gamma_{sk} + R_{k\ si}^s \gamma_{si} + 2\bar{R}_{ikrs} \gamma^{rs}. \quad (16)$$

Il simbolo  $\Delta$  ha il significato consueto:

$$\Delta = g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}, \quad (17)$$

e abbiamo introdotto un vettore  $\chi_i$ , che definiamo nel modo seguente:

$$\chi_i = \frac{\partial\gamma_i^s}{\partial x_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}. \quad (18)$$

Poiché siamo in possesso di  $\rho_{ik}$ , daremo l'identità vettoriale che sussiste tra le sue componenti, che si può derivare immediatamente dall'annullarsi della divergenza del tensore  $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$ . Variamo l'equazione:

$$\text{div}_i T = g^{-1/2} \frac{\partial g^{1/2} T_i^s}{\partial x_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} T_p^s g^{pr}, \quad (19)$$

dove:

$$T_i^k = R_i^k - \frac{1}{2}\eta_i^k R \quad (20)$$

( $\eta_i^k$  è il tensore unitario misto). Dobbiamo tener presente che sia  $g_{ik}$  che  $T_i^k$  vanno variati. Da un piccolo calcolo intermedio, che qui sarà soppresso, segue la relazione:

$$-\frac{\partial}{\partial x_s} \delta T_i^s + \frac{1}{2} \frac{\partial\gamma}{\partial x_s} R_i^s - \frac{1}{2} \frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial x_i} R^{rs} = 0. \quad (21)$$

Infatti per la (20):

$$\delta T_i^k = \delta R_i^k - \frac{1}{2}\eta_i^k \delta R. \quad (22)$$

Ma non possiamo porre  $\delta R_i^k = \rho_i^k$ . Abbiamo invece:

$$\delta R_i^k = \delta(R_{is} g^{ks}) = g^{ks} \delta R_{is} + R_{is} \delta g^{ks} = \rho_i^k - R_{is}^s g^{ks}. \quad (23)$$

Risulta quindi:

quindi:

$$\bar{B}_{ikmn} = \frac{1}{2} (B_{ikmn} + B_{kimn}).$$



$$\delta T_i^k = \rho_i^k - R_{is} \gamma^{ks} - \frac{1}{2} \eta_i^k (\rho - R_{rs} \gamma^{rs}) . \quad (24)$$

Se poniamo quest'espressione nella (21) risulta infine:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (\rho_i^s - \frac{1}{2} \eta_i^s \rho) = \frac{1}{2} \gamma^{rs} \left( \frac{\partial R_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial R_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial R_{rs}}{\partial x_i} \right) + R_i^s \chi_s . \quad (25)$$

Quest'identità si può anche derivare direttamente dall'equazione (16) mediante un calcolo alquanto faticoso, derivando tensorialmente  $\rho_i^s$  rispetto ad  $x_s$  ed eseguendo poi i relativi scambi nell'ordine di derivazione, tenendo conto delle regole che valgono per questi.

Veniamo ora al problema di mettere in relazione la variazione del tensore di curvatura con la variazione del tensore materiale. A ciò si oppone una difficoltà peculiare, che pare stia nell'essenza del problema. Non è possibile distinguere in un modo invariante univoco la materia aggiuntiva da quella già esistente. Ciò dipende dal fatto che non si deve variare soltanto il tensore materiale ma anche il tensore metrico. Se eseguiamo la variazione del tensore materiale otteniamo tensori del tutto diversi a seconda che utilizziamo come punto di partenza per esempio le componenti covarianti, quelle controvarianti o quelle miste. D'altronde questa molteplicità sussiste solo in quei punti dove nel campo di sfondo è presente della materia, mentre nello spazio vuoto l'indeterminazione scompare. Poiché ora la materia introdotta nel campo risulta sempre essere immersa nello spazio vuoto, la difficoltà appare in pratica senza importanza. Ma è un errore credere che noi possiamo introdurre nel campo una materia senza con ciò modificare l'intero campo materiale già prima esistente. Il tensore metrico è cambiato in generale sull'intero campo, e se per esempio assumiamo che le componenti covarianti del tensore materiale restino invariate, cambierebbero quelle controvarianti e via dicendo. Questa peculiare "azione a distanza" della materia (una specie di "influenza") può evidentemente superare l'effetto proprio, solo che nella regione influenzata si abbia una curvatura riemanniana (densità di massa) abbastanza forte del campo di sfondo. A causa dell'equazione della divergenza sussistono delle relazioni integrali tra la materia complessiva,

di modo che è impossibile isolare una regione parziale.

Lo sviluppo matematico mostra che la caratterizzazione più semplice e più naturale della materia aggiuntiva può esser data mediante le componenti miste  $T_i^k$ . Variamo l'equazione:

$$R_i^k = T_i^k - \frac{1}{2} \eta_i^k T \quad (20')$$

(abbiamo posto il solito fattore  $k=1$ , cosa che corrisponde a scegliere un'unità di massa naturale) e troviamo, tenendo conto della (23):

$$\rho_i^k - R_{is}^k \gamma^{ks} = \delta T_i^k - \frac{1}{2} \eta_i^k \delta T . \quad (26)$$

Poniamo provvisoriamente:

$$\delta T_i^k = \bar{\tau}_i^k ,$$

e abbassiamo l'indice  $k$ ; è allora:

$$\rho_{ik} - R_{i ks}^s \gamma = \bar{\tau}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \bar{\tau} . \quad (27)$$

Riconosciamo che il tensore  $\bar{\tau}_{ik}$  stranamente non è simmetrico. Ma noi abbiamo bisogno solo della sua parte simmetrica, per la quale scambiamo gli indici e prendiamo la media aritmetica. Il tensore simmetrico così ottenuto lo considereremo come il tensore materiale del campo aggiuntivo infinitamente debole e lo indicheremo con  $\tau_{ik}$ :

$$\tau_{ik} = \frac{1}{2} (\bar{\tau}_{ik} + \bar{\tau}_{ki}) .$$

Risulta quindi:

$$\rho_{ik} - \frac{1}{2} (R_{i ks}^s \gamma + R_{k is}^s \gamma) = \tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \tau , \quad (28)$$

e quando vi sostituiamo l'espressione (16) trovata per  $\rho_{ik}$ , vediamo che i termini di mezzo van via e rimane la seguente relazione:

$$\Delta \gamma_{ik} - \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} \right) + 2 \bar{R}_{ikrs} \gamma^{rs} = 2 (\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \tau) . \quad (29)$$

Se il campo di sfondo è euclideo, il termine che contiene il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel sparisce dal primo

membro e le equazioni assumono la forma nota dalla teoria del campo quasi-euclideo infinitamente debole. Questo è il solo caso in cui il terzo termine si annulla in tutte le sue componenti.

È notevole che le equazioni (29) restino immutate anche nel caso delle equazioni cosmologiche. L'intera differenza è allora infatti che a primo membro dell'equazione (20') interviene additivamente un termine  $\lambda \eta_i^k$ . Ma poiché  $\lambda$  è costante, la variazione non sarà influenzata da questo termine.

4. *Introduzione di un sistema di coordinate naturale.* Le equazioni di campo (29) rappresentano le masse deformanti  $\tau_{ik}$  in funzione della deformazione del campo. Si può porre il problema a rovescio: determinare la variazione del campo - quindi  $\gamma_{ik}$  - dalle masse aggiunte  $\tau_{ik}$ . Il secondo membro dell'equazione (29) è allora dato, e abbiamo a che fare con un sistema simultaneo di equazioni differenziali alle derivate parziali del second'ordine per  $\gamma_{ik}$ , che dev'essere risolto.

Evidentemente la nostra soluzione non può essere unica, poiché le nostre equazioni ammettono ogni arbitraria trasformazione di coordinate, e anche in questo modo si può produrre un campo infinitamente debole. Basta solo che si ponga:

$$x'_i = x_i + \epsilon f_i(x_k) .$$

Un tale campo generato mediante trasformazione si può sempre scrivere in modo covariante nella forma seguente:

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} , \quad (30)$$

dove  $\Phi_i$  indica un vettore arbitrario. Lo si verifica facilmente in un sistema di coordinate geodetico. La nostra soluzione può quindi essere determinata solo a meno dell'aggiunta di un'espressione della forma (30). Infatti si può facilmente dimostrare mediante sostituzione diretta nelle equazioni di campo che il primo membro non è variato dalla (30), ma solo nelle regioni dove il campo di sfondo è privo di materia (quindi  $R_{ik} = 0$ ), altrimenti otteniamo una variazione. Ciò dipende dal fatto che, in presenza di materia nel campo di sfondo, anche le  $\tau_{ik}$  sono influenzate da una trasformazione di coordinate.

Possiamo togliere l'indeterminazione del sistema di coordinate se poniamo a fondamento un sistema determinato, contraddistinto dalla sua semplicità. Abbiamo disponibile una condizione vettoriale, e s'offre da sè, cioè di porre il vettore

$$\chi_i = 0 \quad (31)$$

proprio come si suol fare per campi quasi-euclidei. Per ottenere ciò con una trasformazione di coordinate dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$\Delta\Phi_i - R_i^s \Phi_s = \chi_i . \quad (32)$$

Possiamo imporre la condizione (31) solo quando questa equazione può essere soddisfatta per  $\chi_i$  qualsiasi. Presupporremo che ciò sia possibile. Vediamo allora che il nostro sistema di coordinate è fissato ora univocamente. Infatti l'equazione omogenea (32) con  $\chi_i=0$  non ha alcuna soluzione diversa da zero, supposto che  $\Phi_i$  debba annullarsi sul contorno della regione considerata (perché ivi  $g_{ik}$  assume dei valori determinati).

Nel nuovo sistema di coordinate le nostre equazioni di campo appaiono nella forma semplificata seguente:

$$\Delta\gamma_{ik} + 2\bar{R}_{ikrs} \gamma^{rs} = 2(\tau_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik} \tau) . \quad (33)$$

Indicheremo queste equazioni come "equazioni abbreviate". Si pone la domanda se, quando abbiamo risolto le equazioni abbreviate, sia con ciò assicurata anche la soluzione delle equazioni originarie. Ciò accade se e solo se il vettore  $\chi_i$  da calcolarsi dalla soluzione risulti nullo. Ora sussiste tra le dieci componenti delle equazioni di campo originarie un'identità vettoriale, cioè la condizione sulla divergenza, che abbiamo già sviluppato in occasione del calcolo di  $\rho_{ik}$  [equazione (25)]. Per le equazioni di campo abbreviate un'identità siffatta non sussiste. Se eseguiamo ora la stessa operazione, invece che allo zero arriviamo all'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial x_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial x_i} \right) g^{rs} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2 \frac{\partial \Phi^s}{\partial x_s} \right) .$$

Ora la materia  $\tau_{ik}$  è data in modo tale da soddisfare la condizione

della divergenza [e ciò dev'essere presupposto, perché le equazioni (29) abbiano una soluzione], quindi questo vettore deve annullarsi. Tenendo conto della regola (5) per la commutazione della derivazione abbiamo:

$$\Delta\chi_i - R_i^s \chi_s = 0 . \quad (34)$$

Ma quest'equazione, come abbiamo detto, non ha alcuna soluzione regolare diversa da zero, quando  $\chi_i$  si annulla sul contorno. Vediamo quindi che, nel caso che l'abbreviazione sia permessa, la soluzione delle equazioni abbreviate dà parimenti la soluzione delle equazioni originarie, ammesso che la materia, supposta continua, soddisfi ovunque la condizione della divergenza e che inoltre il vettore  $\chi_i$  da calcolarsi a partire dalla soluzione si annulli sul contorno della regione.

5. *Soluzione delle equazioni di campo abbreviate mediante un tensore di Green.* Possiamo oramai limitarci alla considerazione delle equazioni (33), e indicheremo per brevità con  $E(\gamma_{ik})$  il loro primo membro:

$$E(\gamma_{ik}) = \Delta\gamma_{ik} + 2R_{ikrs} \gamma^{rs} . \quad (35)$$

Pensiamo sia dato un tensore ausiliario  $U_{ik}$ , che soddisfi l'equazione omogenea:

$$E(U_{ik}) = 0 , \quad (36)$$

e costruiamo lo scalare:

$$U^{rs} E(\gamma_{rs}) - \gamma^{rs} E(U_{rs}) . \quad (37)$$

Abbiamo visto che il tensore  $R_{ikrs}$  resta invariato per scambio di  $(i,k)$  con  $(r,s)$ , e riconosciamo quindi che nell'eseguire i prodotti le quantità  $\gamma$  ed  $U$  possono essere scambiate in questo termine e pertanto spariscono dalla differenza. Rimane quindi:

$$U^{rs} E(\gamma_{rs}) - \gamma^{rs} E(U_{rs}) = U^{rs} \Delta\gamma_{rs} - \gamma^{rs} \Delta U_{rs} . \quad (38)$$

Eseguiamo ora un'integrazione per parti, e scriviamo:

$$U^{rs} \frac{\partial^2 \gamma_{rs}}{\partial x_p \partial x_q} g^{pq} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left( U^{rs} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_q} g^{pq} \right) - \frac{\partial U^{rs}}{\partial x_p} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_q} g^{pq} . \quad (39)$$

Costruendo la differenza il secondo termine sparisce di nuovo, poich  anche qui  $U$  e  $\gamma$  sono commutabili. Ci  che resta  :

$$U^{rs} E(\gamma_{rs}) - \gamma^{rs} E(U_{rs}) = \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_s} = \text{div} \lambda , \quad (40)$$

quando poniamo:

$$\lambda_i = U^{rs} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_i} - \gamma^{rs} \frac{\partial U_{rs}}{\partial x_i} . \quad (41)$$

Ma sappiamo che la divergenza di un vettore consente senz'altro l'applicazione del teorema integrale di Gauss, quando la si integri, moltiplicata per l'elemento di volume  $dv$ , su un certo volume. L'esecuzione della corrispondente trasformazione d  l'equazione:

$$\iint \left( U^{rs} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial \nu} - \gamma^{rs} \frac{\partial U_{rs}}{\partial \nu} \right) df = \int U^{rs} \psi_{rs} dv . \quad (42)$$

L'integrazione del primo membro va estesa sulla superficie di contorno del dominio d'integrazione, dove la normale va orientata verso l'interno. La "derivata lungo la normale" indica la seguente operazione scalare:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \nu^s \frac{\partial}{\partial x_s} , \quad (43)$$

e infine abbiamo posto:

$$-2(\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \tau) = \psi_{ik} . \quad (44)$$

La relazione fondamentale (42), alla quale siamo giunti, configura un'analogia completa con il noto teorema di Green della teoria del potenziale. Noi possiamo nell'ulteriore procedimento di soluzione della nostra equazione differenziale collegarci strettamente agli sviluppi in essa consueti. La differenza caratteristica   solo che come funzione ausiliaria qui non compare uno scalare, ma un tensore. Di conseguenza avremo da parlare non di una "funzione di Green", ma di un "tensore di Green".

Per le dimostrazioni generali fino a questo punto era del tutto equivalente che l'elemento di linea avesse o meno un carattere definito positivo. Da qui in avanti le due possibilità invece si diramano, poiché il comportamento della funzione di Green in un caso e nell'altro è essenzialmente diverso. Volgeremo prima l'attenzione al caso matematicamente classico e naturale di un elemento di linea puramente ellittico. Fisicamente a questo caso appartengono i processi statici o quasi statici, per i quali si può prescindere dalla quarta coordinata.

In questo caso possiamo prescrivere per la funzione  $U_{ik}$  oltre al soddisfacimento dell'equazione (36) anche le seguenti proprietà. Essa deve annullarsi sul contorno della regione. Dev'essere ovunque ad un sol valore e regolare, con l'eccezione di un solo punto, che indicheremo brevemente con  $\sigma$ . In questo punto la funzione potrà avere degli infiniti, come  $1/r$  nello spazio tridimensionale, come  $1/r^2$  nello spazio tetradimensionale (in generale, come  $1/r^{n-2}$  nello spazio  $n$ -dimensionale).

Se abbiamo un tensore così fatto, evidentemente l'integrale di superficie

$$- \int \frac{\partial U_{ik}}{\partial v} df, \quad (45)$$

esteso a una sfera infinitamente piccola che comprende il punto  $\sigma$ , tenderà ad un limite finito. Lo chiameremo il "tensore polo" della funzione  $U_{ik}$  e lo indicheremo provvisoriamente con  $\alpha_{ik}$ . Specifichiamo questo tensore come segue. Le sue componenti controvarianti devono essere tutte nulle, con l'eccezione di una sola, per esempio  $\alpha^{mn}$ , che dev'essere =1. Facendo passare tutte le coppie  $(m,n)$  arriviamo ad una intera serie di quantità, che appartengono tutte alla funzione  $U_{ik}$ , e riguardo alle quali possiamo riconoscere facilmente che, prese complessivamente in relazione a  $(m,n)$ , si comportano rispetto ad una trasformazione di coordinate nel punto  $\sigma$  come le componenti covarianti di un tensore. L'oggetto così risultante lo chiamiamo nella sua totalità un "tensore di Green" e lo indichiamo nel modo seguente:

$$G_{mn}(\sigma, s)_{ik}. \quad (46)$$

Esso significa quanto segue. Il tensore di Green dipende da due punti della regione: dal punto fisso  $\sigma$  e dal punto variabile  $s$ , e

più precisamente in modo tensoriale da entrambi i punti. Per una trasformazione nel punto  $\sigma$  le sue componenti  $(m,n)$  si trasformano in modo covariante, mentre  $(i,k)$  restano immutate. Per una trasformazione nel punto  $s$  le sue componenti  $(i,k)$  si trasformano in modo covariante, mentre  $(m,n)$  restano invariate<sup>5</sup>.

Consideriamo ora due tensori di Green, che possono appartenere ai due punti fissi  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Costruiamo l'operazione (37), dove sostituiamo  $\gamma_{ik}$  con il secondo tensore di Green. La trasformazione di Gauss porta allora all'equazione (42), dove

---

<sup>5</sup>Nota alla correzione. Nella stesura di questo lavoro non ho purtroppo abbastanza tenuto conto della letteratura matematica già disponibile. Devo quindi indicare a questo punto che già Hilbert nelle sue fondamentali dissertazioni sulle equazioni integrali (pubblicate, raccolte in un volume, nel 1912 da Teubner) ha utilizzato il "tensore di Green" per la soluzione di equazioni differenziali simultanee. (p. 206-212, vedi anche per un'informazione generale sulla teoria delle equazioni integrali il libro particolarmente adatto di Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I. p.316, Springer, 1924). In esso si tratta naturalmente solo di uno spazio euclideo. La costruzione data sopra può esser più vicina al modo di pensare del fisico con interessi teorici. Inoltre con la formulazione covariante è posto nella giusta luce il vero carattere tensoriale del tensore di Green. Finché ci limitiamo alle coordinate rettangolari dello spazio euclideo ed alle loro trasformazioni lineari, è sufficiente non distinguere gli indici a sinistra e a destra della parentesi, poiché allora i due punti  $s$  e  $\sigma$  si trasformano nello stesso modo. Potrebbe sembrare allora che nel caso del tensore di Green si abbia a che fare con un tensore d'ordine  $2m$ , mentre in realtà è un tensore di ordine  $m$ , ma che dipende tensorialmente allo stesso modo da due punti della regione. Nell'esempio scelto da Hilbert di un sistema vettoriale di equazioni differenziali si ha a che fare di conseguenza con un "vettore di Green" e non con un "tensore di Green" (la parola "tensore" viene qui utilizzata nel senso consueto di tensore di secondo grado). La differenza caratteristica si fa notare nella presentazione invariante di analisi tensoriale.



tuttavia si deve porre  $\psi_{ik}=0$ . L'integrale di superficie evidentemente va sempre esteso solo alla sfera infinitamente piccola che racchiude i due punti singolari  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e arriviamo alla seguente relazione fondamentale:

$$G_{mn}(\sigma, s)_{ik} = G_{ik}(s, \sigma)_{mn} . \quad (47)$$

*Punto fisso e punto variabile sono quindi permutabili tra loro (analogamente al caso della funzione di Green), purché anche le componenti corrispondenti vengano scambiate.* Chiamiamo questa la "proprietà di simmetria" del tensore di Green.

Per mezzo del tensore di Green l'equazione differenziale (33) si può risolvere con una pura integrazione. Infatti se sostituiamo nell'equazione (42) al posto della funzione  $U_{ik}$  il tensore di Green arriviamo, esattamente secondo lo stesso schema della teoria del potenziale, alla formula seguente:

$$\gamma_{ik}(s) = \int \psi^{mn}(\sigma) G_{mn}(\sigma, s)_{ik} dv + \int \gamma^{mn}(\sigma) \frac{\partial G_{mn}(\sigma, s)_{ik}}{\partial v} dF . \quad (48)$$

Il primo integrale va esteso all'intero volume, il secondo al contorno della regione.

Con ciò è risolto il problema: determinare la deformazione del campo  $\gamma_{ik}$  per masse deformanti  $\tau_{ik}$  assegnate e per valori al contorno di  $\gamma_{ik}$  assegnati<sup>6</sup>. Se si ha a che fare con una regione chiusa senza contorno, l'integrale sul contorno sparisce e la deformazione del campo è allora rappresentata dalle masse deformanti solo in termini di sorgenti. Il tensore di Green utilizzato per la soluzione è determinato unicamente dal comportamento metrico del campo di sfondo assegnato e dal contorno dello stesso.

---

<sup>6</sup>*Nè la materia nè i valori al contorno possono essere prescritti liberamente, se le equazioni abbreviate devono fornire parimenti la soluzione di quelle complete. Da un lato dev'essere soddisfatta la condizione della divergenza, dall'altro la condizione al contorno  $\chi_i = 0$ .*

6. *Introduzione delle equazioni integrali tensoriali. Riconduzione delle stesse ad un'equazione integrale di Fredholm.* La forma di rappresentazione integrale del tensore  $\gamma_{ik}$  nel senso dell'equazione (48) ci permette di introdurre equazioni integrali lineari di tipo tensoriale, che stanno con la soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali per funzioni tensoriali nello stesso rapporto che le equazioni integrali scalari di Fredholm hanno con la soluzione di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali scalari.

Si cerchi una funzione tensoriale  $\varphi_{ik}$  che soddisfi la seguente equazione:

$$\varphi_{ik}(s) - \lambda \int \varphi^{mn}(\sigma) K_{mn}(\sigma, s)_{ik} d\sigma = f_{ik}(s) \quad (49)$$

( $d\sigma$  = elemento di volume), dove  $f_{ik}(s)$  è una funzione assegnata<sup>7</sup>. Quando  $f_{ik}(s)$  si annulla identicamente parliamo anche qui di "equazione integrale omogenea". Chiamo la funzione  $K_{mn}(\sigma, s)_{ik}$  il "nucleo" dell'equazione integrale. Le sue proprietà sono chiare dagli sviluppi precedenti. Essa dipende tensorialmente da entrambi i punti  $\sigma$  e  $s$  e si trasforma in modo covariante nelle componenti  $i, k$ , quando viene trasformata nel punto  $s$ , e allo stesso modo nelle componenti  $m, n$ , quand'è trasformata in  $\sigma$ . Rileviamo immediatamente dalle equazioni la loro completa invarianza rispetto a trasformazioni arbitrarie. Se si trasforma nel punto  $\sigma$ , le singole equazioni restano immutate a seguito della sommatoria rispetto a  $m, n$ ; se si esegue la trasformazione nel punto  $s$ , entrambi i membri del sistema si trasformano in modo covariante in  $i, k$ .

A seguito della libera scelta del sistema di coordinate possiamo pensare introdotte in ogni singolo punto delle coordinate

---

<sup>7</sup>Nota alla correzione. Si ottiene un modo di scrittura più piacevole, se sotto il segno d'integrale si sceglie il nucleo come primo fattore. Ho presentato le equazioni in questa forma nella dissertazione "Über tensorielle Integralgleichungen" che apparirà tra poco su "Mathematischen Annalen". Per il presente lavoro il cambiamento sarebbe oneroso e viene quindi tralasciato.

cartesiane<sup>8</sup>; allora le componenti controvarianti non si distinguono dalle covarianti, e l'equazione (49) si può anche riscrivere nella forma seguente

$$\varphi_{ik}(s) - \lambda \int \varphi_{mn}(\sigma) K_{mn}(\sigma, s)_{ik} d\sigma = f_{ik}(s) . \quad (50)$$

La trattazione di una siffatta equazione integrale tensoriale non solo si può svolgere in piena analogia con i metodi di Fredholm, ma addirittura possiamo trattare l'intero sistema di equazioni direttamente come una sola equazione integrale di Fredholm, in base alla seguente semplice considerazione. I metodi di soluzione di un'equazione integrale si fondano notoriamente sul fatto che si sostituisce l'integrale con una somma e poi si lascia crescere all'infinito il numero dei termini della somma. Pensiamo l'intera regione d'integrazione suddivisa in celle d'ugual volume così numerose che in pratica si possa sostituire l'integrale con una somma sopra queste celle. L'unità di lunghezza sia scelta per semplicità in modo tale che il volume di queste celle sia =1. Ogni cella può essere individuata mediante quattro (in generale  $n$ ) numeri interi. Abbiamo da sommare da un lato sulla totalità delle

---

<sup>8</sup> E' evidentemente impossibile portare un elemento di linea non euclideo ad una forma euclidea su una regione finita mediante una trasformazione  $x'_i = f_i(x_k)$ . Ma ciò è ben possibile attraverso una trasformazione del differenziale  $dx_i$ . Se poniamo  $dx_i = \alpha_{is} d\xi_s$ , possiamo trasformare in una regione finita l'elemento di linea nella forma  $ds^2 = \sum (d\xi_s)^2$ , dove gli  $\alpha_{ik}$  possono essere continui sull'intera regione. Il comportamento non euclideo di questo elemento di linea si rende osservabile dal fatto che i  $d\xi_i$  non son più dei differenziali esatti, e quindi non si può porre  $(d\xi_i) = d(\xi_i)$ . Poiché nell'equazione integrale (49) non intervengono derivate, questa circostanza è senza conseguenze. Eliminiamo in questo modo in una certa misura dalla nostra equazione integrale il comportamento non euclideo dell'elemento di linea e otteniamo eseguendo la trasformazione un nuovo nucleo  $K_{mn}(\sigma, s)_{ik}$  e nuove funzioni  $f_{ik}(s)$  e  $\varphi_{ik}(s)$ , che ora appartengono ad un'equazione integrale tensoriale di una regione puramente euclidea con coordinate rettangolari.

celle, dall'altro per ogni cella sui numeri interi  $m$  ed  $n$ . E' evidentemente come se se avessimo a che fare con uno spazio a  $4+2=6$  dimensioni e costruissimo delle celle, che fossero individuate oltre che dai precedenti quattro numeri anche dai due numeri  $m$  ed  $n$ . Abbiamo quindi da eseguire solo una somma semplice sulla totalità delle celle.

Estendiamo quindi la nostra regione  $n$ -dimensionale ad una con  $n+2$  dimensioni, in modo che un punto  $\bar{s}$  di questa regione estesa sia caratterizzato oltre che dalle coordinate precedenti anche da, diciamo,  $x$  ed  $y$ . Il campo di variabilità delle ultime coordinate sia ristretto tra zero ed  $n$ . Associamo a questo punto  $\bar{s} = (s, x, y)$  il valore della funzione  $\varphi(\bar{s})$  come segue. Quando  $x$  è compreso tra i numeri interi  $i-1$  ed  $i$ , ed  $y$  tra i numeri interi  $k-1$  e  $k$ , si pone:

$$\varphi(\bar{s}) = \varphi_{ik}(s) .$$

Sia parimenti:

$$f(\bar{s}) = f_{ik}(s) .$$

Quando inoltre consideriamo un secondo punto  $\bar{\sigma}$ , la cui  $x$  può cadere tra  $m-1$  ed  $m$ , e la cui  $y$  tra  $n-1$  ed  $n$ , associamo ai due punti  $\bar{s}$  e  $\bar{\sigma}$  il seguente valore del nucleo  $K(\bar{\sigma}, \bar{s})$ :

$$K(\bar{\sigma}, \bar{s}) = K_{mn, ik}(\sigma, s) .$$

Riconosciamo che possiamo sostituire la nostra equazione integrale (50) con la seguente equazione integrale di Fredholm in questo spazio ad  $n+2$  dimensioni:

$$\varphi(\bar{s}) - \lambda \int \varphi(\bar{\sigma}) K(\bar{\sigma}, \bar{s}) d\bar{\sigma} = f(\bar{s}) . \quad (51)$$

Infatti l'integrazione sui pezzi delle funzioni  $\varphi$  e  $K$  costruiti a gradini nelle dimensioni  $n+1$  ed  $n+2$  si può sostituire mediante una semplice somma, e ritorniamo proprio alla nostra equazione (50).

*Un'equazione tensoriale del second'ordine in uno spazio riemanniano  $n$ -dimensionale si può ricondurre ad una sola equazione integrale scalare di Fredholm in uno spazio euclideo ad  $n+2$  dimensioni<sup>9</sup>.*

---

<sup>9</sup>Si possono in modo del tutto analogo costruire anche "equazioni integrali vettoriali" che sono equivalenti ad un'equazione

Tuttavia il nucleo e la funzione di questa equazione integrale di Fredholm non sono più continui, essi presentano invece nelle dimensioni  $n+1$  ed  $n+2$  delle discontinuità a gradino. Queste discontinuità possono essere eliminate dal nucleo, interponendo tra due gradini adiacenti una salita lineare per il tratto arbitrariamente piccolo  $\pm \varepsilon$ , con tangente finita. Si modificherà analogamente anche la funzione  $f(\bar{s})$ . Si vede facilmente che la funzione  $\varphi(\bar{s})$ , definita mediante un nucleo e una funzione sorgente continui così fatti, ora divenuta ovunque continua, si discosta da  $\varphi_{ik}(s)$  solo arbitrariamente poco, se si esclude la regione  $\pm \varepsilon$  arbitrariamente stretta attorno alle posizioni intere  $x=i, y=k$ . Le discontinuità della nostra equazione integrale possono quindi essere eliminate con precisione arbitraria.

Pertanto abbiamo a disposizione nella teoria delle equazioni integrali lineari uno strumento potente, che può essere reso fruttuoso per gli scopi del calcolo differenziale tensoriale. Dai noti teoremi della teoria delle equazioni integrali scalari si possono immediatamente derivare teoremi corrispondenti per le equazioni integrali tensoriali. Quando per esempio abbiamo il teorema: "A ogni nucleo  $K(\bar{\sigma}, \bar{s})$  appartiene un nucleo risolvente  $\mathbf{K}(\bar{\sigma}, \bar{s})$ , per mezzo del quale la funzione cercata  $\varphi(\bar{s})$  può essere rappresentata nel modo seguente":

$$\varphi(\bar{s}) = f(\bar{s}) + \lambda \int f(\bar{\sigma}) \mathbf{K}(\bar{\sigma}, \bar{s}) d\bar{\sigma} ,$$

questo teorema si traspone nel caso tensoriale come segue: "A ogni nucleo  $K_{mn}(\sigma, s)_{ik}$  di un'equazione integrale tensoriale appartiene un "nucleo risolvente"  $\mathbf{K}_{mn}(\sigma, s)_{ik}$ , per mezzo del quale il tensore cercato  $\varphi_{ik}(s)$  può essere rappresentato nel modo seguente":

-----

*integrale di Fredholm in  $n+1$  dimensioni. Ad un'equazione siffatta porta per esempio la trattazione dell'equazione (32). Parimenti non costituisce un problema un incremento a piacere del numero degli indici, di modo che con lo stesso procedimento si possono costruire equazioni tensoriali integrali di ordine arbitrariamente alto - per esempio  $m$ -esimo - che possono essere sostituite da una sola equazione integrale scalare su una regione euclidea ad  $n+m$  dimensioni.*

$$\varphi_{ik}(s) = f_{ik}(s) + \lambda \int f_{mn}^{mn}(\sigma) \mathbf{K}_{mn}(s, \sigma)_{ik} d\sigma . \quad (52)$$

Relazioni particolarmente importanti valgono per nuclei *simmetrici*. Se ne presenta uno, quando  $\sigma$  ed  $s$  nella funzione  $K$  sono commutabili:

$$K(\bar{\sigma}, \bar{s}) = K(\bar{s}, \bar{\sigma}) .$$

Trasposta al nostro caso, significa la condizione seguente:

$$K_{mn}(s, \sigma)_{ik} = K_{ik}(s, \sigma)_{mn} , \quad (53)$$

cioè proprio quella relazione, che nel caso del tensore di Green noi abbiamo riconosciuto come "proprietà di simmetria" di questo. Il tensore di Green è allora un "nucleo simmetrico".

La relazione di ortogonalità di due "autofunzioni" di un nucleo simmetrico appartenenti ad "autovalori"  $\lambda_{\mu}$  e  $\lambda_{\nu}$  distinti si scrive ora come segue:

$$\int \varphi_{mn}^{(\mu)}(s) \varphi_{mn}^{(\nu)}(s) ds = 0 . \quad (54)$$

Si costruisce in modo analogo la condizione di normalizzazione per le autofunzioni:

$$\int \varphi_{mn}^{(\nu)}(s) \varphi_{mn}^{(\nu)}(s) ds = 1 . \quad (55)$$

La formula bilineare sviluppa un nucleo simmetrico secondo le sue autofunzioni nella serie infinita seguente, supposto che la stessa converga uniformemente:

$$K_{ik}(s, \sigma)_{mn} = \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_{ik}^{(\nu)}(s) \varphi_{mn}^{(\nu)}(\sigma)}{\lambda_{\nu}} . \quad (56)$$

Anche il nucleo risolvete che appartiene ad un nucleo simmetrico si può sviluppare in una serie siffatta, cioè:

$$\mathbf{K}_{ik}(s, \sigma)_{mn} = \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_{ik}^{(\nu)}(s) \varphi_{mn}^{(\nu)}(\sigma)}{\lambda - \lambda_{\nu}} . \quad (57)$$

Anche un tensore arbitrario  $f_{ik}(s)$ , sottoposto soltanto a certe restrizioni generali, può essere sviluppato secondo le autofunzioni di un nucleo simmetrico in una serie infinita:

$$f_{ik}(s) = \sum_{(\nu)} \alpha_{\nu} \phi_{ik}^{(\nu)}(s) , \quad (58)$$

dove le  $\alpha_{\nu}$  sono costanti. In particolare un tensore arbitrario due volte derivabile, che si annulla sul contorno della regione, si può sviluppare secondo le autofunzioni di un tensore di Green.

Riconosciamo la portentosa perspicuità e la chiarezza che può essere raggiunta mediante il metodo delle equazioni integrali in un problema di per sè così difficile, come la soluzione di un sistema simultaneo di equazioni differenziali alle derivate parziali del second'ordine.

7. *Soluzione delle equazioni di campo abbreviate mediante un'equazione integrale.* Invece di cercare il tensore di Green per l'espressione differenziale  $E(\gamma_{ik})$  è sufficiente risolvere il problema più facile di trovare il tensore di Green per l'espressione  $\Delta\gamma_{ik}$ . Supponiamo di conoscerlo e costruiamo con questo tensore di Green, che indicheremo in seguito con  $G_{ik}(s, \sigma)_{mn}$ , sostituendolo al posto di  $U_{ik}$ , la differenza (37); riconosciamo allora che dal secondo membro dell'equazione (42) ora viene il seguente integrale:

$$2 \int \gamma_{rs} \bar{R}^{rsmn} G_{mn}(\sigma, s)_{ik} d\sigma , \quad (59)$$

di modo che la soluzione data dall'equazione (48) risulta scritta nel modo seguente:

$$\gamma_{ik}(s) - 2 \int \gamma^{mn}(\sigma) \bar{R}_{mn}^{rs}(\sigma) G_{rs}(\sigma, s)_{ik} d\sigma = f_{ik}(s) . \quad (60)$$

L'intero secondo membro dell'equazione (48), costruito con il nuovo tensore di Green, è ora indicato con  $f_{ik}(s)$ . Siamo evidentemente davanti ad un'equazione della forma (49), con  $\lambda=1$  e con un nucleo che è costituito nel modo seguente:

$$K_{mn}(\sigma, s)_{ik} = 2 \bar{R}_{mn}^{rs}(\sigma) G_{rs}(\sigma, s)_{ik} . \quad (61)$$

Ora questo nucleo non è più simmetrico.

In certi casi la soluzione dell'equazione differenziale (33) ricondotta a questa equazione integrale può dare di più della soluzione per mezzo della funzione di Green per  $E(\gamma_{ik})$ . Questo

succede quando  $\lambda=1$  appartiene agli autovalori dell'equazione integrale. Allora l'equazione non ha più una soluzione per  $f_{ik}^{(v)}(s)$  arbitrario, ma solo quando è soddisfatta la condizione seguente:

$$\int f^{mn}(s) \varphi_{mn}^{(v)}(s) ds = 0 , \quad (62)$$

dove  $\varphi_{ik}^{(v)}(s)$  indica l'autofunzione che appartiene all'autovalore  $\lambda_v=1$ . Ma allora la soluzione evidentemente non è unica, è invece determinata solo a meno dell'aggiunta di  $\alpha \varphi_{ik}^{(v)}(s)$ . Un tensore di Green per  $E(\gamma_{ik})$  non esiste adesso in generale. Se infatti esistesse, sarebbe possibile una soluzione con materia distribuita a piacere, e l'equazione omogenea non avrebbe alcuna soluzione diversa da zero. L'una cosa e l'altra contraddicono quanto detto prima.

Esiste anche la possibilità che già per  $\Delta\gamma_{ik}$  il tensore di Green non esista più. Un esempio semplice di questo è il seguente: pensiamo ad un universo, il cui campo di sfondo sia ovunque euclideo, ma che sia chiuso in modo tale che la totalità dei punti debba essere rappresentabile in un parallelepipedo, le cui facce a due a due parallele coincidano. Il tensore di Green soddisfa allora in tutte le sue componenti la singola equazione scalare  $\Delta\varphi=0$ . Per una superficie che racchiuda il punto singolare  $\sigma$  la definizione del tensore di Green impone che si abbia:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dF = 1 ,$$

mentre l'applicazione del teorema di Gauss allo spazio esterno dà

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dF = 0 .$$

Qui non si ha a che fare nè con un tensore di Green nè con una funzione di Green. L'origine più profonda di ciò è anche in questo caso il fatto che per la distribuzione di materia sono prescritte (oltre alla condizione della divergenza) determinate condizioni integrali. Siffatte varietà chiuse in se stesse, senza contorno, che per l'universo come un tutto possiedono un interesse particolare, sono parimenti accessibili al metodo generale con l'applicazione del procedimento appropriato; in tal modo anche questo problema si riconduce a equazioni integrali.



8. *Carattere del tensore di Green per un elemento di linea iperbolico.* L'elemento di linea realizzato in natura non è definito positivo, ma ha solo tre dimensioni positive ed una negativa. Corrispondentemente le equazioni differenziali della fisica non sono di tipo ellittico, ma di tipo iperbolico, cosa che comporta una differenza profonda nelle modalità del problema e della sua soluzione. Questa differenza si manifesta in modo caratteristico particolarmente nelle diverse proprietà della funzione di Green per i due gruppi.

Con un elemento di linea iperbolico le singolarità del tipo più semplice non sono puntiformi, ma costituite da linee. D'altronde la lunghezza di queste linee può essere scelta arbitrariamente piccola. Fisicamente parlando abbiamo a che fare con un "impulso istantaneo", che uscendo da un punto  $\sigma$  del campo si propaga con la velocità della luce e dopo un tempo infinitamente breve decresce a zero. Una soluzione siffatta dell'equazione differenziale  $E(U_{ik})=0$  modifica il campo solo in una regione arbitrariamente stretta sopra e sotto il cono di luce che appartiene al punto  $\sigma$ . Tuttavia per utilizzare questo impulso istantaneo come funzione risolvente dobbiamo rovesciare la direzione dell'asse temporale, cioè l'impulso non si espande, ma si contrae con la velocità della luce, cosa che in linea di principio è equivalente. Nell'intorno immediato di  $\sigma$  richiediamo ad  $U_{ik}$  che si comporti come un potenziale ritardato. Possiamo anche in questo caso definire e determinare il tensore polo in modo del tutto analogo al caso precedente, solo che ora non dobbiamo integrare su una sfera infinitamente piccola, ma su un cilindro infinitamente piccolo, che racchiude la linea d'universo infinitamente breve della singolarità. Così perveniamo anche in questo caso ad un tensore di Green, per mezzo del quale le equazioni possono essere integrate. L'applicazione della trasformazione di Gauss conduce anche qui di nuovo all'equazione (48), solo che ora abbiamo evidentemente da integrare sulla regione arbitrariamente stretta sopra e sotto il cono del futuro che appartiene al punto  $s$ , dove la funzione di Green è diversa da zero. Poiché dobbiamo ancora dividere per la lunghezza della linea di singolarità, riconosciamo che passando al limite dello spessore nullo l'integrale di volume

degenera in un integrale di superficie, esteso al cono del futuro che appartiene al punto  $s$ , mentre per l'integrale di contorno interviene parimenti solo il contorno di questo cono del futuro.

I teoremi generali qui dati possono acquistare il loro significato fisico solo nelle applicazioni. Un particolare interesse acquista lo studio delle situazioni che intervengono quando si scelga come superficie di sfondo l'universo cilindrico di Einstein o l'universo iperbolico di de Sitter. In questi problemi non ci addentreremo ulteriormente nell'ambito del presente lavoro, tenendo conto del suo carattere generale; essi costituiranno l'oggetto di una ricerca successiva.

Frankfurt a.M., Institut für theoretische Physik, ottobre 1924.