Il problema della radiazione dell'etere
in un universo chiuso spazialmente.[1]

Kornel Lanczos a Francoforte

Con quattro figure (ricevuto il 26 febbraio 1925)

Si introduce un miglioramento essenziale nella teoria sviluppata precedentemente[2]*, evitando l'integrazione temporale e soddisfacendo al principio di causalità. Non viene più presupposta la conoscenza dell'evoluzione temporale della metrica al di là dei tempi raggiungibili empiricamente, e la teoria si fonda esclusivamente sulla chiusura spaziale, utilizzando il principio dello sviluppo in autofunzioni spaziali nel senso della teoria generale delle equazioni integrali. La connessione tra scotimento eccitatore e radiazione ondulatoria viene analizzata in generale, e si deriva un nuovo fenomeno, possibilmente raggiungibile per via d'esperimento: la presenza di un'onda convergente interrotta nell'intorno di un punto luminoso.*

Abbiamo chiarito in una dissertazione precedente che in un universo chiuso spazialmente e stazionario temporalmente l'etere assume certe proprietà di risonanza che danno luogo ad un comportamento sostanzialmente diverso dall'immagine classica. Sussiste un'analogia profonda con le oscillazioni di una corda tesa, o ancor meglio di un anello elastico. Infatti, pensiamo di sopprimere due dimensioni spaziali; allora possiamo rappresentare mediante un anello lo spazio chiuso (ormai monodimensionale), e l'equazione d'onda corrisponde allora completamente all'equazione del moto di un anello elastico sul quale agiscano forze esterne in assenza di smorzamento. Anche in questo caso troviamo oscillazioni proprie, equidistanti tra loro: la lunghezza d'onda fondamentale corrisponde alla circonferenza dell'anello, che abbiamo supposto di dimensioni cosmiche. La frequenza fondamentale è quindi

---

[1] Zeitschr. f. Phys. **32**, 135 (1925).

[2] *Vedi* ZS. f. Phys. **32**, 56, 1925.

estremamente piccola, e le frequenze sono molto addensate tra loro. Se fosse presente uno smorzamento, l'anello risuonerebbe alle oscillazioni d'altissima frequenza praticamente in modo uniforme, e avremmo un comportamento dell'etere che corrisponderebbe approssimativamente all'immagine classica. Ma a seguito dell'assenza di smorzamento la situazione è del tutto diversa. Se l'anello è eccitato da una forza periodica esterna, risuona con un'oscillazione la cui ampiezza dipende assai fortemente dal valore esatto della frequenza e cresce nel tempo fino all'infinito, se la frequenza eccitatrice coincide esattamente con una frequenza propria.

La strada che originariamente avevamo intrapreso si presta molto a mettere in evidenza le proprietà di risonanza di un etere spazialmente chiuso: - un approfondimento maggiore dei fenomeni radiativi non può essere atteso da questa direzione a causa della stazionarietà dell'oscillazione e del crescere infinito del fattore di amplificazione. Svilupperemo nel seguito un altro metodo, col quale queste difficoltà non compaiono e che sembra più adeguato al carattere fisico del problema. La supposta periodicità temporale dell'universo non gioca in esso alcun ruolo - tutto deriva dalla sola chiusura spaziale.

Il metodo originario, che avevamo usato per risolvere l'equazione delle oscillazioni, consisteva sostanzialmente nello sviluppare le nostre funzioni, cioè il potenziale φ e la densità di carica ρ, in autofunzioni temporali. Queste erano le note serie di seni e coseni. Ma per farlo si doveva dare la metrica dell'universo per tutti i tempi. Avevamo supposto che per tempi arbitrariamente grandi si avesse stazionarietà rispetto al tempo, e che spazio e tempo fossero sempre tra loro ortogonali. Ma si dimostra che la teoria può essere costruita anche con ipotesi assai meno impegnative. Basta che la stazionarietà nel tempo e l'ortogonalità sussistano per tempi in pratica brevi. Dovremo però comunque assumere che sia sempre possibile eseguire nell'universo una siffatta separazione, che il comportamento cilindrico sussista effettivamente almeno per intervalli temporali brevi: ciò è già sufficiente per costruire la teoria nella sua forma nuova, che svilupperemo subito. Un metodo analogo è stato sviluppato anche per trattare il problema della corda oscillante[3], col quale il nostro problema presenta molte analogie.

Invece che in autofunzioni temporali sviluppiamo ora φ e ρ in autofunzioni spaziali. Risolviamo l'equazione differenziale:

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \qquad (1)$$

per quei valori di λ (i cosidetti "autovalori") per i quali si ottiene una soluzione ovunque regolare. Gli autovalori compaiono in numero infinito e sono tutti positivi, infatti $\Delta\varphi$ possiede un nucleo definito positivo. Possiamo quindi porre

$$\lambda = \nu^2 \ . \qquad (2)$$

Poiché si tratta inoltre di un nucleo simmetrico tutte le "autosoluzioni" appartenenti ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali, e le soluzioni appartenenti ad uno stesso autovalore si possono sempre ortogonalizzare. Perciò esiste un *sistema completo di funzioni ortogonali*, col quale si possono sviluppare sia φ che ρ. Ma poiché queste funzioni dipendono ancora dal tempo, dobbiamo considerare i coefficienti dello sviluppo come funzioni del tempo. Dotiamo dell'indice ν l'autosoluzione che appartiene all'autovalore ν, e assumiamo le seguenti serie infinite:

$$\varphi(s,t) = \sum_\nu Q_\nu(t)\varphi_\nu(s) \ , \quad 4\pi\rho(s,t) = \sum_\nu P_\nu(t)\varphi_\nu(s) \ . \qquad (3)$$

Col simbolo "(s)" si indicherà la posizione di un punto dello spazio. L'equazione delle oscillazioni si scrive:

$$\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 4\pi\rho = 0 \ . \qquad (4)$$

Sostituiamo in questa equazione le serie (3) e teniamo conto della proprietà delle $\varphi_\nu(s)$ di essere autosoluzioni dell'equazione (1), allora risulta in primo luogo la seguente relazione:

$$\sum_\nu [-\nu^2 Q_\nu(t) - Q''_\nu(t) + P_\nu(t)]\varphi_\nu(s) = 0 \ . \qquad (5)$$

Ma a causa dell'indipendenza del sistema di funzioni questa equazione può sussistere solo se tutti i coefficienti delle φ_ν si annullano. Dev'essere quindi

$$Q''_\nu(t) + \nu^2 Q_\nu(t) = P_\nu(t) \ , \qquad (6)$$

---

[3] *Vedi* Courant-Hilbert, Methoden der mathematischer Physik **1**, 236.

che significa che l'equazione d'onda dev'essere soddisfatta per ogni autosoluzione da sola, indipendentemente dalle altre.

Ma l'equazione (6) non è altro che l'equazione del moto di una molla elastica tesa, priva di smorzamento, sotto l'azione di una forza esterna. Una molla siffatta per qualsiasi influenza esterna si pone in moto e prosegue il suo moto illimitatamente nel tempo, anche dopo la cessazione dell'impulso, in forma di oscillazioni non smorzate con l'ampiezza e la velocità raggiunte alla fine di esso.

È noto che la soluzione dell'equazione differenziale (6) è data dal seguente integrale:

$$Q_{\nu}(t) = (1/\nu) \int_0^t \sin\nu(t-\tau)P_{\nu}(\tau)d\tau \ . \qquad (7)$$

Si supporrà che l'impulso esterno cominci al tempo t=0 e che prima di questo istante anche l'eccitazione $Q_{\nu}(t)$ sia nulla. Con queste condizioni iniziali aderiamo alla consueta ipotesi di causalità della fisica. La chiusura temporale dell'universo, che prima avevamo richiesto, è sostituita qui dal principio di causalità che basta comunque a determinare univocamente il problema.

Per un impulso limitato nel tempo possiamo dividere l'intero processo in due fasi: Il "periodo dell'impulso" e il "periodo delle oscillazioni". Dalla soluzione (7) riconosciamo che possiamo interpretare il periodo dell'impulso come quello di un'onda sinusoidale di ampiezza e fase variabile. Col cessare dell'impulso la molla continua a oscillare con onde sinusoidali pure. Se il periodo dell'impulso è breve rispetto al periodo delle oscillazioni l'impulso, che qui chiameremo anche "scotimento", non genera un'ampiezza percettibile, ma solo una velocità grande. Quindi il moto inizia (come nel galvanometro balistico) esattamente all'istante dello scotimento come onda sinusoidale pura.

In base a questa proprietà delle autofunzioni otteniamo del ruolo dell'etere nei processi radiativi un'immagine del tutto diversa da quella classica. *Infatti la frequenza dell'onda di una radiazione non ha niente a che fare con l'andamento temporale del processo eccitatore; è determinata esclusivamente da quale autofunzione dell'etere esso pone in oscillazione.* In particolare anche uno "scotimento" del tutto aperiodico (salto d'un elettrone da un’orbita quantica all’altra) può portar l’etere ad irraggiare. L’oscillazione monocromatica dell’etere prodotta da una determinata autofunzione è completamente non smorzata e temporalmente illimitata. Lo smorzamento e la limitazione temporale della radiazione hanno luogo per il fatto che ad ogni emissione di onde non partecipa una sola autofunzione, ma un numero assai grande di queste, le cui azioni interferiscono tra loro e come risultante generano un moto ondulatorio che decresce nel tempo. Lo smorzamento dipende solo dalle relazioni di ampiezza, quindi dalla grandezza dello scotimento impartito alla singola autofunzione: anche qui un fattore del tutto diverso da quello della teoria classica, dove si assume l’irraggiamento d’energia come causa dello smorzamento.

Per procedere oltre dobbiamo fare certe assunzioni sulla struttura metrica dello spazio. Non compiremo nessun errore di principio se ci accontenteremo dell’ipotesi più semplice e attribuiremo allo spazio - a prescindere dalle oscillazioni locali - una curvatura ovunque omogenea, quindi una struttura sferica. Il sistema di autofunzioni rispetto al quale bisogna sviluppare corrisponde allora del tutto alle funzioni sferiche di Laplace, solo che qui non si tratta di una funzione di superficie bidimensionale, ma di una tridimensionale. La costruzione di questo sistema di funzioni richiede uno studio matematico particolare, che non potremo dare qui. Quando nel seguito ci restringeremo alle soluzioni sferosimmetriche che si possono scrivere facilmente in forma esplicita, e che costituiscono l’analogo dei polinomi di Legendre, lo facciamo nell’ipotesi che nella nostra analisi, condotta provvisoriamente solo a grandi linee, i risultati qui trovati possano da un lato esser idonei a chiarire i nuovi metodi, dall’altro possano servire da orientamento per il caso generale.

Come abbiamo già trovato nella dissertazione precedente, le autosoluzioni sferosimmetriche del nostro problema in uno spazio sferico di raggio 1 sono le funzioni seguenti (a meno di un fattore di normalizzazione):

$$\varphi_{\nu}(r) = \frac{\sin \nu r}{\sin r} , \tag{8}$$

dove ν ammette valori interi arbitrari[4]. Questo ν non è esattamente identico al nostro ν precedente. Al posto del ν là presente si deve invece sostituire $\nu'=(\nu^2-1)^{1/2}$. Ma abbiamo già notato che in pratica intervengono solo ν così grandi che il loro quadrato è estremamente grande rispetto ad 1, e questa differenza in pratica non gioca alcun ruolo.

Come abbiamo fatto or ora con la molla elastica, suddividiamo l'eccitazione dell'etere in due fasi: la "radiazione dello scotimento" durante il periodo dello scotimento e la "radiazione ondulatoria" durante il periodo delle onde. Se lo scotimento è di durata assai breve la radiazione dello scotimento non ha fisicamente alcun significato di rilievo. Infatti durante questo tempo breve non può accrescersi nell'etere un'ampiezza percettibile. È da notarsi come cosa importante in linea di principio che la radiazione dello scotimento inizia e finisce nell'intero spazio nello stesso istante, ovvero all'inizio e alla fine dello scotimento; la velocità di propagazione è qui per così dire infinitamente grande. Questo comportamento pare contraddire i postulati generali della teoria della relatività, secondo la quale non è possibile una velocità superluminale. Ma la contraddizione è solo apparente. Infatti ciò che si può sostenere conseguentemente in base alla teoria della relatività è soltanto che un punto materiale non può raggiunger mai velocità superluminale; ma l'eccitazione dell'etere non è da annoverarsi tra i processi materiali.

Se però si volesse derivare l'impossibilità di una velocità superluminale dal principio che non può esistere un sistema di coordinate privilegiato, dobbiamo dire che questa linea di pensiero non è applicabile al nostro caso. Infatti il sistema di

---

[4] *Nel caso ellittico si deve avere simmetria tra r e π-r. Abbiamo in questo caso le funzioni:*

$$\varphi_\nu(r) = \frac{\sin \nu r + \sin \nu(\pi - r)}{\sin r} .$$

Si vede immediatamente che queste sono ancora le funzioni (8), solo che tutti i valori pari di ν spariscono. In questo caso ν percorre solo la successione dei numeri dispari.

coordinate da noi scelto è di fatto un sistema privilegiato a motivo della stazionarietà nel tempo e dell'ortogonalità che in esso si devono trovare. Queste proprietà non rimarrebbero più valide a seguito di una trasformazione di Lorentz. Che malgrado ciò il principio di relatività speciale risulti giusto praticamente in tutti i casi deriva dal fatto che non la radiazione dello scotimento, ma la radiazione ondulatoria è riconoscibile sperimentalmente; ma questa radiazione ammette di fatto l'applicazione della trasformazione di Lorentz[5].

Dedichiamoci ora alla radiazione ondulatoria, che si instaura nel momento in cui l'impulso esterno è cessato. Indicheremo questo istante con $t=\sigma$. Da questo istante il coefficiente di $\varphi_\nu(s)$ esegue oscillazioni sinusoidali pure. Ci serviamo della comoda notazione complessa e scriviamo:

$$Q_\nu(t) = A_\nu \exp(i\nu t) + B_\nu \exp(-i\nu t) \ , \tag{9}$$

dove A_ν e B_ν indicano due costanti che devono essere complesse coniugate perché l'espressione risulti reale.

Nel caso che le autofunzioni dell'eccitazione siano sferosimmetriche la radiazione ondulatoria risulta nella forma seguente:

$$\varphi_\nu = \frac{1}{\sin r}\,[A_\nu \exp(i\nu t) + B_\nu \exp(-i\nu t)]\,\frac{\exp(i\nu r) - \exp(-i\nu r)}{2i} \ . \tag{10}$$

Se raccogliamo separatamente i termini con $t-r$ e con $t+r$, possiamo scrivere[6]

---

[5] *Ma tuttavia non in linea di principio. Abbiamo già notato che a causa della piccola, praticamente inosservabile differenza tra* ν *e* ν' *risulta una velocità di propagazione delle onde diversa per tutte le frequenze, che resta un po' sotto la velocità della luce, per cui non c'è più invarianza rispetto alla trasformazione di Lorentz. La trasformazione di Lorentz ha un significato fondamentale solo in un universo infinito euclideo, non in uno a curvatura sferica, l'elemento di linea del quale non rimane invariato per questa trasformazione.*

[6] *In notazione reale le equazioni (10) e (11) si possono scrivere nella forma seguente (*C_ν*= ampiezza,* ψ_ν*= fase):*

$$\varphi_\nu = \frac{-A_\nu \exp[i\nu(t-r)] + B_\nu \exp[-i\nu(t-r)]}{2i\sin r}$$

$$+ \frac{A_\nu \exp[i\nu(t+r)] - B_\nu \exp[-i\nu(t+r)]}{2i\sin r} \ . \qquad (11)$$

La prima somma indica un treno d’onde divergente, la seconda uno convergente. La nostra radiazione si compone quindi di onde sferiche divergenti e convergenti, che interferiscono tra loro e generano onde stazionarie. La funzione di eccitazione dell’onda divergente è la seguente funzione del tempo:

$$\frac{1}{2i}\left[-A_\nu \exp(i\nu t) + B_\nu \exp(-i\nu t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{A_\nu \exp[i\nu(t+\pi/2)] + B_\nu \exp[-i\nu(t+\pi/2)]\right\} \ . \qquad (12)$$

A meno del fattore inessenziale 1/2 otteniamo così la funzione di eccitazione dell’onda divergente, nella quale l’oscillazione dell’etere è spostata all’indietro di un quarto di lunghezza d’onda. La funzione di eccitazione dell’onda convergente è diversa dall’altra solo per il segno, e si ha quando l’oscillazione dell’etere è spostata in avanti di un quarto di lunghezza d’onda.

Se ora pensiamo che ad un’eccitazione oscillatoria praticamente monocromatica dell’etere contribuiscono non una, ma un gran numero di autofunzioni adiacenti, tutte queste funzioni di eccitazione devono risultare sovrapposte tra loro in modo che si abbia uno smorzamento ed una limitazione temporale dell’onda. Indicheremo la funzione risultante come "eccitazione ondulatoria" e useremo per essa la maiuscola $F(t)$:

$$F(t) = \frac{1}{2}\sum_\nu \left\{A_\nu \exp[i\nu(t+\pi/2)] + B_\nu \exp[-i\nu(t+\pi/2)]\right\} \ . \qquad (13)$$

Per mezzo di questa funzione la radiazione ondulatoria si esprime nel modo seguente:

$$\varphi = \frac{F(t-r) - F(t+r)}{\sin r} \ . \qquad (14)$$

$$\varphi_\nu = C_\nu \sin(\nu t + \psi_\nu)\ \frac{\sin \nu r}{\sin r} = \frac{C_\nu \cos[\nu(t-r)+\psi_\nu]}{\sin r} - \frac{C_\nu \cos[\nu(t+r)+\psi_\nu]}{\sin r} \ .$$

Sull'andamento temporale della funzione di eccitazione $F(t)$ a priori non si può dire niente. Esso dipende interamente dall'ampiezza e dalla velocità con le quali l'etere, passato il periodo dello scotimento, dà inizio alle sue oscillazioni per i singoli valori di ν. Dipende quindi interamente dalle modalità dell'impulso, che si ripercuotono sull'etere tramite le singole autofunzioni. Anche la limitazione temporale dell'eccitazione ondulatoria dipenderà da queste. Ma inoltre sull'andamento della radiazione ondulatoria nel suo stadio iniziale influirà essenzialmente come questa limitazione temporale sia orientata rispetto all'istante dello scotimento. Non possiamo infatti dimenticare che la nostra soluzione (14) entra in vigore solo dal tempo $t=\sigma$, cioè dopo la fine dello scotimento; da $t=0$ a $t=\sigma$ abbiamo la radiazione dello scotimento. Distinguiamo tre casi.

Caso A. *L'eccitazione ondulatoria è già sparita prima della fine dello scotimento*. La situazione che allora si realizza è illustrata dalla Fig. 2. La radiazione parte con un'onda d'emissione interrotta. L'onda si instaura completamente solo a raggi che siano maggiori di *OA*. Tra *A* e *B* l'onda non raggiunge la sua piena estensione temporale, per cui l'intensità della luce risulterà diminuita. Per raggi che siano minori di *OB* non è presente alcuna radiazione ondulatoria. Se seguiamo la propagazione della radiazione a distanze grandi riconosciamo che l'onda raggiunge l'equatore dell'universo, diventa convergente, raggiunge il polo opposto, subisce un cambiamento di fase e ritorna di nuovo al punto di partenza, dove avviene un altro cambiamento di fase, e il processo si ripete un numero di volte a piacere. Tuttavia questo seguire la radiazione su spazi e su tempi grandi non ha in pratica alcun senso, poiché, come già prima menzionato, le irregolarità della metrica provocano ovunque diffusione della radiazione.

Caso B. *L'eccitazione ondulatoria inizia quando lo scotimento è già cessato*. Otteniamo allora la struttura della Fig. 3. La radiazione inizia con un'*onda convergente interrotta*. Questa si instaura completamente solo per raggi che siano minori di *OA*. Tra *A* e *B* si instaura nel tempo solo una parte delle oscillazioni. Oltre *OB* inizialmente non si ha alcuna radiazione. L'onda convergente raggiunge poi l'origine e con cambiamento di fase si trasforma in un’onda di emissione completamente sviluppata.

Caso C. *La fine dello scotimento cade temporalmente tra l’inizio e la fine dell’eccitazione ondulatoria*. Qui abbiamo evidentemente a che fare con una combinazione dei due casi precedenti, la radiazione inizia simultaneamente con un’onda interrotta convergente ed un’onda interrotta divergente.

Se ora si considera in particolare uno scotimento assai breve, la cui durata sia piccola rispetto alla durata dell’oscillazione, sicché possiamo trattarlo come un impulso istantaneo, la nostra analisi si può spingere oltre. In questo casa la durata dello scotimento va posta in pratica uguale a zero e l’etere inizia la sua oscillazione al tempo t=0 con un’onda sinusoidale pura. Con lo spostamento di $\pi/2$ sarà un’onda con il coseno. Poiché la stessa cosa vale per tutti i valori di ν, riconosciamo che la funzione $F(t)$ ora sarà determinata da una serie di Fourier di soli coseni. L’eccitazione ondulatoria è quindi una *funzione pari* del tempo, il suo andamento è simmetrico rispetto all’istante dello scotimento. Allora l’inizio dell’eccitazione ondulatoria avviene di tanto prima dell’istante dello scotimento, di quanto la fine avviene dopo. Il caso presente realizza quindi la possibilità elencata come C. La situazione è illustrata dalla Fig. 4. Nell’origine abbiamo un’onda d’emissione formata a metà, che cresce gradualmente andando verso *A* ed ivi raggiunge il suo pieno valore. Inoltre nell’origine abbiamo un’onda convergente formata a metà, che decresce con continuità andando verso *A* e in *A* si annulla. L’onda convergente completa esattamente la parte mancante dell’onda d’emissione, sicché il consueto comportamento dell’intensità resta complessivamente invariato.

È noto che le righe d’emissione irraggiate nei salti quantici mostrano una larghezza di riga assai piccola e una capacità d’interferenza corrispondentemente assai elevata. Per l’eccitazione ondulatoria dobbiamo qui fare i conti con un tempo di vita eventualmente di vari metri-luce; l’onda convergente si deve quindi instaurare su distanze del tutto misurabili, e questa conseguenza caratteristica della teoria dovrebbe in opportune condizioni essere accessibile alla verifica sperimentale.

Solo non dobbiamo dimenticarci che qui provvisoriamente ci siamo occupati soltanto della soluzione dell’equazione del potenziale scalare, mentre il campo di radiazione elettromagnetico è determinato oltre che dal potenziale scalare anche da un potenziale vettore. Anche per questo possiamo procedere in linea di principio esattamente come per l'equazione scalare. Dobbiamo determinare gli "autovettori" dell'espressione differenziale vettoriale $\Delta\Phi_i$ ed eseguire uno sviluppo rispetto a questi[7]. I coefficienti di questo sviluppo sono di nuovo funzioni del tempo e si determinano anche in questo caso dall'equazione della molla elastica. La costruzione effettiva di questi autovettori potrebbe risultare altresì meno facile che nel caso scalare, ma non comporta alcuna difficoltà di principio. Permane anche la grande semplificazione per il fatto che in pratica usiamo le soluzioni solo per valori assai grandi di ν, per i quali uno se la cava con sviluppi asintotici, che probabilmente portano solo a funzioni elementari, in particolare a funzioni trigonometriche.

Nelle nostre considerazioni di prima abbiamo assunto un impulso di scotimento che fosse assai breve rispetto alla durata delle oscillazioni. Situazioni siffatte si hanno con gli elementi leggeri, nei quali il tratto dello scotimento da un'orbita quantica all'altra è in generale breve rispetto alla lunghezza d'onda. Procedendo nel sistema periodico verso gli elementi pesanti la situazione cambia assai sensibilmente, poiché il tratto dello scotimento cresce col quadrato del numero d'ordine Z dell'elemento, mentre la lunghezza d'onda decresce allo stesso modo. Nella regione dei raggi Röntgen il tratto dello scotimento è già assai grande rispetto alla lunghezza d'onda. Allora non si può più parlare di uno scotimento istantaneo.

Ma con un artificio semplice il caso generale di un impulso durevole si può ricondurre al caso elementare dell'impulso di scotimento. Suddividiamo il cammino dell'elettrone in parti molto piccole e sovrapponiamo l'azione dei singoli scotimenti, che ormai si possono trattare come istantanei. Di fatto possiamo dare all'equazione (7) anche il senso seguente: "Un impulso istantaneo

---

[7] *Vedi in proposito il mio lavoro in* ZS. f. Phys. **31**, 112, 1925, *in particolare l'equazione (58) a pagina 130. Quest'equazione è valida per tensori di ordine arbitrario, quindi anche per vettori.*

del valore $P_\nu dt$ genera un'onda sinusoidale pura di ampiezza $(1/\nu)P_\nu dt$". Se infatti consideriamo l'impulso istantaneo $P_\nu(\tau)dt$ nell'istante τ, esso genera un'eccitazione del valore

$$(1/\nu)P_\nu \sin\nu(t-\tau)d\tau \quad \text{per } t>\tau \;;$$

se integriamo su tutti gli impulsi istantanei arriviamo proprio alla formula (7). Con questo metodo si aggira in generale la radiazione di scotimento e si può trattare ogni radiazione come sovrapposizione di pure radiazioni d'onda.

Con l'applicazione all'elettrone in moto si ottiene da qui un metodo particolare per il calcolo della radiazione provocata dal moto. Dobbiamo disporre lungo l'intero cammino dell'elettrone una sequenza di oscillatori in quiete, la cui carica pulsi per tutti con la stessa ampiezza (supposto che durante il moto non intervenga nessun mutamento interno dell'elettrone) ma con uno sfasamento, legato al tempo che l'elettrone impiega da un punto all'altro. Se integriamo su tutti questi oscillatori risulta una distribuzione spaziale della radiazione del tutto diversa da quella classica, tanto più diversa quanto più lungo è il tratto percorso rispetto alla lunghezza d'onda. Per uno scotimento rettilineo e per un tratto di scotimento lungo otteniamo un massimo nettamente sviluppato nella direzione del moto, nel caso che la velocità dell'elettrone soggetto a scotimento diventi prossima a quella della luce. L'elettrone irraggia allora essenzialmente solo in avanti e produce una sorta di "Nadelstrahl".

Tuttavia nel senso della nostra teoria rimane problematico se questo calcolo abbia un significato più profondo nell'ipotesi di elettrone rigido. Abbiamo già notato che la lunghezza d'onda di una radiazione è determinata solo da quali autofunzioni siano chiamate in causa con ampiezza particolarmente grande nello sviluppo della distribuzione di carica. Veniamo quindi alla conclusione che la lunghezza d'onda è determinata da processi che si giocano già all'interno dell'elettrone come individuo. Nel caso, che sembra plausibile all'autore, di una superficie singolare, le proprietà geometriche e fisiche della superficie sono determinanti per i coefficienti dello sviluppo in serie. Possiamo quindi delineare la seguente immagine generale della radiazione quantica: ogni stato quantico corrisponde ad una determinata forma e distribuzione di carica dell'elettrone come stato d’equilibrio. Se l’elettrone viene lanciato da un’orbita quantica ad un’altra, la carica si installa nella nuova configurazione d’equilibrio. Per questo cambiamento dei coefficienti l’etere sarà posto in oscillazione tramite lo scotimento, proprio come accade per il moto dell’elettrone. Quale di queste due cause possibili sia la sorgente principale della radiazione, o in che misura esse cooperino, non si può valutare a priori. Parimenti non possiamo per ora dir nulla sul perché proprio un gruppo così piccolo di autofunzioni entri in azione in questo cambiamento, come deve risultare data la proprietà della radiazione quantica d’essere altamente monocromatica. Questi sono problemi che appartengono già ad un altro dominio: la sfera d’azione del "principio di Hamilton" che va reso responsabile dell’"accoppiamento dinamico" tra etere e materia. Le equazioni di campo da sole non possono dir nulla sulla distribuzione di carica; dev’esserci invece una certa distribuzione di carica come già data.

Ci troviamo così davanti a una concezione che, dopo aver fissato i princìpi generali ed il programma, deve ancora essere sviluppata in tutti i dettagli. Possiamo tuttavia supporre che le molte contraddizioni esistenti tra la teoria classica e il comportamento reale dei fenomeni radiativi possano alla fin fine essere avvicinate alla loro soluzione per la strada qui intrapresa. A questo proposito facciamo notare che i nostri sviluppi sono unicamente conseguenze della teoria matematica delle equazioni integrali, col solo presupposto ipotetico che lo spazio sia una regione finita e chiusa, poiché senza questo presupposto il problema rimane matematicamente del tutto indeterminato. L’autore si riconosce in quella visione pitagorica dell’universo, che vede nel numero più che un puro strumento formale e comodo per la descrizione dei fatti, che riconosce invece nella matematica il non così immediato linguaggio simbolico della natura, e presuppone una certa armonia tra estetica matematica e realtà. Le immagini e i modelli, che nelle mani dello scienziato di mentalità non matematica compiono servizi eccellenti, e sono perfino irrinunciabili per il progresso, quando è prioritariamente necessario istituire una connessione matematica ancora ignota, devono essere sottoposti ad un continuo mutamento e adattamento alle necessità presenti: l’esperienza insegna che con il progredire della conoscenza matematica si sviluppa parallelamente una conoscenza sempre più approfondita nel mondo della realtà. La teoria delle equazioni integrali, che già ha portato chiarezza in tanti campi della fisica matematica, pare in grado di sondare perfino gli ultimi processi elementari. È infatti meraviglioso osservare come la struttura macrocosmica stessa dell'universo, che solo su distanze estremamente grandi dà luogo ad una deviazione dal comportamento euclideo appena percettibile, allo stesso tempo nell'ambito dell'infinitamente piccolo, nel mondo degli elettroni, influenzi i processi in modo decisivo.

Frankfurt a. M., febbraio 1925.

Nota:

Discuteremo qui una naturale obiezione, il cui esame è al contempo idoneo a far risaltare la differenza caratteristica della nuova concezione rispetto alla vecchia, e a chiarire inoltre perché la teoria classica porti a risultati corretti per i processi macroscopici. Si può argomentare così: nella presente interpretazione della teoria siamo partiti da ipotesi iniziali che corrispondono in tutto a quelle solite, che derivano dal principio di causalità. Ma secondo il procedimento classico per mezzo dei potenziali ritardati la soluzione dell'equazione delle oscillazioni presuppone solo queste ipotesi iniziali. Come è possibile pervenire a risultati che vanno al di là dell'ambito dei potenziali ritardati? La risposta a questa domanda va ricercata nel fatto che le singole autofunzioni nelle quali abbiamo sviluppato la distribuzione di carica decrescono con la distanza come r^{-1}*. Ma è noto che la densità di carica deve convergere a zero più rapidamente di* r^{-1}*, di modo che risulti in generale localizzabile spazialmente. Così la carica è in certa misura distribuita in modo diffuso nell'intero spazio. Invece nell'uso dei potenziali ritardati pensiamo sempre la carica concentrata in una regione dello spazio molto piccola, ossia nel volume dell'elettrone, di modo che con le distanze che intervengono in pratica vada considerata come puntiforme. Con una distribuzione di carica diffusa il metodo perde la sua utilizzabilità pratica. Se si considera ora un gran* *numero d'elettroni e la cooperazione statistica d'un gran numero di processi elementari, le funzioni* $\sin \nu r$ *appartenenti a valori diversi di* ν *daranno con la loro sovrapposizione una funzione rapidamente decrescente, sicché in questo caso la densità di carica risultante cade a zero già su distanze brevi. Allora per distanze abbastanza grandi si può con ragione applicare il metodo dei potenziali ritardati. Ma nei processi radiativi elementari si tratta d'una cooperazione di così poche autofunzioni, che lo smorzamento è troppo piccolo e la carica è distribuita su un volume troppo grande perché si possa ricorrere ai potenziali ritardati. Si riconosce qui inoltre l'influenza caratteristica dello smorzamento, nell'interpretazione del quale la nuova concezione si distingue in modo così essenziale da quella classica.*

Si può anche osservare che la nostra soluzione, così diversa in linea di principio da quella classica, in opportune condizioni si può ricondurre successivamente alla forma classica. Se ad uno scotimento prende parte un numero sempre maggiore di autofunzioni l'eccitazione ondulatoria sarà sempre più deformata. Se facciamo aumentare le autofunzioni in un modo che corrisponde ad una carica spazialmente concentrata, l'eccitazione ondulatoria perde sempre più il suo carattere periodico e i suoi limiti temporali saranno sempre più stretti. Più la carica si restringe in un volume piccolo, più la funzione dell'eccitazione ondulatoria assomiglia al comportamento dell'eccitazione per impulso. Se la carica è concentrata in un volume nullo, secondo la rappresentazione della teoria degli elettroni, le due funzioni - eccitazione ondulatoria ed eccitazione per impulso saranno infine identiche. Questa è la soluzione classica. In base alle Figure 2 e 3 riconosciamo che ora l'onda convergente sparisce del tutto, ed un'onda d'urto nella forma di un'onda sferica divergente si propaga nello spazio.

Evidentemente si può comporre ogni moto d'un elettrone con puri "scotimenti", suddividendo la traiettoria in segmenti elementari. Possiamo quindi trattare in ogni caso lo "scotimento" come un processo elementare. Ma mentre questo scotimento secondo la concezione classica parte da una carica molto concentrata nello spazio, secondo il metodo delle autofunzioni viene trasferito all'etere da una determinata autofunzione. Metteremo in netta evidenza il contrasto caratteristico tra la vecchia e la nuova *concezione nel modo seguente:*

A) Processo elementare nella teoria degli elettroni: *eccitazione dell’etere per scotimento da parte di una carica molto concentrata nello spazio.*

Effetto: *liberazione di un’onda sferica che si propaga con la velocità della luce, il cui andamento e la cui limitazione temporale corrispondono in pieno allo scotimento eccitatore.*

B) Processo elementare secondo il metodo delle autofunzioni: *eccitazione dell’etere per scotimento da parte di una determinata autofunzione.*

Effetto: *liberazione di un’onda sferica permanente con andamento sinusoidale puro, che iniziando con la fase* 0 *appare simultaneamente in tutto lo spazio e prosegue senza limite nel tempo.*