Considerazioni teoriche su nuove osservazioni ottiche della teoria della relatività.[1]

M. v. Laue (Berlin)

1. Il calcolo della deflessione della luce da parte del sole si fonda sulla legge che la propagazione della luce nella teoria della relatività generale è rappresentata dalle linee geodetiche nulle dell’"universo". Questa legge finora non è dimostrata, ma viene solo estesa per analogia dalla teoria della relatività ristretta. In questa essa è altresì ben nota. L’equazione invariante del "cono di luce"

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

rappresenta proprio nell’universo il cono del futuro e il cono del passato dell’origine, quindi la totalità delle geodetiche uscenti da essa, cioè in questo caso linee rette, ogni tratto delle quali ha lunghezza nulla.

Naturalmente questa legge si deve poter dimostrare a partire dall’elettrodinamica dello spazio vuoto, nella relatività generale come in quella ristretta. E di fatto si può completamente trasporre per questo il metodo noto da tempo.

La prima quaterna di equazioni di Maxwell in notazione tetradimensionale

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathfrak{M}_{\beta\gamma,\alpha} + \mathfrak{M}_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \text{ , ossia } \quad \Delta iv\mathfrak{M}^* = 0 \tag{1}$$

impone infatti di ricondurre l’esavettore $\mathfrak{M}$ del campo al tetrapotenziale Φ mediante le equazioni

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} \quad \text{ovvero} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\Phi \text{ ,} \tag{2}$$

quindi la (1) si ottiene senz’altro dalla (2). Ma in tal modo il potenziale non è ancora definito completamente, si può invece, com’è noto dalla vecchia teoria, aggiungere ancora la condizione[2]

$$(-g)^{-1/2}\sum_k [(-g)^{1/2}\Phi^k]_{,k} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{Div}\Phi = 0 \text{ .} \tag{3}$$

---

[1]Physik. Zeitschr. **21**, 659 (1920).

[2]*Se non è detto altrimenti, tutte le somme vanno estese da 1 a 4.*

Con l'ipotesi (2) passiamo ora all'altra quaterna delle equazioni di Maxwell, che si scrive:

$$(-g)^{-1/2}\sum_k [(-g)^{1/2}\mathfrak{M}^{hk}]_{,k} = P^h \qquad \text{ovvero} \quad \Delta iv\mathfrak{M} = P\ . \qquad (3a)$$

(P tetracorrente)

Al posto delle componenti controvarianti di $\mathfrak{M}$ introduciamo quelle covarianti, e poi passiamo dalle componenti controvarianti della divergenza tensoriale che sta a primo membro a quelle controvarianti. Troviamo:

$$\Delta iv^h\mathfrak{M} = (-g)^{-1/2}\sum_k [(-g)^{1/2}\mathfrak{M}^{hk}]_{,k} = (-g)^{-1/2}\sum_{jkm} [(-g)^{1/2}g^{hj}g^{km}\mathfrak{M}_{jm}]_{,k}$$

$$\Delta iv_i\mathfrak{M} = \sum_h g_{ih}\Delta iv^h\mathfrak{M}$$

$$= \sum_{hjkm}\left[(-g)^{-1/2}g_{ih}g^{hj}\{(-g)^{1/2}g^{km}\mathfrak{M}_{jm}\}_{,k} + g_{ih}g^{km}\mathfrak{M}_{jm}\ \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k}\right]\ .$$

Nella prima metà della somma che compare a secondo membro possiamo eseguire la somma su h:

$$P_i = \Delta iv_i\mathfrak{M} = (-g)^{-1/2}\sum_{km}\{(-g)^{1/2}g^{km}\mathfrak{M}_{im}\}_{,k} + \sum_{hjkm} g_{ih}g^{km}\mathfrak{M}_{jm}\ \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k}\ .$$

Ora introduciamo Φ secondo la (2) e sottraiamo l'equazione che origina dalla (3)

$$0 = (\mathrm{Div}\Phi)_{,i} = (-g)^{-1/2}\sum_{km}\left[\ \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\{(-g)^{1/2}g^{km}\Phi_m\} + \right.$$

$$\left. + (-g)^{-1/2}\ \frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial x^k}\ \{(-g)^{1/2}g^{km}\Phi_m\}\ \right]\ .$$

Se indichiamo con F_i un'espressione che contenga Φ e le sue derivate prime, ed inoltre ancora g_{ik} e sue derivate prime, ma non le ulteriori di questa forma, otteniamo:

$$P_i = -\ (-g)^{-1/2}\sum_{km}\ \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^k\partial x^m}\ g^{km} + F_i\ . \qquad (4)$$

Abbiamo così la traduzione dell'equazione d'onda; poniamo nel seguito $P = 0$, e ci restringiamo quindi allo spazio vuoto di cariche.

Eseguiamo la transizione dall'equazione d'onda all'ottica geometrica con lo stesso procedimento che Debye[3] ha proposto per l'elettrodinamica classica. Poniamo cioè

$$\Phi_i = A_i \exp[(-1)^{1/2} kE] \tag{5}$$

e intendiamo con E una funzione scalare delle 4 coordinate, con k una costante, che in seguito lasceremo diventare infinitamente grande, e con A_i le componenti di un vettore lentamente variabile rispetto alla funzione esponenziale. Passando al limite arriviamo a onde infinitamente corte, quindi all'ottica geometrica. La sostituzione dei valori

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^m} = \exp[(-1)^{1/2} kE] \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial x^m} + (-1)^{1/2} k A_i \frac{\partial E}{\partial x^m} \right\} ,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^j \partial x^m} = \exp[(-1)^{1/2} kE] \left\{ \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^m} + (-1)^{1/2} k \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} \frac{\partial E}{\partial x^m} + \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \frac{\partial E}{\partial x^j} \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_i \frac{\partial^2 E}{\partial x^j \partial x^m} \right) - k^2 A_i \frac{\partial E}{\partial x^j} \frac{\partial E}{\partial x^m} \right\}$$

nella (4) mostra però che i termini raccolti in F_i in parte non contengono proprio k come fattore, in parte solo k stesso. Soltanto un termine è moltiplicato per k^2, e risulta dalla somma scritta nella (4). Se riteniamo solo questo termine arriviamo all'equazione

$$\sum_{im} g^{im} \frac{\partial E}{\partial x^i} \frac{\partial E}{\partial x^m} = 0 , \tag{6}$$

che va considerata come sostituto dell'equazione

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

della funzione iconale ε. *Essa afferma che il gradiente di E ha una direzione nulla*.

La condizione della divergenza (3) introduce ancora solo un'affermazione sul vettore A, che col passaggio al limite per

---

[3] A. Sommerfeld e J. Runge, Ann. d. Phys. **35**, 277, 1911.

$k = \infty$ assume la forma

$$\sum_i A_i \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0 \ .$$

Deriviamo ora l'equazione (6) rispetto ad x^m

$$\sum_{ip} g^{ip}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^m}\ \frac{\partial E}{\partial x^p} + \frac{\partial E}{\partial x^i}\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^p \partial x^m}\right) + \sum_{ip} \frac{\partial g^{ip}}{\partial x^m}\ \frac{\partial E}{\partial x^i}\ \frac{\partial E}{\partial x^p} = 0 \ .$$

Facciamo poi uso della formula[4]

$$\frac{\partial g^{ip}}{\partial x^m} = -\sum_j \left(\begin{Bmatrix} i \\ j\ m \end{Bmatrix} g^{jp} + \begin{Bmatrix} p \\ j\ m \end{Bmatrix} g^{ji}\right)$$

e troviamo

$$\sum_{ip} g^{ip}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^m}\ \frac{\partial E}{\partial x^p} + \frac{\partial E}{\partial x^i}\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^p \partial x^m}\right) =$$

$$= \sum_{jip}\left(\begin{Bmatrix} i \\ j\ m \end{Bmatrix} g^{jp} + \begin{Bmatrix} p \\ j\ m \end{Bmatrix} g^{ji}\right) \frac{\partial E}{\partial x^i}\ \frac{\partial E}{\partial x^p} \ .$$

In entrambe le somme la seconda metà va nella prima quando si scambino gli indici i e p, quindi:

$$\sum_{ip} g^{ip}\ \frac{\partial E}{\partial x^p}\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^m} = \sum_{jip} \begin{Bmatrix} i \\ j\ m \end{Bmatrix} g^{jp}\ \frac{\partial E}{\partial x^i}\ \frac{\partial E}{\partial x^p} \ . \tag{7}$$

Seguiamo ora una delle "linee di forza" del campo vettoriale tetradimensionale dato dal gradiente di E per il tratto $d\tau$, le componenti controvarianti del quale siano le dx^i. Allora sussiste proporzionalità tra i quozienti $dx^i/d\tau$ e le componenti controvarianti del gradiente, cioè le somme

$$\sum_p g^{ip} \frac{\partial E}{\partial x^p} \ .$$

Possiamo quindi sostituire nella (7) queste somme con quei quozienti:

---

[4] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 1ª ed., p. 105, Eq. 41.

$$\sum_{i} \frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^m} \frac{dx^i}{d\tau} = \sum_{ji} \left\{ {i \atop j\ m} \right\} \frac{\partial E}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{d\tau}$$

e troviamo allora immediatamente

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial E}{\partial x^m} \right) = \sum_{ji} \left\{ {i \atop j\ m} \right\} \frac{\partial E}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{d\tau} \quad .$$

Ma questa è la nota formula per la variazione di una componente vettoriale covariante per trasporto parallelo[5]. Se spostiamo il gradiente lungo la "linea di forza" esso conserva quindi la propria direzione. Ma la sua direzione è quella della linea di forza stessa, e perciò quest'ultima mantiene sempre nel propagarsi la propria direzione; essa è quindi una linea geodetica, e per la (6) una linea geodetica nulla.

Se consideriamo infine che il gradiente di E rappresenta la propagazione dell'oscillazione data dalla posizione (5) abbiamo dimostrato la legge desiderata.

2. *La teoria dello spostamento verso il rosso* di solito vien data così: con l'intervallo

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k \qquad (x^4 = t)$$

il rapporto tra il tempo proprio $d\vartheta$ di un orologio a riposo nel sistema scelto ed il tempo t è uguale a $(g_{44})^{1/2}$. Sul sole g_{44} è minore che sulla terra, quindi il tempo proprio $d\vartheta_1$ di un orologio sul sole è minore del tempo proprio $d\vartheta_2$ di uno sulla terra, se si riferiscono entrambi i $d\vartheta$ allo stesso dt. Ma i numeri di oscillazioni, riferiti a t, si comportano come i tempi proprî.

Si può tuttavia obiettare che per la completa arbitrarietà nella scelta della variabile temporale non si vede che cosa questo riferimento allo stesso dt debba valere per un significato fisico. O espresso altrimenti: l'onda luminosa raggiunge la terra con lo stesso numero di oscillazioni riferito a t col quale abbandona il sole? Se il suo numero di oscillazioni variasse durante la propagazione la considerazione di cui sopra non permetterebbe di

[5] *ibidem,* p. 101, Eq. 36.

trarre alcuna conclusione riguardo ad un effetto fisicamente dimostrabile.

E a prima vista pare di fatto che sia così. Infatti non è possibile che la legge della conservazione del numero di oscillazioni di un'onda luminosa valga in ogni sistema di riferimento. Sia dato infatti un sistema nel quale essa vale, allora basta eseguire la trasformazione $t' = \varphi(t)$, dove φ non è esattamente una funzione lineare con coefficienti costanti, cioè indipendenti da x^1, x^2, x^3, e abbiamo un sistema in cui essa non vale.

Però la consueta teoria dello spostamento verso il rosso non si riferisce ad un sistema arbitrario, ma ad un sistema del tutto particolare con l'intervallo

$$d\tau^2 = V^2 (dx^4)^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} dx^i dx^k \ ,$$

nel quale tutti i coefficienti sono indipendenti da $x^4 = t$.

Se per giungere ad oscillazioni sinusoidali completiamo l'ipotesi (5) con l'ingiunzione

$$E = \alpha x^4 + f(x^1, x^2, x^3) \ ,$$

dove per α intendiamo una funzione di x^1, x^2, x^3, l'equazione (6) dà:

$$V^2 \alpha^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} - x^4 \sum_{ik} \gamma_{ik} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = 0 \ .$$

Questa funzione lineare in t si può annullare identicamente solo quando la forma quadratica definita positiva, per la quale è moltiplicato t, è uguale a zero. Cioè α e quindi il numero d'oscillazioni $2\pi k\alpha$ dell'onda è costante in questo sistema di coordinate.

Discussione.

Hamel: v. Laue ci ha dimostrato 1°: che dalla teoria di Einstein discende che per oscillazioni di velocità pari alla luce sussiste una completa analogia con l'ottica geometrica, 2°: che uno spostamento verso il rosso che eventualmente avesse luogo sul sole giunge realmente anche a noi. Vorrei permettermi la seguente domanda: esiste una dimostrazione esatta del fatto che lo spostamento verso il rosso avvenga realmente? Secondo l’idea della teoria l’orologio sul sole è un altro rispetto a quello sulla terra e si assume senz’altro che gli atomi oscillanti che emettono la luce siano regolati secondo quest’orologio, per cui lo spostamento verso il rosso dovrebbe aver luogo. Esiste nel senso di v. Laue un procedimento per dimostrarlo rigorosamente?

Einstein: É una debolezza logica della teoria della relatività nel suo stato attuale il fatto che si debbano introdurre a parte regoli ed orologi, invece di poterli costruire come soluzioni di equazioni differenziali. Ma per quanto concerne la certezza delle conseguenze nella relazione col fondamento empirico della teoria, le conseguenze che hanno a che fare col comportamento di regoli rigidi ed orologi sono quelle accertate al meglio. Poiché gli atomi emittenti vanno considerati come "orologi" nel senso della teoria, lo spostamento verso il rosso appartiene ai risultati più sicuri della teoria.