La geometria dello spazio microscopico. II[1]

di Arthur March a Innsbruck.

(ricevuto il 20 ottobre 1936.)

Si discute ulteriormente la metrica definita mediante l'intervallo $\int(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}-\gamma$ e si afferma il suo carattere essenzialmente statistico. Si mostra che la rappresentazione formale delle leggi naturali mediante equazioni differenziali non è mutata, ma che tutte le quantità di campo assumono il significato di valori medi. Per i moti delle onde risulta che la loro definizione in un dominio $\lambda \leq \gamma$ si perde.

1. In questa comunicazione si sviluppa ulteriormente la teoria dello spazio, la cui idea ho delineato in un precedente lavoro. Si tratta della proposta di mutare la legge metrica dell'intervallo $ds^2=g_{ik}dx^i dx^k$ in modo tale che il calcolo riproduca le reali possibilità di misura. Noi non disponiamo di regoli arbitrariamente piccoli e di conseguenza non possiamo separare punti dello spazio che siano assai prossimi mediante l'interposizione di un regolo. La soluzione di compiere questa separazione in un esperimento concettuale mediante un immaginario regolo di sufficiente piccolezza va perciò esclusa, perché non possiamo aspettarci che una metrica si adatti ad una data cosa, quando con il solo ausilio di questa cosa lo spazio e il tempo non si misura. Siamo quindi costretti a trattare come indistinguibili due punti, la cui distanza[2] sia inferiore ad un certo limite γ, e dobbiamo pretendere dalla legge metrica, che ponga in evidenza questo fatto. D'altra parte la stessa legge su scala macroscopica deve dare una geometria che si accordi con la geometria di Riemann, perché nello spazio macroscopico certamente tutto è in ordine. Inoltre la metrica cercata non deve riguardare solo lo

[1] Zeitschr. f. Phys. **104**, 161 (1937).

[2] *Si assume che questo concetto abbia un definito significato statistico anche per punti indistinguibili.*

spazio, ma anche il tempo e deve essere evidentemente invariante per trasformazioni di Lorentz. Si pone quindi una richiesta, che immediatamente provoca difficoltà, perché è in contrasto con l'indistinguibilità di due punti dello spazio molto vicini. Deve darsi la possibilità che due punti P_1 e P_2 che di per sè non siano distinguibili, tuttavia in qualche modo siano separati, in modo che abbia senso riconoscerli mediante coordinate distinte. Questo requisito è del tutto essenziale per la rappresentabilità delle misure fisiche e può essere soddisfatto perché, per quanto P_1 e P_2 possano essere vicini, sempre esiste un punto che è distinguibile da P_1 ma non da P_2 e viceversa, di modo che è sempre possibile riconoscere P_1 e P_2 per mezzo dei loro intorni.

2. Quando noi soddisfiamo i tre primi requisiti mediante l'assunzione $s=\int(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}\text{-}\gamma$ per la lungthezza di una linea d'universo che congiunge due eventi P_1 e P_2, abbiamo una contraddizione, perché noi da un lato consideriamo il punto come fondamentalmente esteso, e dall'altro vogliamo fondare la geometria su una legge, che ha senso solo con il presupposto che il punto di una linea d'universo sia esattamente rintracciabile. Tuttavia senza questo presupposto l'integrale che compare nella metrica non ha un valore definito. Per rimuovere questa contraddizione bisogna interpretare l'integrale statisticamente. Siano P_1 e P_2 due punti d'universo che giacciono su una curva; la misura del pezzo di curva compreso tra P_1e P_2 consiste nel sovrapporre alla curva un regolo (flessibile) i cui estremi coincidano con P_1 e P_2. Ma P_1 e P_2 sono indistinguibili dai loro punti prossimi, e troviamo ripetendo la misura sempre dei valori diversi. Il concetto "lunghezza di una curva" ha perciò solo un significato statistico e non si riferisce al risultato di una sola misura, ma al valor medio ottenuto con moltissime misure. Assumiamo la legge metrica in questo senso, allora l'integrale che in esso appare è malgrado l'incertezza dei suoi estremi esattamente definito, perché questa incertezza è resa innocua dal processo di media.

Parimenti la metrica soddisfa al quarto requisito prima enunciato. Possiamo sempre riconoscere due punti d'universo P_1 e P_2, anche quando siano prossimi, purché noi ci aiutiamo con un terzo punto P_3 ben separato, tracciamo una curva per i tre punti e misuriamo le lunghezze $s_1=P_1P_3$ e $s_2=P_2P_3$. Sebbene P_1 e P_2 siano indistinguibili, la misura di questi pezzi di curva dà dei valori distinti, perché nei punti estremi P_1 e P_2 è mediata su spazi diversi. In questo modo si riesce a riconoscere il punto P_1 rispetto al punto P_2 mediante la differenza delle lunghezze s_1 e s_2, cioè mediante $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}$. La distanza negativa $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}-\gamma$ dei due punti è quindi una quantità misurabile.

In questa situazione dobbiamo chiederci se l'introduzione della costante γ nella legge metrica non sia una complicazione del tutto inutile. Si può pensare che dovrebbe bastare l'introdurre la metrica riemanniana immodificata e dare ad essa, a causa dell'allargamento del punto, un significato esclusivamente statistico. Poiché $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}$ anche per punti vicini è una quantità misurabile, pare che sia la cosa più facile mantenerla come misura delle lunghezze, e, a parte la statistica, lasciare tutto come prima.

Contro una tale proposta vi è il seguente argomento. Se introduciamo $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}$ come distanza s, la misura così introdotta ha per i punti con $s<\gamma$ un senso del tutto diverso che per quelli con $s>\gamma$. Se infatti $s>\gamma$, si può sempre riconoscere con un punto che giaccia sul tratto di curva, che si ha a che fare con un tratto $>\gamma$. Se invece $s<\gamma$, si possono sempre scegliere dei punti dello spazio a destra e a sinistra del tratto di curva, che ne rendano possibile la misura. Si può concludere così che in questo caso la misura $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}$ non è determinata da condizioni di misura interne, ma da condizioni esterne al tratto. E questa origine della misura è sottolineata dal segno negativo della distanza $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}-\gamma$. In definitiva la risposta alla domanda, se si debba o meno introdurre γ nella legge metrica, dipende dall'interpretazione sulla natura dell'indeterminazione descritta con γ. Chi ritenga che si hanno oggetti "puntiformi", che realizzano nello spazio punti matematici definiti, non ha motivo di abbandonare la vecchia geometria e concederà al massimo che la tecnica di misura ha determinati limiti di principio e pertanto la legge metrica va interpretata in senso statistico. Ma in verità si tratta di una situazione in tutto analoga a quella della meccanica quantistica, nel senso che con l'allargamento del punto non si tratta di una insufficienza del mezzo di misura, ma di una indeterminazione che si trova nella natura dello spazio. La finzione del punto "matematico" è un’abitudine di pensiero, riguardo alla quale noi non siamo più consapevoli che si fonda su un processo di limite, la cui ammissibilità o conformità richiede in primo luogo una dimostrazione. Chi crede seriamente che la metrica sia da prescriversi secondo gli oggetti, e non gli oggetti secondo una metrica stabilita a piacere, deve chiedersi in primo luogo se il concetto di punto matematico sia significativo. Di fatto non lo è; non abbiamo nessuna possibilità di esibire tale punto, e pertanto non si vede perché si debba usare questo concetto. Poiché è vero che la natura non ci mette a disposizione dei regoli piccoli a piacere, l’ultimo elemento dello spazio non più ulteriormente scomponibile non è il punto matematico, ma il punto "fisico". La nostra rappresentazione di questo come una sfera è solo un sussidio temporaneo, che si serve dei concetti della geometria euclidea, per descrivere nell’ambito di questa geometria una situazione non comprensibile. In realtà non si tratta di una figura estesa nello spazio nel senso dell’immagine consueta, ma di un elemento geometrico non ulteriormente analizzabile, che nel suo esistere dobbiamo semplicemente accettare come tale, e che nella geometria di cui qui si parla ha lo stesso ruolo del punto matematico nello spazio euclideo.

Al confine γ della "sfera" lo spazio termina; l’"interno" non è più spazio. Il punto fisico è quindi privo di estensione come il punto matematico, come la metrica esprime simbolicamente, ponendo a zero il raggio della sfera. Per il fatto che di una particella elementare, che realizza un punto fisico, non si può dire che "riempie" un certo spazio, non risulta tuttavia che essa sia matematicamente puntiforme. Così la nostra geometria schiva l’infausta alternativa, se l’elettrone si debba trattare come puntiforme o esteso, equivalente alla domanda, se si voglia accettare una self-energia infinitamente grande o se si voglia rinunciare ad una formulazione relativistica delle leggi di campo. Secondo la nostra opinione l’elettrone non è nè puntiforme nè esteso, ma è una figura geometrica non ulteriormente risolubile, inaccessibile alla consueta rappresentazione dello spazio. La domanda riguardo alla "struttura interna" dell’elettrone o di un’altra particella elementare non la teniamo per significativa.

3. E’ degno di nota e appare di significato fondamentale che l’indeterminazione introdotta mediante un γ reale spontaneamente riguarda lo spazio e non anche il tempo. Invero anche per intervalli di tipo temporale ($g_{ik}dx^i dx^k<0$) si ha solo una misura statistica, ma l’indeterminazione non è provocata dal tempo, ma dalla posizione dell’orologio, nella quale il tempo viene letto. Una più precisa analisi del processo di misura lo chiarisce. Sia P_1P_2 un intervallo di tipo temporale, di modo che la sua lunghezza è misurata per mezzo di un orologio, la cui linea d’universo comprende P_1P_2, e che dà la lunghezza dell’intervallo mediante il suo tempo proprio. Poniamoci in un sistema di coordinate K, il cui asse dei tempi sia parallelo a P_1P_2, sicché l’orologio è a riposo rispetto a K. Sia esso un atomo d’idrogeno, il cui elettrone faccia da lancetta. Allora, per un dato istante, si può determinare la posizione relativa dell’elettrone rispetto al nucleo, ossia la posizione della lancetta, senza indeterminazione mediante un gran numero di misure di posizione compiute allo stesso tempo, di modo che istanti distinti, anche se prossimi a piacere, corrispondono sempre a posizioni distinte della lancetta. Ma rimane un’indeterminazione della posizione dell’orologio. Definiamo come posizione all’incirca il baricentro del sistema; questo punto si può indicare e fissare solo con l’indeterminazione γ, e questa circostanza causa il carattere statistico di $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}-\gamma$.

Il tentativo di introdurre un γ complesso al posto di uno reale, che produrrebbe oltre a un allargamento del punto anche uno del tempo, non si presenta promettente. E’ difficile vedere come portare una tale metrica in accordo con il principio di causalità, poiché la pretesa che due istanti non siano distinguibili è equivalente a quella, che causa ed effetto non siano correlati. L’introduzione di un γ complesso non può quindi portare a risultati sensati.

4. E’ una caratteristica assai rilevante della geometria qui discussa, che da un lato dissolva lo spazio in un discontinuo, -lo suddivide in celle- e dall’altro non distrugga la continuità della descrizione spaziale. Questa caratteristica assicura alla metrica la sua utilità fisica, ma rende inoltre significativo esprimere le leggi di natura mediante equazioni differenziali. Risulta che il

formalismo matematico mantiene ancora quel significato che sempre gli si è tacitamente attribuito, ma che veramente non ha in origine. Infatti per esempio la descrizione di un campo mediante una data funzione spaziale oppure la formazione di derivate spaziali come $\partial\mathfrak{E}/\partial x$ presuppone rigorosamente che a ciascun punto matematico si possa attribuire un valore determinato dell'intensità di campo. Nessuno ha mai creduto che ciò sia di fatto possibile, ma ognuno ha letto l'asserzione:" al punto P corrisponde la tale intensità di campo" in modo ragionevole: si associa a P un piccolo intorno e si intende l'intensità di campo nel punto P come valor medio su questo intorno. Poiché in natura non si hanno oggetti puntiformi, non è possibile misurare altro che un tal valor medio. Senza dirlo, non si è mai preso il formalismo matematico sul serio, ma lo si è sempre interpretato nel senso della metrica di cui qui si parla, poiché si attribuisce al punto matematico il senso di ciò che qui chiamiamo punto fisico.

Se si trattano i punti di una sfera come indistinguibili, è evidente che solo all'insieme di questi punti si può attribuire un valore assegnato dell'intensità di campo. Ciò corrisponde abbastanza alle possibilità di misura, perché l'intensità di campo in P è misurabile solo mediante l'effetto che il campo esercita su una particella che si trovi in P. Sebbene P non sia definito come punto matematico, ma solo come punto fisico, il contrassegnarlo con coordinate x,y,z fissate e variabili con continuità ha senso, poiché statisticamente possiamo separare due punti, anche quando sono arbitrariamente vicini. Perciò possiamo eseguire la derivata dell'intensità di campo rispetto alle coordinate, di modo che il formalismo delle leggi di campo non è mutato. Ciò che cambia è esclusivamente il significato del formalismo.

Per chi si attenga alla consueta idea dello spazio, la nostra definizione di una "intensità di campo nel punto P" si fonda su un processo di media. Ma bisogna guardarsi da un errore. E' infatti sbagliato prendere il valor medio dell'intensità di campo sui punti che appartengono alla sfera γ. Ciò significherebbe mediare su regioni del mondo diverse in sistemi di coordinate diversi, poiché la sfera γ come regione d'universo muta quando muta la direzione dell'asse dei tempi. Ne conseguirebbe che il valor medio così costruito per esempio di un tetravettore non si trasformerebbe come un tetravettore per trasformazione di Lorentz. La media di un vettore produce ancora un vettore solo quando viene effettuata in modo indipendente dal sistema di coordinate. Otteniamo ciò quando mediamo sulla totalità dei punti d'universo che non si possono distinguere metricamente da P. Essi giacciono tra il cono di luce con vertice in P e l'iperboloide a una falda $(g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2}=\gamma$. Se noi mediamo sui valori che un tensore assume nei punti di questo dominio, il risultato è ancora un tensore e le componenti di questo tensore rispetto agli assi del corrispondente sistema di coordinate sono ciò che qui interpretiamo come i valori dell'"intensità di campo nel punto P".

5. Mediante la nostra metrica nella formulazione introdotta le leggi naturali acquistano dall'inizio un senso, che finora è stato loro attribuito arbitrariamente. Ma è fisicamente notevole che certe quantità, e proprio quelle che hanno implicato la fisica in contraddizioni, hanno perso la loro definizione.

Rammentiamoci che le note difficoltà degli infiniti della teoria della radiazione quantistica derivano tutte insieme dal fatto che il sistema della radiazione, essendo permesse lunghezze d'onda infinitamente piccole, possiede infiniti gradi di libertà. Ogni grado di libertà significa un oscillatore e pertanto una determinata energia di punto zero, di modo che si ottiene un valore infinitamente grande per l'energia di punto zero del sistema. La soluzione di queste difficoltà può essere solo che in realtà il numero dei gradi di libertà non è infinito, perché il presentarsi di certe lunghezze d'onda è impedito da un principio.

Ora un tale principio appare dalla considerazione, che una sorgente di luce è definita soltanto entro i limiti di precisione γ e pertanto non possono essere emesse onde di lunghezza piccola a piacere. E di fatto si può mostrare che onde di lunghezza d'onda inferiore a γ vengono cancellate senza lasciar traccia dalla media richiesta dalla metrica.

Ciò non è immediatamente evidente. Abbiamo prima visto che la nostra metrica non modifica le equazioni differenziali della fisica, quindi neppure l'equazione delle onde. Di conseguenza anche le loro soluzioni sono mantenute e non abbiamo il diritto di escludere quelle di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola.

Anche l’argomento, che in questo caso le onde non sono più definite statisticamente e che la definizione di una lunghezza d’onda $\lambda \leq \gamma$ senza l’aiuto di punti dello spazio che stiano fuori non è possibile, non è un fondamento convincente per disconoscere un significato reale alle onde con $\lambda \leq \gamma$. Allora quando le si trattano col formalismo, deve pur raggiungersi un qualche loro significato. In effetti ciò non succede. Si deve infatti osservare che in un moto ondulatorio si sovrappongono due indeterminazioni. Una dipende dal fatto che il punto dello spazio P, per il quale vogliamo determinare l’ampiezza dell’onda, è definito con l’approssimazione γ. Questo ci induce a mediare nel modo prima descritto su un intorno di P, e i valori medi così costruiti sono quelli che intervengono nell’equazione delle onde da noi assunta. Tuttavia non solo P, ma anche la sorgente di luce (per esempio una parete riflettente) è spazialmente indeterminata, cosicché nel punto P, anche se esattamente determinato, non si potrebbe definire un valore più preciso dell’ampiezza. Per calcolare in questa situazione, dobbiamo di nuovo mediare sulle ampiezze all’interno della sfera γ. Il risultato è che ora tutte le onde con $\lambda \leq \gamma$ si annullano completamente, perché esse sono appiattite dalla media. Di un’onda, la cui λ sia un sottomultiplo di γ, non rimane più nulla che un’ampiezza costante nello spazio e nel tempo. Pertanto non si hanno fotoni con lunghezza d’onda inferiore a γ. Se si assumesse $\gamma = e^2/mc^2$, il limite superiore dell’energia dei fotoni corrisponderebbe a $hc/\gamma = 3 \cdot 10^8$ e-Volt. Sarebbe in accordo con questa ipotesi il fatto che le energie più alte osservate nell’ultraradiazione sono da attribuirsi a radiazione corpuscolare.

Sembra a prima vista che l’introduzione di un limite inferiore per la lunghezza d’onda di un fotone non sia in accordo con la teoria della relatività. Come può accadere infatti, che da un sistema di coordinate K, nel quale un fotone abbia un $\lambda > \gamma$, si possa passare ad un altro K’, per il quale la trasformazione dà $\lambda' < \gamma$? Quando per un tale passaggio il fotone semplicemente sparisce, che cosa succede della sua energia? A questa domanda la nostra teoria dà una risposta sorprendente. Il fatto è che per la trasformazione il fotone semplicemente non si annulla; esso perde il suo carattere di moto ondulatorio, e riappare come un campo statico. Infatti si annulla per $\lambda=\gamma/n$, come abbiamo visto, il valor medio delle intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{h}$, ma la media di $\mathfrak{E}^2$ e di $\mathfrak{H}^2$non si annulla, bensì ha un valore costante nello spazio e nel tempo. Si può, se si vuole, interpretare il comportamento di questi campi statici dicendo che le oscillazioni del fotone nel sistema K’ sono così dense, che vanno oltre il potere risolutivo della metrica. Tuttavia questo punto di vista non è, crediamo, interamente giusto, e pertanto sottolineiamo subito una caratteristica essenziale del campo di un fotone. Si distingue infatti dai consueti campi statici per il fatto che $\mathfrak{E}^2$ e $\mathfrak{H}^2$ non sono il quadrato delle intensità di campo considerate, come naturalmente si comprende, poiché sia $\mathfrak{E}^2$ e $\mathfrak{H}^2$ che $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ hanno il significato di valori medi. Questa distinzione tra le intensità di campo e i loro quadrati è assai importante dal punto di vista della relatività, perché assicura la possibilità che un campo statico si ritrasformi in un fotone per trasformazione di coordinate.

Si comprende facilmente che le onde materiali non cadono nel campo di validità delle considerazioni qui esposte. L’onda di de Broglie ha un carattere puramente simbolico ed ha l’evidente natura di una funzione di probabilità. Essa non è emessa come l’onda di un fotone, ma è fissata dallo stato iniziale del sistema entro i limiti di misurabilità. Il processo di media necessario per i fotoni, per il quale vanno perdute le onde con $\lambda\leq\gamma$, non è ammesso per le onde materiali.