

## H. Minkowski † (Gottingen), Spazio e tempo<sup>1,2</sup>

Signori,

le idee sullo spazio e sul tempo che io vi svilupperò sono derivate da radici fisiche sperimentali. In ciò sta la loro forza. La loro tendenza è radicale. Da ora lo spazio per conto suo ed il tempo per conto suo dovranno calare completamente nell'ombra e solo una sorta di unione di entrambi conserverà esistenza autonoma.

### I.

Vorrei esporre anzitutto come dalla meccanica solitamente assunta si possa giungere con una trattazione puramente matematica a idee mutate sullo spazio e sul tempo. Le equazioni della

---

<sup>1</sup>Physik. Zeitschr. **10**, 104 (1909).

<sup>2</sup>*Pochi giorni prima dell'inizio delle vacanze natalizie Minkowski mi ha detto che poco prima aveva mandato il promesso manoscritto della sua relazione alla redazione del Physikalischen Zeitschrift; quattro giorni prima della sua morte ho parlato con lui sul contenuto del lavoro. Nessuno che avesse visto l'uomo pieno di forza giovanile, operosamente lieto, avrebbe potuto presagire che la morte aveva già spiegato la sua nera ala su di lui. La carriera scientifica di Minkowski era iniziata con inconsueto splendore. Già all'età di 19 anni aveva vinto l'importante premio dell'accademia di Parigi. Da nuovi cammini, da lavori dell'importanza più profonda, scopo dei quali a lui appariva una nuova, più unitaria visione del mondo, l'ha sottratto una tragica sorte. Ma nelle ultime ore della sua vita era con lui un pensiero consolatore, che le sue idee vivono nella scienza, che altre mani costruiranno ulteriormente sulle sue teorie. Nel nostro ricordo tuttavia egli non vivrà soltanto come il matematico geniale, ma anche come l'uomo amabile e modesto, soccorrevole e buono.*

meccanica di Newton mostrano una duplice invarianza. Da un lato la loro forma rimane immutata quando si sottopone il sistema di coordinate spaziali scelto originalmente ad un arbitrario cambiamento di giacitura, dall'altro, quando lo si muta nel suo stato di moto, cioè si imprime ad esso una qualche traslazione uniforme; l'origine dei tempi inoltre non gioca alcun ruolo. Si è abituati a considerare gli assiomi della geometria per definiti quando ci si sente pronti per gli assiomi della meccanica, e perciò assai raramente quelle due invarianze vengono nominate insieme. Ciascuna di esse significa un certo gruppo di trasformazioni in sè per le equazioni differenziali della meccanica. L'esistenza del primo gruppo la si vede come un carattere fondamentale dello spazio. Il secondo gruppo lo si tratta al più con disprezzo, e si attribuisce poco senso al fatto che dai fenomeni fisici non si possa mai decidere se lo spazio presunto in quiete non si riveli in fin dei conti in una traslazione uniforme. Così quei due gruppi conducono l'uno accanto all'altro un'esistenza completamente separata. Il loro carattere completamente eterogeneo può aver distolto dal comporli. Ma proprio il gruppo intero composto come un tutto ci dà da pensare.

Cercheremo di renderci chiara la situazione graficamente. Siano  $x, y, z$  coordinate rettangolari per lo spazio, e  $t$  contrassegni il tempo. Oggetto della nostra percezione sono sempre soltanto posizioni e tempi insieme. Non si è mai osservata una posizione altrimenti che a un certo tempo, ed un tempo altrimenti che in una certa posizione. Ma io rispetto il dogma che spazio e tempo abbiano sempre un significato indipendente. Chiamerò un punto spaziale ad un punto del tempo, cioè un sistema di valori  $x, y, z, t$ , un punto d'universo. La molteplicità di tutti i sistemi di valori pensabili  $x, y, z, t$  la chiameremo l'universo. Io potrei con un gesso ardito tracciare quattro assi d'universo sulla lavagna. Certo un asse disegnato consiste di molecole che oscillano fortemente e segue il viaggio della terra nell'universo, e pertanto dà già abbastanza da astrarre; l'astrazione alquanto più grande associata al numero 4 non risulta dolorosa al matematico. Per non lasciare da nessuna parte un vuoto spalancato, immagineremo che in tutte le posizioni e ad ogni tempo ci sia qualcosa di percettibile. Per non parlare di materia o di

elettricità, userò per questo qualcosa la parola sostanza. Fissiamo la nostra attenzione sul punto sostanziale che si trova nel punto d'universo  $x, y, z, t$  e immaginiamo di essere in grado di riconoscere di nuovo questo punto sostanziale ad ogni altro tempo. Ad un elemento temporale  $dt$  devono corrispondere le variazioni  $dx, dy, dz$  delle coordinate spaziali di questo punto sostanziale. Otteniamo quindi come immagine dello svolgersi eterno della vita del punto sostanziale una curva nell'universo, una linea d'universo, i punti della quale sono contrassegnati univocamente con il parametro  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . L'intero universo appare risolto in tali linee d'universo, e potrei subito anticipare che secondo me le leggi fisiche potrebbero trovare la loro espressione più completa come relazioni mutue tra queste linee d'universo.

Mediante il concetto di spazio e tempo la varietà  $x, y, z$  per  $t=0$  e l'asse  $t$  si disarticolano. Se per semplicità teniamo fissa l'origine dello spazio e del tempo, il primo gruppo ricordato della meccanica significa che possiamo sottoporre gli assi  $x, y, z$  in  $t=0$  ad una rotazione arbitraria, corrispondente ad una trasformazione lineare omogenea dell'espressione

$$x^2 + y^2 + z^2$$

in sé. Il secondo gruppo invece significa che noi, pur senza mutare l'espressione delle leggi meccaniche, possiamo sostituire

$$x, y, z, t \text{ con } x-\alpha t, y-\beta t, z-\gamma t, t,$$

con costanti qualsiansi  $\alpha, \beta, \gamma$ . All'asse del tempo si può di conseguenza attribuire una direzione completamente arbitraria nella metà superiore  $t>0$  dell'universo. Che cosa ha a che fare ora la prescrizione dell'ortogonalità nello spazio con questa completa libertà dell'asse temporale nella parte di sopra?

Per stabilire il legame, introduciamo un parametro positivo  $c$  e consideriamo la struttura

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Si tratta di due falde simmetriche rispetto a  $t=0$  analogamente all'iperboloide a due falde. Trattiamo la falda nella regione  $t>0$ , e consideriamo inoltre quelle trasformazioni lineari omogenee di

$x, y, z, t$  nelle quattro nuove variabili  $x', y', z', t'$  alle quali corrisponderà l'espressione di questa falda nelle nuove variabili. A queste trasformazioni appartengono evidentemente le rotazioni dello spazio attorno all'origine. Una comprensione completa delle trasformazioni restanti la otteniamo poi già se poniamo l'attenzione su una di esse, che non dia variazione rispetto a  $y$  e a  $z$ . Disegniamo la sezione di quella falda con il piano degli assi  $x$  e  $t$ , il ramo superiore dell'iperbole  $c^2 t^2 - x^2 = 1$ , con i suoi asintoti (Fig. 1). Inoltre si tracci dall'origine  $O$  un raggio vettore arbitrario  $OA'$  di questo ramo di iperbole, si conduca la tangente in  $A'$  all'iperbole fino all'intersezione  $B'$  con l'asintoto destro, si completi  $OA'B'$  nel parallelogrammo  $OA'B'C'$ , infine si prolunghi  $B'C'$  fino all'intersezione  $D'$  con l'asse  $x$ . Se assumiamo ora  $OC'$  e  $OA'$  come assi per le coordinate parallele  $x', t'$  con le unità di lunghezza tali che  $OC'=1, OA'=1/c$ , quel ramo d'iperbole ottiene nuovamente l'espressione  $c^2 t'^2 - x'^2 = 1, t' > 0$ , e la trasformazione di  $x, y, z, t$  in  $x', y', z', t'$  è una delle trasformazioni in questione. Aggiungiamo ora alle trasformazioni caratterizzate ancora le traslazioni arbitrarie delle origini dello spazio e del tempo e costituiamo con ciò un gruppo di trasformazioni, che dipenderà evidentemente ancora dal parametro  $c$ , che indico con  $G_c$ .

Lasciamo ora che  $c$  cresca all'infinito, e che quindi  $1/c$  converga a zero; risulta chiaro dalla figura disegnata che il ramo d'iperbole si accosta sempre più all'asse  $x$ , che l'angolo tra gli asintoti si allarga verso uno piatto, che quella trasformazione speciale nel limite si muta in una tale che l'asse  $t'$  può avere una direzione arbitraria verso l'alto, ed  $x'$  approssima  $x$  con sempre maggior precisione. Tenendo conto di questo è chiaro che dal gruppo  $G_c$  nel limite per  $c = \infty$ , e quindi come gruppo  $G_\infty$ , si otterrà proprio l'intero gruppo che appartiene alla meccanica newtoniana. Per questo stato di cose e poiché  $G_c$  è matematicamente più comprensibile di  $G_\infty$ , un matematico con la fantasia libera avrebbe potuto ben arrivare all'idea che al fondo dei fenomeni naturali vi sia di fatto un'invarianza non rispetto al gruppo  $G_\infty$ , ma piuttosto rispetto ad un gruppo  $G_c$  con un determinato valore di  $c$  finito, solo nelle consuete unità di misura estremamente grande. Una tale intuizione avrebbe costituito un trionfo straordinario

della matematica pura. Ora, qui la matematica non ha fatto sul serio; le rimane tuttavia la soddisfazione che essa, con i suoi sensi acuiti nelle libere prospettive grazie ai suoi fortunati precedenti, può cogliere immediatamente le conseguenze profonde di una tale rielaborazione della nostra comprensione della natura.

Osserverò subito di quale valore di  $c$  si tratta in definitiva. *Per  $c$  si introdurrà la velocità di propagazione della luce nello spazio vuoto.* Se non vogliamo parlare nè dello spazio nè del vuoto possiamo caratterizzare questa grandezza come il rapporto tra l'unità elettrostatica e quella elettromagnetica della quantità di elettricità.

L'esistenza dell'invarianza delle leggi naturali per il gruppo relativo  $G_c$  potrebbe ora essere intesa così:

Dalla totalità dei fenomeni naturali con l'accumularsi di approssimazioni successive si può derivare sempre più precisamente un sistema di riferimento  $x, y, z$  e  $t$ , spazio e tempo, mediante il quale i fenomeni si rappresentano secondo certe leggi. Questo sistema di riferimento tuttavia non è affatto fissato univocamente dai fenomeni. *Si può mutare arbitrariamente il sistema di riferimento secondo le trasformazioni del suddetto gruppo  $G_c$  senza che l'espressione delle leggi naturali per questo si muti.*

Per esempio si può denotare come tempo nella figura disegnata anche  $t'$ , ma allora in connessione con ciò si deve definire necessariamente lo spazio mediante l'insieme dei tre parametri  $x', y, z$ , per cui ora le leggi fisiche saranno espresse mediante  $x', y, z, t'$  esattamente come per mezzo di  $x, y, z, t$ . Con ciò avremo nell'universo non più lo spazio, ma infiniti spazi, analogamente a come si hanno nello spazio tridimensionale infiniti piani. La geometria tridimensionale sarà un capitolo della fisica tetradimensionale. Si riconosce, come avevo detto all'inizio, che spazio e tempo devono calare nell'ombra e che deve esistere solo un universo.

## II.

Ora si pone la domanda, quali circostanze ci inducono alla mutata concezione dello spazio e del tempo? Essa non contraddice mai i fenomeni? Assicura infine vantaggi nella descrizione dei

fenomeni?

Prima di addentrarci in questo, bisogna premettere una osservazione importante. Se abbiamo individuato in qualche modo spazio e tempo, allora ad un punto sostanziale a riposo corrisponde come linea d'universo una retta parallela all'asse  $t$ , ad un punto sostanziale che si muova uniformemente una retta inclinata rispetto all'asse  $t$ , ad un punto sostanziale che si muova di moto non uniforme una linea d'universo curva in qualche modo. Se consideriamo in un punto  $x, y, z, t$  scelto a caso la linea d'universo che passa per lì e la troviamo ivi parallela ad un certo raggio vettore  $OA'$  della suddetta falda di iperboloidi, possiamo introdurre  $OA'$  come nuovo asse dei tempi, e secondo le nuove definizioni di spazio e di tempo così determinate la sostanza nel punto considerato appare a riposo. Introduciamo ora questo assioma fondamentale:

*La sostanza che si trova in un punto d'universo scelto a piacere può sempre, mediante una opportuna determinazione dello spazio e del tempo, essere vista a riposo.* L'assioma significa che in ogni punto d'universo l'espressione

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

risulta positiva ovvero, in modo equivalente, che ogni velocità  $v$  risulta sempre minore di  $c$ . Pertanto per tutte le velocità sostanziali  $c$  risulterà un limite superiore e in questo sta il significato più profondo della quantità  $c$ . Questo assioma ha alla prima impressione qualcosa di sgradevole. Bisogna tuttavia pensare che ora avrà luogo una meccanica modificata, nella quale compare la radice quadrata di quella forma differenziale quadratica, cosicché i casi di velocità superluminale giocheranno un ruolo non superiore a quello delle figure con coordinate immaginarie in geometria.

Ora la spinta e il vero movente per l'assunzione del gruppo  $G_c$  son venuti dal fatto che l'equazione differenziale per la propagazione di onde luminose nello spazio vuoto possiede<sup>3</sup> quel

---

<sup>3</sup>Una conseguenza importante di questo fatto si trova già in W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887, p. 41.

gruppo  $G_c$ . D'altra parte l'idea di corpo rigido ha un senso solo in una meccanica con il gruppo  $G_\infty$ . Ma se si avesse ora un'ottica con  $G_c$  ed esistessero d'altra parte corpi rigidi, se ne dedurrebbe facilmente che mediante le due falde di iperboloide corrispondenti a  $G_c$  e a  $G_\infty$  sarebbe individuata una direzione di  $t$ , e questo avrebbe ulteriormente a sua volta la conseguenza che mediante opportuni strumenti ottici rigidi in laboratorio dovrebbe essere possibile rilevare un cambiamento dei fenomeni per orientazioni diverse rispetto alla direzione di avanzamento della terra. Tutti gli sforzi diretti a questo scopo, in particolare un famoso esperimento di interferenza di Michelson, hanno dato tuttavia un risultato negativo. Per ottenere una spiegazione di questo H.A. Lorentz ha fatto un'ipotesi, il cui successo dipende proprio dall'invarianza dell'ottica per il gruppo  $G_c$ . Secondo Lorentz ogni corpo che possieda un moto deve subire un accorciamento nella direzione del moto e precisamente, avendo una velocità  $v$ , nel rapporto

$$1 : \sqrt{1 - v^2/c^2} .$$

Quest'ipotesi suona oltremodo fantastica. Infatti la contrazione non va in qualche modo pensata come conseguenza della resistenza dell'etere, ma puramente come un dono dall'alto, come circostanza accessoria dello stato di moto.

Mostrerò ora sulla nostra figura che l'ipotesi di Lorentz è del tutto equivalente alla nuova concezione dello spazio e del tempo, mediante la quale essa risulta molto più comprensibile. Astraiamo per semplicità da  $y$  e da  $z$  e pensiamo ad un universo spazialmente monodimensionale; allora strisce a bordi paralleli (vedi Fig. 1) una diretta come l'asse  $t$  e una inclinata rispetto all'asse  $t$  sono immagini per l'evoluzione rispettivamente di un corpo a riposo e di un corpo in moto uniforme, che mantengono sempre un'estensione spaziale costante. Se  $OA'$  è parallelo alla seconda striscia, possiamo introdurre  $t'$  come tempo ed  $x'$  come coordinata spaziale, e allora il secondo corpo appare a riposo, il primo in moto uniforme. Assumiamo ora che il primo corpo considerato a riposo abbia la lunghezza  $l$ , cioè che la sezione  $PP$  della prima striscia con l'asse  $x$  sia uguale a  $l \cdot OC$ , dove  $OC$

rappresenta l'unità di lunghezza lungo l'asse  $x$ , e che d'altra parte il secondo corpo considerato a riposo abbia la stessa lunghezza  $l$ ; ciò significa che la sezione della seconda striscia misurata parallelamente all'asse  $x'$  è  $Q'Q'=l \cdot OC'$ . Abbiamo ora in questi due corpi le immagini di due elettroni di Lorentz uguali, uno a riposo ed uno in moto uniforme. Se restiamo fissi nel sistema originario di coordinate  $x, t$ , come estensione del secondo elettrone si ha la sezione  $QQ$  della striscia corrispondente presa parallelamente all'asse  $x$ . Ora evidentemente, poiché  $Q'Q'=l \cdot OC'$ , si ha che  $QQ=l \cdot OD'$ . Un calcolo facile dà, quando  $dx/dt$  per la seconda striscia è uguale a  $v$ :

$$OD' = OC \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} ,$$

e quindi

$$PP:QQ = 1 : \sqrt{1 - v^2/c^2} .$$

Questo dunque è il senso dell'ipotesi di Lorentz della contrazione dell'elettrone in seguito al moto. Se d'altra parte assumiamo il secondo elettrone come in quiete, e adottiamo quindi il sistema di riferimento  $x', t'$ , come lunghezza del primo dobbiamo indicare la sezione  $P'P'$  della sua striscia presa parallelamente a  $OC'$  e troveremo il primo elettrone accorciato rispetto al secondo nel medesimo rapporto; è quindi

$$P'P':Q'Q' = OD:OC' = OD':OC = QQ:PP .$$

Lorentz chiamò  $t'$  dipendente da  $x$  e  $t$  tempo locale dell'elettrone in moto uniforme e sviluppò una costruzione fisica di quest'idea per una miglior comprensione dell'ipotesi della contrazione. E' contribuito in primo luogo di Einstein<sup>4</sup> l'aver tuttavia riconosciuto chiaramente che il tempo di un elettrone è altrettanto buono di quello dell'altro, cioè che  $t$  e  $t'$  si devono trattare allo stesso modo. Con ciò il tempo è stato abolito come concetto univocamente fissato dai fenomeni. Al concetto di spazio

---

<sup>4</sup>A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4**, 411, 1907.



non avevano prestato attenzione nè Einstein nè Lorentz, forse perché nella suddetta trasformazione speciale, nella quale il piano  $x', t'$  coincide con il piano  $x, t$ , è possibile un'interpretazione che lasci l'asse  $x$  al suo posto. Intervenire sul concetto di spazio in maniera corrispondente, è da stimarsi un'audacia della cultura matematica. Dopo questo ulteriore passo, tuttavia irrinunciabile per la vera comprensione del gruppo  $G_c$ , mi sembra però che le parole *postulato di relatività* per l'imposizione di un'invarianza rispetto al gruppo  $G_c$  siano assai deboli. Poiché il senso del postulato è che attraverso i fenomeni è dato solo il mondo tetradimensionale nello spazio e nel tempo, ma che la proiezione nello spazio e nel tempo può essere assegnata con una certa libertà, potrei piuttosto dare a questa asserzione il nome di *postulato dell'universo assoluto* (ovvero in breve *postulato d'universo*).

### III.

Mediante il postulato d'universo è possibile una trattazione uniforme delle quattro coordinate  $x, y, z, t$  di un punto d'universo. Da qui, come mostrerò subito, acquistano chiarezza le forme sotto le quali hanno luogo le leggi fisiche. Soprattutto il concetto di accelerazione acquista un carattere preciso.

Mi servirò di una rappresentazione geometrica, che si ottiene immediatamente quando nella terna  $x, y, z$  si astragga tacitamente da  $z$ . Assumiamo un punto d'universo arbitrario  $O$  come origine spaziotemporale. Il cono

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

con  $O$  come vertice (Fig. 2), consiste di due parti, una con valori di  $t < 0$ , l'altra con valori di  $t > 0$ . La prima, il cono del passato di  $O$ , consiste diciamo di tutti i punti d'universo che "mandano luce ad  $O$ ", la seconda, il cono del futuro di  $O$ , di tutti i punti d'universo che "ricevono luce da  $O$ ". La regione limitata solo dal cono del passato rappresenta il passato di  $O$ , quella limitata solo dal cono del futuro, il futuro di  $O$ . Nel futuro di  $O$  è compresa la già considerata falda d'iperboloide

$$F = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0 .$$

La regione tra i coni sarà riempita dalle figure di iperboloide ad una falda

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = k^2$$

per tutti i valori costanti positivi  $k^2$ . Sono importanti per noi le iperboli aventi  $O$  come centro che giacciono su queste ultime figure. I singoli rami di queste iperboli li indicheremo per brevità come *iperboli intermedie di centro  $O$* . Un tale ramo di iperbole, considerato come linea d'universo di un punto sostanziale, rappresenterebbe un moto che per  $t = -\infty$  e  $t = +\infty$  si eleva asintoticamente alla velocità della luce  $c$ .

In analogia con il concetto di vettore nello spazio chiamiamo ora vettore un segmento orientato nella varietà  $x, y, z, t$ ; dobbiamo quindi distinguere tra i vettori di tipo temporale con direzioni da  $O$  verso la falda  $+F=1, t>0$  e i vettori di tipo spaziale con direzioni da  $O$  verso  $-F=1$ . L'asse dei tempi può stare parallelo a ciascun vettore del primo tipo. Ogni punto d'universo compreso tra il cono del passato e il cono del futuro di  $O$  può sempre esser fatto diventare, mediante il sistema di riferimento, simultaneo ad  $O$ , ma allo stesso modo anche anteriore o posteriore ad  $O$ . Ogni punto d'universo del passato di  $O$  è necessariamente sempre anteriore ad  $O$ , ogni punto d'universo del futuro di  $O$  è necessariamente sempre posteriore. Il limite  $c = \infty$  corrisponde ad un completo schiacciarsi del taglio cuneiforme tra cono del passato e cono del futuro nella varietà  $t=0$ . Nelle figure disegnate questo taglio è intenzionalmente rappresentato con diverse aperture.

Un dato vettore, come quello da  $O$  a  $x, y, z, t$ , lo scomponiamo nelle componenti  $x, y, z, t$ . Se le direzioni di due vettori sono rispettivamente quella di un raggio vettore  $OR$  ad una delle superfici  $\mp F=1$  e quella di uno tangente  $RS$  nel punto  $R$  della superficie considerata, i due vettori devono chiamarsi tra loro *normali*. Pertanto

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

è la condizione perché i vettori di componenti  $x, y, z, t$  e  $x_1, y_1, z_1, t_1$  siano normali tra di loro.

Per la lunghezza dei vettori di direzioni diverse si fisserà d'ora in poi l'unità di lunghezza in modo tale che un vettore spaziale da  $O$  a  $-F=1$  abbia sempre la lunghezza 1, mentre ad un vettore temporale da  $O$  a  $+F=1$ ,  $t>0$  sia attribuita sempre la lunghezza  $1/c$ .

Pensiamo ora in un punto d'universo  $P(x, y, z, t)$  la linea d'universo di un punto sostanziale che passa da lì; allora al vettore elementare temporale  $dx, dy, dz, dt$  della linea in  $P$  corrisponde la lunghezza

$$d\tau = \frac{1}{c} [c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} .$$

L'integrale  $\int d\tau = \tau$  di questa lunghezza eseguito lungo la linea d'universo da un qualche punto di partenza fisso  $P_0$  fino al punto d'arrivo corrente  $P$  lo chiameremo *tempo proprio* del punto sostanziale in  $P$ . Lungo la linea d'universo consideriamo  $x, y, z, t$ , cioè le componenti del vettore  $OP$ , come funzioni del tempo proprio  $\tau$ , indichiamo le loro derivate prime rispetto a  $\tau$  con  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ , le loro derivate seconde rispetto a  $\tau$  con  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ , e i vettori corrispondenti li chiamiamo: la derivata di  $OP$  rispetto a  $\tau$  *vettore del moto* in  $P$ , la derivata di quest'ultimo rispetto a  $\tau$  *vettore accelerazione* in  $P$ . Risulta quindi

$$c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2 ,$$

$$c^2 \ddot{t} \dot{t} - \ddot{x} \dot{x} - \ddot{y} \dot{y} - \ddot{z} \dot{z} = 0 ,$$

cioè il vettore del moto è il vettore temporale di lunghezza 1 nella direzione della linea d'universo in  $P$ , e il vettore accelerazione è normale al vettore del moto, e quindi certamente un vettore spaziale.

Ora esiste un ramo d'iperbole fissato univocamente, che ha con la linea d'universo in  $P$  tre punti infinitamente vicini in comune, e gli asintoti del quale sono generatrici rispettivamente di un cono del passato e di un cono del futuro. Questo ramo d'iperbole si chiama *l'iperbole di curvatura* in  $P$  (vedi sotto la Fig. 3). Se  $M$  è il centro di questa iperbole, abbiamo a che fare con un'iperbole intermedia di centro  $M$ . Sia ora  $\rho$  la lunghezza del vettore  $MP$ , allora riconosciamo il vettore accelerazione in  $P$

come il vettore nella direzione  $MP$  di lunghezza  $c^2/\rho$ .

Se  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{t}$  sono tutti nulli, l'iperbole di curvatura si riduce alla retta tangente alla linea d'universo in  $P$  e si deve porre  $\rho=\infty$ .

#### IV.

Perché il postulato del gruppo  $G_c$  per le leggi fisiche non porti in nessun caso ad una contraddizione è inevitabile affrontare una revisione dell'intera fisica sulla base dell'assunzione di questo gruppo. Questa revisione è già in un certo ambito compiuta con successo per le questioni della termodinamica e della radiazione termica<sup>5</sup>, per i processi elettromagnetici, e infine per la meccanica con il mantenimento del concetto di massa<sup>6</sup>. Riguardo a quest'ultimo ambito bisogna prima di tutto sollevare la questione: quando una forza con le componenti  $X, Y, Z$  secondo gli assi spaziali agisce in un punto d'universo  $P(x, y, z, t)$ , dove il vettore del moto è  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ , a quale forza corrisponde questa forza in seguito a una variazione del sistema di riferimento?

Ora esistono certe leggi sperimentate relative alla forza ponderomotrice in campi elettromagnetici per quei casi in cui il gruppo  $G_c$  indubbiamente va accettato. Queste leggi portano alla regola semplice: per cambiamento del sistema di riferimento la forza assunta precedentemente si deve manifestare come forza nelle nuove coordinate spaziali in modo tale che risulti immutato il vettore corrispondente con le componenti

$$\dot{t}X, \dot{t}Y, \dot{t}Z, \dot{t}T,$$

dove

$$T = \frac{1}{c^2 \dot{t}} \left( \dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z \right)$$

---

<sup>5</sup>1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Berl. Ber. 1907, p. 542 (anche Ann. d. Phys. **26**, 1, 1908).

<sup>6</sup>H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. 1908, p. 53.

è la potenza della forza divisa per  $c^2$ . Questo vettore è sempre normale al vettore del moto in  $P$ . Un tal vettore tetradimensionale corrispondente ad una forza in  $P$  lo si chiamerà un *vettore di forza motrice*.

Ora si deve descrivere la linea d'universo che passa per  $P$  di un punto sostanziale con massa meccanica costante  $m$ . Il vettore del moto in  $P$  moltiplicato per  $m$  lo si chiama *vettore impulso* in  $P$ , il vettore dell'accelerazione in  $P$  moltiplicato per  $m$  lo si chiama il *vettore forza del moto* in  $P$ . Con queste definizioni la legge secondo la quale ha luogo il moto di un punto materiale per un dato vettore di forza motrice suona:

*Il vettore di forza del moto è uguale al vettore della forza motrice*<sup>7</sup>.

Questa affermazione riassume quattro equazioni per le componenti secondo i quattro assi, e la quarta equazione, poiché entrambi i suddetti vettori sono a priori normali al vettore del moto, si può considerare come una conseguenza delle prime tre. Per il significato prima dato di  $T$  la quarta rappresenta senza dubbio la legge dell'energia. Come energia cinetica del punto materiale si deve pertanto definire la componente del vettore impulso secondo l'asse  $t$  moltiplicata per  $c^2$ . L'espressione per essa è

$$mc^2 dt/d\tau = mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} ,$$

cioè, sottraendo la costante additiva  $mc^2$ , l'espressione  $mv^2/2$  della meccanica newtoniana a meno di quantità dell'ordine  $1/c^2$ . Molto evidente appare qui la dipendenza dell'energia dal sistema di riferimento. Ma poiché l'asse  $t$  può essere scelto nella direzione di ogni vettore temporale, la legge dell'energia, espressa in ogni sistema di riferimento possibile, contiene già l'intero sistema delle equazioni del moto. Questa circostanza mantiene nel già discusso passaggio al limite per  $c=\infty$  il suo significato per la costruzione assiomatica della meccanica

---

<sup>7</sup>H. Minkowski op. cit. p. 107. - Vedi anche M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. **4**, 136, 1906.

newtoniana ed è stata già osservata in tal senso da J.R. Schütz<sup>8</sup>.

Si può fissare fin dall'inizio il rapporto tra l'unità di lunghezza e l'unità di tempo in modo che il limite naturale delle velocità risulti  $c=1$ . Se si introduce poi  $t \cdot (-1)^{1/2} = s$  al posto di  $t$ , l'espressione quadratica differenziale per  $d\tau^2$  risulta completamente simmetrica in  $x, y, z, s$  e questa simmetria si propaga all'espressione matematica di ogni legge che non contraddica il postulato d'universo. Si può esprimere l'essenza di questo postulato in modo matematicamente assai pregnante con la formula mistica:  $3 \cdot 10^5 \text{ km} = (-1)^{1/2} \text{ sec.}$

## V.

I vantaggi ottenuti con il postulato d'universo forse non risultano così persuasivamente documentati come attraverso l'esposizione delle azioni che risultano secondo *la teoria di Maxwell-Lorentz per una carica puntiforme in moto arbitrario*. Pensiamo alla linea d'universo di un siffatto elettrone puntiforme con una carica  $e$ , e introduciamo il tempo proprio  $\tau$  lungo la linea da un certo punto di partenza. Per avere il campo provocato dall'elettrone in un certo punto d'universo  $P_1$ , costruiamo il cono del passato che appartiene a  $P_1$ . Esso incontra la linea d'universo illimitata dell'elettrone evidentemente in un unico punto  $P$  (Fig. 4), poiché le direzioni di questa sono ovunque quelle di vettori temporali. Conduciamo per  $P$  la tangente alla linea d'universo e costruiamo da  $P_1$  la normale  $P_1Q$  a questa tangente. La lunghezza di  $P_1Q$  sia  $r$ . La lunghezza di  $PQ$  per la definizione di cono del passato deve risultare allora  $r/c$ . Ora il vettore nella direzione  $PQ$  di lunghezza  $e/r$  rappresenta con le sue componenti secondo gli assi  $x, y, z$  il potenziale vettore moltiplicato per  $c$ , con la componente secondo l'asse  $t$  il potenziale scalare del campo generato dall'elettrone nel punto d'universo  $P_1$ . In questo

---

<sup>8</sup>J.R. Schütz, Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr. 1897, p. 110.

consiste la legge elementare stabilita da A. Liénard<sup>9</sup> e da E. Wiechert<sup>10</sup>.

Dalla descrizione del campo prodotto dall'elettrone risulta da sè che la suddivisione del campo in forza elettrica e magnetica è relativa, con riguardo all'asse temporale prescelto. In modo del tutto evidente le due forze vanno descritte insieme, con una certa analogia, anche se non completa, con un'elica di forze della meccanica.

Voglio ora indicare l'azione ponderomotrice esercitata da una carica puntiforme in moto arbitrario su un'altra carica puntiforme che si muova arbitrariamente. Pensiamo di condurre per il punto d'universo  $P_1$  la linea d'universo di un secondo elettrone puntiforme di carica  $e_1$ . Determiniamo  $P$ ,  $Q$ ,  $r$  come prima, costruiamo poi il centro  $M$  dell'iperbole di curvatura in  $P$ , infine la normale  $MN$  da  $M$  a una retta parallela a  $QP_1$  passante per  $P$ . Fissiamo, con  $P$  come origine, un sistema di riferimento nel modo seguente: l'asse  $t$  nella direzione  $PQ$ , l'asse  $x$  nella direzione  $QP_1$ , l'asse  $y$  nella direzione  $MN$ ; con ciò in definitiva è determinata anche la direzione dell'asse  $z$  come normale agli assi  $t$ ,  $x$ ,  $y$ . Il vettore accelerazione in  $P$  sia  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{t}$ , il vettore del moto in  $P_1$  sia  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{t}_1$ . Allora il vettore della forza motrice esercitata nel punto  $P_1$  dal primo elettrone in moto arbitrario sul secondo elettrone che si muove arbitrariamente risulta:

$$-ee_1 \left( \dot{t}_1 - \dot{x}_1/c \right) \mathfrak{K} ,$$

dove per le componenti  $\mathfrak{K}_x$ ,  $\mathfrak{K}_y$ ,  $\mathfrak{K}_z$ ,  $\mathfrak{K}_t$  del vettore  $\mathfrak{K}$  valgono le tre relazioni

$$c\mathfrak{K}_t - \mathfrak{K}_x = \frac{1}{r^2} , \quad \mathfrak{K}_y = \frac{\dot{y}}{c^2 r} , \quad \mathfrak{K}_z = 0$$

e in quarto luogo questo vettore  $\mathfrak{K}$  è normale al vettore del moto in  $P_1$  e per questo fatto dipende solamente da quest'ultimo vettore del moto.

Se si confrontano con questa enunciazione le formulazioni

<sup>9</sup>A. Liénard, L'éclairage électrique **16**, 5, 53, 106, 1898.

<sup>10</sup>E. Wiechert, Arch. néerl. (2) **5**, 549, 1900.

precedenti<sup>11</sup> della stessa legge elementare per l'azione ponderomotrice mutua di cariche puntiformi in moto, non si può non ammettere che le relazioni qui trattate rivelano la loro essenza interna di grande semplicità in quattro dimensioni, mentre su uno spazio tridimensionale imposto a priori danno solo una proiezione oltremodo complicata. -

Nella meccanica riformata secondo il postulato di relatività cadono per conto loro le disarmonie che avevano dato problemi tra la meccanica newtoniana e la nuova elettrodinamica. Tratterò ora la posizione della *legge d'attrazione newtoniana* rispetto a questo postulato. Assumerò che quando due punti materiali  $m$ ,  $m_1$  descrivono le loro linee d'universo, si eserciti da parte di  $m$  su  $m_1$  un vettore di forza motrice proprio con la stessa espressione data nel caso degli elettroni, solo che al posto di  $-ee_1$  dev'esserci ora  $+mm_1$ . Trattiamo ora in particolare il caso in cui il vettore di accelerazione di  $m$  sia sempre zero, di modo che possiamo introdurre un  $t$  tale che  $m$  sia da considerarsi a riposo; il moto di  $m_1$  inoltre dipende solo dal vettore forza provocato da  $m$ . Se si modifica questo vettore così assegnato dividendolo per  $\dot{t}_1$ , fattore che si riduce ad 1 a meno di quantità dell'ordine di  $1/c^2$ , si mostra<sup>12</sup> che poi per la posizione  $x_1, y_1, z_1$  di  $m_1$  e per la sua evoluzione temporale si avranno proprio di nuovo le leggi di Keplero, solo con la differenza che al posto del tempo  $t_1$  vi interverrà il tempo proprio  $\tau_1$  di  $m_1$ . Sulla base di questa semplice considerazione è facile vedere che la legge di attrazione proposta, assieme alla nuova meccanica, non è meno adatta a spiegare le osservazioni astronomiche della legge d'attrazione newtoniana associata alla meccanica newtoniana.

Anche le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi ponderabili obbediscono al postulato di relatività. Perfino la derivazione insegnata da Lorentz di queste equazioni sulla base delle idee della teoria dell'elettrone non ha bisogno affatto d'essere abbandonata, come mostrerò altrove.

---

<sup>11</sup>K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, p. 132; H.A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., Art. V, 14, 199.

<sup>12</sup>H. Minkowski, l. c., p. 110.



La validità senza eccezioni del postulato di relatività è, posso credere, il vero nucleo di un'immagine elettromagnetica dell'universo, la quale, avanzata da Lorentz, ulteriormente sviluppata da Einstein, a poco a poco viene completamente alla luce. Con il perfezionamento delle conseguenze matematiche si troveranno sufficienti indicazioni per verifiche sperimentali del postulato, affinché anche quelli, per i quali un cambiamento di idee da lungo tempo in uso è antipatico o doloroso, pensandoci si conciliino con l'idea di un'armonia prestabilita tra la matematica pura e la fisica.

(Ricevuto il 23 dicembre 1908.)