Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria

Piano della ricerca

E’ noto che la geometria presuppone come qualcosa di dato sia il concetto di spazio che i concetti basilari per le costruzioni nello spazio. Essa dà di questi solo definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali appaiono sotto la forma di assiomi. Il rapporto tra questi postulati rimane quindi nell’oscurità, non si vede se e in che modo la loro connessione sia necessaria, nè, a priori, se sia possibile.

Da Euclide fino a Legendre (per nominare il più celebre nuovo rielaboratore della geometria) questa oscurità non è stata eliminata nè dai matematici nè dai filosofi che si occupano di queste cose. Ciò ha la sua origine nel fatto che il concetto generale di grandezza multiplamente estesa, sotto il quale sono comprese le grandezze spaziali, rimane completamente non elaborato. Mi sono perciò proposto in primo luogo il compito di costruire il concetto di una grandezza multiplamente estesa dal concetto generale di grandezza. Risulta così che una grandezza multiplamente estesa è passibile di diverse relazioni metriche, e che lo spazio costituisce quindi solo un caso particolare di una grandezza triplamente estesa. Da qui segue una conseguenza necessaria, che le leggi della geometria non si possono derivare dal concetto generale di grandezza, ma che invece quelle proprietà mediante le quali lo spazio si distingue dalle altre grandezze triplamente estese pensabili possono essere ricavate solo dall’esperienza. Da ciò deriva il proposito di studiare i fatti più semplici, dai quali si possono determinare le relazioni metriche dello spazio - un proposito che per la natura della questione non è completamente determinato; invero si possono dare più sistemi di fatti semplici che sono sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio; il più importante per lo scopo presente è quello scelto per fondamento da Euclide. Questi fatti sono come tutti i fatti non necessari, ma solo di certezza empirica, sono ipotesi; si può così studiare la loro probabilità, che entro i limiti dell'osservazione è tuttavia assai grande, e dopo di ciò valutare l'ammissibilità della loro estensione al di là dei confini dell'osservazione sia dal lato dell'incommensurabilmente grande che dal lato dell'incommensurabilmente piccolo.

I. Concetto di una grandezza ad estensione n-pla.

Mentre provo ora ad assolvere il primo di questi compiti, lo sviluppo del concetto di grandezza multiplamente estesa, credo di poter tanto più rivendicare un giudizio indulgente, poiché a lavori siffatti di natura filosofica, dove la difficoltà sta più nei concetti che nella costruzione, sono poco abituato, e al di fuori di poche tracce, che il signor consigliere aulico segreto Gauss ha dato al riguardo nella seconda dissertazione sui residui biquadratici, nelle "Göttingeschen gelehrten Anzeigen" e nel suo "Jubiläumsschrift", e di alcune ricerche filosofiche di Herbart, non ho potuto avvalermi di alcun lavoro precedente.

1.

Concetti di grandezza sono possibili solo se si trova un concetto generale, che ammette modi di determinazione diversi. A seconda che tra questi modi di determinazione abbia luogo dall'uno all'altro una transizione continua o no, essi costituiscono molteplicità continue o discrete; i singoli modi di determinazione si chiamano nel primo caso punti, nel secondo elementi di questa molteplicità. Concetti i cui modi di determinazione costituiscano una molteplicità discreta sono così comuni che per cose date a piacimento, almeno nel linguaggio colto, si trova sempre un concetto, sotto il quale esse sono comprese (e i matematici potrebbero perciò nello studio delle grandezze discrete pervenire senza esitazioni al postulato di trattare le cose date come equivalenti); invece le occasioni per raffigurarsi dei concetti i cui modi di determinazione costituiscano una molteplicità continua sono nella vita comune così rari, che le posizioni degli oggetti dei sensi ed i colori sono i soli concetti semplici i cui modi di determinazione costituiscano una molteplicità multiplamente estesa. Occasioni più frequenti per la creazione e per l'elaborazione di questi concetti si trovano in primo luogo nella matematica superiore.

Parti determinate di una molteplicità, distinte mediante un contrassegno od un confine, si chiamano quanti. Il loro confronto quantitativo avviene per le grandezze discrete con la numerazione, per le grandezze continue con la misura. La misura consiste in una sovrapposizione delle grandezze da confrontare; per misurare è quindi richiesto un modo di usare una grandezza come misura di paragone per l'altra. In mancanza di questo, si possono confrontare due grandezze solo quando una sia una parte dell'altra, e anche allora si può decidere solo il più o il meno, ma non il quante volte. Le ricerche che si possono instituire su di esse in questo caso costituiscono una parte generale dello studio delle grandezze indipendente da determinazioni metriche, nella quale non si trattano le grandezze come esistenti indipendentemente dalla posizione, nè come esprimibili mediante una unità, ma soltanto come regioni in una molteplicità. Tale studio è diventato una necessità per molte parti della matematica, per esempio per la trattazione delle funzioni analitiche a più valori, e la mancanza di esso è certamente una causa principale del perché il celebre teorema di Abel ed i risultati di Lagrange, Pfaff, Jacobi per la teoria generale delle equazioni differenziali siano rimasti finora infruttuosi. Per lo scopo presente, di questa parte generale dello studio delle grandezze estese, nella quale nulla è presupposto che non sia già contenuto nel concetto stesso, è sufficiente porre in evidenza due punti, il primo dei quali riguarda l'origine del concetto di una molteplicità multiplamente estesa, il secondo la riduzione delle determinazioni di posizione in una data molteplicità a determinazioni di quantità, e renderà chiari i caratteri distintivi essenziali di una estensione n-pla.

2.

Se nel caso di un concetto il cui modo di determinazione costituisce una molteplicità continua si passa da un modo di determinazione di un certo tipo ad un altro, i modi di determinazione attraversati costituiscono una molteplicità singolarmente estesa, della quale il carattere distintivo essenziale è: in essa è possibile un progredire continuo solo secondo due direzioni, in avanti o indietro. Se ora si pensa che questa molteplicità vada in un’altra del tutto distinta, e di nuovo di quel certo tipo, cioè in modo tale che ogni punto vada in un punto determinato dell’altra, allora tutti i modi di determinazione così ottenuti costituiscono una molteplicità doppiamente estesa. In modo analogo si ottiene una molteplicità triplamente estesa, quando ci si raffigura che una molteplicità doppiamente estesa vada in un’altra completamente distinta in quel certo modo, ed è facile vedere come questa costruzione si possa ripetere. Se, in luogo del concetto come determinabile, si considera il suo oggetto come mutevole, allora questa costruzione può essere designata come la composizione di una varietà ad n+1 dimensioni a partire da una varietà ad n dimensioni e da una varietà ad una dimensione.

3.

Mostrerò ora come inversamente si possa scomporre una varietà, il cui dominio sia dato, in una varietà ad una dimensione ed in una varietà con meno dimensioni. A tale scopo si pensi un elemento variabile di una molteplicità ad una dimensione - considerato a partire da un punto di partenza fisso, di modo che i suoi valori siano confrontabili tra loro - che per ogni punto della molteplicità data abbia un valore determinato che varia in modo continuo con esso, ovvero con altre parole, si introduca nella molteplicità data una funzione continua della posizione, e precisamente una funzione tale che non sia costante lungo una parte di questa molteplicità. Ogni sistema di punti sui quali la funzione ha un valore costante costituisce allora una molteplicità continua con meno dimensioni di quella data. Col variare della funzione queste molteplicità vanno con continuità l’una nell’altra; si può quindi assumere che da una di queste si generino le restanti, e parlando in generale, ciò può accadere in modo tale che ogni punto vada in un punto determinato dell’altra; i casi eccezionali, il cui studio è importante, possono essere qui trascurati. Con ciò la determinazione della posizione nella molteplicità data si ricondurrà ad una determinazione di grandezza e ad una determinazione di posizione in una molteplicità con molteplicità di estensione minore. E’ ora facile vedere che questa molteplicità ha *n*-1 dimensioni, quando la molteplicità data ha estensione n-pla. Ripetendo *n* volte questo procedimento la determinazione della posizione in una molteplicità ad estensione *n*-pla si ricondurrà ad *n* determinazioni di grandezza, e quindi la determinazione della posizione in una data molteplicità, quando ciò sia possibile, ad un numero finito di determinazioni di quantità. Esistono tuttavia anche delle molteplicità nelle quali la determinazione di posizione richiede non un numero finito, ma o una serie infinita oppure una molteplicità continua di determinazioni di grandezza. Siffatte molteplicità costituiscono per esempio le determinazioni possibili di una funzione per un dato dominio, le forme possibili di una figura spaziale, eccetera.

II. Relazioni metriche di cui è capace una molteplicità di *n* dimensioni, nell'ipotesi che le linee possiedano una lunghezza indipendente dalla posizione, e che quindi ogni linea si possa misurare con ogni altra.

Dopo che si è costruito il concetto di una molteplicità ad estensione *n*-pla e che si è trovato come carattere distintivo essenziale della stessa, che la determinazione della posizione in essa si può ricondurre ad *n* determinazioni di grandezza, segue ora, come secondo dei propositi su enunciati, uno studio sulle relazioni metriche di cui una tale molteplicità è passibile, e sulle condizioni che sono sufficienti per la determinazione di questi relazioni. Queste relazioni metriche si possono studiare solo mediante concetti astratti di grandezza e le loro connessioni si possono rappresentare solo mediante formule; sotto certe ipotesi esse si possono tuttavia scomporre in relazioni che prese individualmente sono passibili di una rappresentazione geometrica, e in questo modo risulta possibile esprimere geometricamente i risultati del calcolo. Perciò, per giungere su terreno solido non si può proprio evitare uno studio astratto in formule, ma i risultati stessi si possono rappresentare in abito geometrico. Per entrambe gli aspetti i fondamenti sono contenuti nella celebre dissertazione del signor cancelliere aulico segreto Gauss sulle superfici curve.

1.

Le determinazioni metriche richiedono un'indipendenza delle grandezze dalla posizione, che può aver luogo in più d'un modo; l'ipotesi che più immediatamente si offre, che io svilupperò qui, è quella secondo la quale la lunghezza delle linee sia indipendente dalla posizione, e quindi ogni linea sia misurabile con ogni altra. Se la determinazione di posizione è ricondotta a determinazioni di grandezze, e quindi la posizione di un punto nella molteplicità data ad estensione n-pla risulta espressa mediante n quantità variabili x_1, x_2, x_3 e così via fino ad x_n, la determinazione di una linea consiste nel dare le quantità x come funzioni di una variabile. Il problema è quindi quello di dare un'espressione matematica per la lunghezza di una linea, e a questo scopo le quantità x devono essere trattate come esprimibili in termini di qualche unità. Tratterò questo problema solo sotto certe restrizioni e mi limiterò in primo luogo a quelle linee nelle quali i rapporti tra le quantità dx - le variazioni simultanee delle quantità x - variano con continuità; si possono allora pensare le linee suddivise in elementi, entro i quali i rapporti delle quantità dx si possono considerare come costanti, e il problema si riduce allora a costruire per ogni punto un'espressione generale dell'elemento di linea ds che esce da esso, la quale quindi conterrà le quantità x e le quantità dx. Assumo ora in secondo luogo che la lunghezza dell'elemento di linea, a meno di quantità del second'ordine, resti invariata quando tutti i punti dello stesso subiscono la stessa variazione di posizione infinitamente piccola, la qual cosa implica che quando tutte le quantità x crescono nello stesso rapporto, anche l'elemento di linea si muti nello stesso rapporto. Sotto queste ipotesi l'elemento di linea potrà essere una funzione arbitraria omogenea di primo grado delle quantità dx, che resta immutata quando tutte le quantità dx cambiano il loro segno, e nella quale le costanti arbitrarie sono funzioni continue delle quantità x. Per trovare il caso più semplice, cerco in primo luogo un'espressione per le molteplicità ad estensione (n-1)-pla, che distano ovunque allo stesso modo dall'origine dell'elemento di linea, cioè cerco una funzione continua della posizione, che le distingua l'una dall'altra. Essa dovrà, a partire dall'origine, o diminuire o crescere in tutte le direzioni; assumerò che essa cresca in tutte le direzioni e che quindi abbia un minimo nel punto. Pertanto, se le sue derivate prime e seconde sono finite, la sua derivata del prim'ordine deve annullarsi e quella del second'ordine non dev'esser mai negativa; assumo che essa resti sempre positiva. Questa espressione differenziale del second'ordine rimane quindi costante quando ds resta costante, e quando le quantità dx e quindi anche ds crescono tutte nello stesso rapporto, essa cresce di quel rapporto al quadrato; essa è quindi uguale a $\text{cost}\cdot ds^2$, e di conseguenza ds è uguale alla radice quadrata di una funzione sempre positiva omogenea di secondo grado nelle quantità dx, nella quale i coefficienti siano funzioni continue delle quantità x. Per lo spazio, quando si esprima la posizione dei punti con coordinate rettangolari, sarà $ds = [\Sigma(dx)^2]^{1/2}$; lo spazio è quindi contenuto in questo caso più semplice. Il caso più semplice successivo comprenderebbe quelle molteplicità nelle quali l'elemento di linea si può esprimere mediante la radice quarta di un'espressione differenziale di quarto grado. Lo studio di questo tipo più generale non richiederebbe invero principî essenzialmente diversi, ma impiegherebbe parecchio tempo e rispetto allo studio dello spazio getterebbe poca nuova luce, soprattutto perché i risultati non si potrebbero esprimere geometricamente; mi limito quindi alle molteplicità nelle quali l'elemento di linea sia espresso mediante la radice quadrata di un'espressione differenziale di secondo grado. Si può trasformare una tale espressione in un'altra analoga, sostituendo al posto delle n variabili indipendenti funzioni di n nuove variabili indipendenti. In questo modo tuttavia non si può trasformare qualunque espressione in qualunque altra; infatti l'espressione contiene $n\cdot(n+1)/2$ coefficienti, che sono funzioni arbitrarie delle variabili indipendenti; con l'introduzione di nuove variabili si possono soddisfare solo n relazioni e quindi solo n dei coefficienti possono essere resi uguali a delle quantità date. I restanti $n\cdot(n-1)/2$ sono determinati completamente dalla natura della molteplicità da rappresentare, e per la determinazione delle relazioni metriche di questa sono quindi necessarie $n\cdot(n-1)/2$ funzioni della posizione. Le molteplicità nelle quali, come nel piano e nello spazio, l’elemento di linea si può portare nella forma $[\Sigma(dx)^2]^{1/2}$ costituiscono quindi solo un caso particolare delle molteplicità che si studiano qui; esse si meritano ben un nome particolare, ed io chiamerò quindi piane queste molteplicità, nelle quali il quadrato dell’elemento di linea si può ricondurre alla somma dei quadrati di differenziali esatti. Per avere una visione d’insieme delle differenze essenziali tra tutte le molteplicità rappresentabili nella forma postulata è necessario rimuovere quelle che derivano dal modo di rappresentazione, cosa che sarà fatta mediante la scelta delle grandezze variabili secondo un principio determinato.

2.

A tal fine si pensi costruito da un punto a piacere il sistema delle linee di minima lunghezza che escono da esso; la posizione di un punto indeterminato può quindi essere determinata mediante la direzione iniziale della linea di minima lunghezza sulla quale esso giace, e mediante la sua distanza sulla stessa dal punto di partenza; può quindi essere espressa mediante i rapporti delle quantità dx^0, cioè delle quantità dx all’inizio di questa linea di minima lunghezza, e mediante la lunghezza s di questa linea. Si introducano ora al posto delle dx^0 espressioni lineari dα costruite con esse, tali che il valore iniziale del quadrato dell’elemento di linea sia uguale alla somma dei quadrati di queste espressioni, di modo che le variabili indipendenti siano: la quantità s e i rapporti delle quantità $d\alpha$; e si pongano infine al posto di $d\alpha$ delle quantità ad esse proporzionali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in modo tale che la somma dei loro quadrati sia uguale ad s^2. Se si introducono queste quantità, per valori infinitamente piccoli di x il quadrato dell’elemento di linea sarà uguale a Σdx^2, ma il termine di ordine subito più alto negli stessi sarà uguale ad un’espressione omogenea di secondo grado delle $n\cdot(n-1)/2$ quantità $(x_1dx_2-x_2dx_1)$, $(x_1dx_3-x_3dx_1), \ldots$, quindi una quantità infinitamente piccola del quart’ordine, di modo che si ottiene una quantità finita quando la si divida per il quadrato del triangolo infinitamente piccolo, nei vertici del quale i valori delle variabili siano $(0,0,0,\ldots)$, $(x_1,x_2,x_3\ldots)$, $(dx_1,dx_2,dx_3\ldots)$. Questa quantità mantiene lo stesso valore finché le quantità x e *dx* sono contenute nella stessa forma lineare binaria, ovvero finché le due linee di minima lunghezza dal valore 0 fino al valore x e dal valore 0 fino al valore dx giacciono nello stesso elemento di superficie, e dipende quindi solo dalla posizione e dalla direzione di questo. Essa sarà evidentemente = 0 quando la molteplicità rappresentata è piana, cioè il quadrato dell'elemento di linea è riducibile a Σdx^2, e può quindi esser vista come la misura della deviazione della molteplicità dalla piattezza, che ha luogo in questo punto e in questa direzione della superficie. Moltiplicata per -3/4 essa sarà uguale alla quantità che il signor consigliere aulico segreto Gauss ha chiamato misura della curvatura di una superficie. Per determinare le relazioni metriche di una molteplicità ad estensione n-pla, rappresentabile nella forma presupposta, si è trovato che sono necessarie $n \cdot (n-1)/2$ funzioni della posizione; quando pertanto sia data la misura della curvatura in $n \cdot (n-1)/2$ direzioni di superficie si potranno determinare le relazioni metriche della molteplicità, purché tra questi valori non sussista alcuna relazione identica, cosa che di fatto, parlando in generale, non accade. Le relazioni metriche di queste molteplicità, nelle quali l'elemento di linea è rappresentato dalla radice quadrata di una espressione differenziale di secondo grado, si possono quindi esprimere in un modo completamente indipendente dalla scelta delle grandezze variabili. Una via del tutto analoga si può intraprendere per questo obbiettivo anche con le molteplicità nelle quali l'elemento di linea è espresso in una forma meno semplice, per esempio mediante la radice quarta di un'espressione differenziale di quarto grado. Allora l'elemento di linea, parlando in generale, non si potrà più ricondurre alla forma della radice quadrata di una somma di quadrati di espressioni differenziali e così nell'espressione per il quadrato dell'elemento di linea la deviazione dalla piattezza sarà una quantità infinitamente piccola del second'ordine, mentre essa era in quelle molteplicità una quantità infinitamente piccola del quart'ordine. Questa proprietà di queste ultime molteplicità si può ben chiamare piattezza nelle parti minime. La proprietà più importante di queste molteplicità per lo scopo presente, per la quale soltanto esse sono qui studiate è tuttavia questa: che le relazioni di quelle doppiamente estese si possono rappresentare geometricamente con superfici, e le relazioni di quelle ad estensione multipla si possono ricondurre a quelle delle superfici in esse contenute, cosa che ora merita una breve discussione.

3.

Nell’idea di superficie si mescola sempre alle relazioni metriche interne, nelle quali interviene solo la lunghezza dei cammini su di essa, anche la sua posizione rispetto a punti posti fuori di essa. Possiamo tuttavia astrarre dalle relazioni esterne se consideriamo assieme ad essa quelle variazioni, per le quali la lunghezza delle linee su di essa resta invariata, cioè se la pensiamo piegata a piacere - senza stiramento - , e se trattiamo come equivalenti tutte le superfici che così originano l’una dall’altra. Così per esempio superfici cilindriche o coniche arbitrarie risultano equivalenti ad un piano, perché esse si lasciano portare in quello con un puro piegamento, con il quale le relazioni metriche interne permangono, e tutti i teoremi riguardo a quello - quindi l’intera planimetria - mantengono la loro validità; invece esse risultano essenzialmente distinte dalla sfera, la quale non si può trasformare in un piano senza stiramento. Secondo lo studio precedente, in ogni punto le relazioni metriche interne di una grandezza doppiamente estesa, quando l’elemento di linea si può esprimere con la radice quadrata di un’espressione differenziale di secondo grado, come accade nel caso delle superfici, sono caratterizzate dalla misura della curvatura. Questa quantità assume nel caso delle superfici un significato intuitivo: che essa è il prodotto delle due curvature della superficie in questo punto, oppure anche che il prodotto di queste per un triangolo infinitamente piccolo costruito con linee di minima lunghezza è uguale all’eccesso della somma degli angoli di questo rispetto a due retti, in radianti. La prima definizione postula la legge che il prodotto dei due raggi di curvatura rimanga invariato per puro piegamento di una superficie, la seconda che nella stessa posizione l’eccesso della somma degli angoli di un triangolo infinitamente piccolo rispetto a due retti sia proporzionale alla sua area. Per dare un significato comprensibile alla misura della curvatura di una molteplicità ad estensione n-pla in un punto dato, e nella direzione di una superficie posta in essa, si deve partire dal fatto che una linea di minima lunghezza che esce da un punto è completamente determinata quando è data la sua direzione iniziale. Si otterrà poi una superficie determinata quando si prolungheranno secondo linee di minima lunghezza tutte le direzioni iniziali che escono dal punto dato e che giacciono nel dato elemento di superficie, e questa superficie ha nel punto dato una misura della curvatura determinata, la quale è contemporaneamente la misura della curvatura della molteplicità ad estensione n-pla nel punto dato e nella data direzione della superficie.

4.

Sono ora in generale necessarie, prima di fare l'applicazione allo spazio, alcune osservazioni sulle molteplicità piane, cioè su quelle per le quali il quadrato dell'elemento di linea si può rappresentare mediante la somma dei quadrati di differenziali esatti.

In una molteplicità piana ad estensione n-pla la misura della curvatura in ogni punto e in ogni direzione è nulla; basta tuttavia secondo lo studio precedente sapere che in ogni punto in $n\cdot(n-1)/2$ direzioni di superficie, per le quali le misure di curvatura siano indipendenti, queste siano nulle. Le molteplicità, la misura della curvatura delle quali sia ovunque = 0, si possono trattare come un caso particolare di quelle molteplicità, la misura della curvatura delle quali sia ovunque costante. Il carattere comune di queste molteplicità, la misura della curvatura delle quali sia costante, si può anche esprimere in questo modo: in esse le figure si possono muovere senza stiramento. Infatti in esse le figure non potrebbero essere spostabili e ruotabili a piacimento, se la misura della curvatura in ogni punto e in tutte le direzioni non fosse la stessa. D'altra parte le relazioni metriche della molteplicità sono completamente determinate dalla misura della curvatura; le relazioni metriche in un punto e in tutte le direzioni sono esattamente le stesse che in un altro, e quindi in essi si possono eseguire le stesse costruzioni, e di conseguenza nelle molteplicità con misura della curvatura costante si può dare alle figure qualsiasi posizione a piacere. Le relazioni metriche di queste molteplicità dipendono solo dal valore della misura della curvatura, e riguardo alla rappresentazione analitica si può osservare che, quando si indichi questo valore con α, l'espressione dell'elemento di linea può essere data nella forma

$$\frac{1}{1+(\alpha/4)\Sigma x^2}\,[\Sigma dx^2]^{1/2}.$$

5.

Per illustrazione geometrica può servire la considerazione delle superfici con misura della curvatura costante. E' facile vedere che le superfici, la misura della curvatura delle quali sia positiva, possono sempre essere avvolte su una sfera, il cui raggio sia uguale ad uno diviso per la radice della misura della curvatura; ma per una visione d'assieme della totalità di queste superfici, si dia ad una di queste la forma d'una sfera e alle restanti la forma di superfici di rotazione, che a quella siano tangenti all'equatore. Le superfici con misura della curvatura più grande di quella della sfera saranno tangenti alla sfera dall'interno e assumeranno la forma della parte esterna rispetto all'asse della superficie di un anello; si potranno anche adagiare su porzioni di sfere di raggio più piccolo, ma si avvolgeranno più di una volta. Le superfici con misura della curvatura positiva più piccola si otterranno tagliando da superfici sferiche con raggio più grande una parte limitata da due semicerchi massimi e portando a coincidere le linee di taglio. La superficie con misura della curvatura nulla sarà una superficie cilindirica che si appoggia all'equatore; le superfici con misura della curvatura negativa saranno tangenti a questo cilindro dall'esterno e avranno la forma della parte interna rispetto all'asse della superficie di un anello. Si pensi a queste superfici come il posto per pezzi di superfici mobili su di esse, come lo spazio è il posto per i corpi: alla stessa maniera in tutte queste superfici i pezzi di superficie sono mobili senza stiramento. Le superfici con misura della curvatura positiva si possono sempre modellare in modo tale che i pezzi di superficie possano essere mossi a piacere anche senza piegamento, per esempio come superfici sferiche; quelle con misura della curvatura negativa invece no. Oltre a questa indipendenza dei pezzi di superficie dalla posizione si trova nelle superfici con misura della curvatura nulla anche un'indipendenza della direzione dalla posizione, che non ha luogo con le altre superfici.

III. Applicazione allo spazio.

1.

In seguito a questi studi sulla determinazione delle relazioni metriche di una grandezza ad estensione *n*-pla si possono ora dare le condizioni che sono sufficienti e necessarie per la determinazione delle relazioni metriche dello spazio, quando si postuli l'indipendenza delle linee dalla posizione e la rappresentabilità dell'elemento di linea mediante la radice quadrata di una espressione differenziale di secondo grado, quindi la piattezza nelle parti minime.

Esse si possono esprimere in primo luogo così: la misura della curvatura in tre direzioni della superficie è = 0, e quindi le relazioni metriche dello spazio sono determinate quando la somma degli angoli di un triangolo è ovunque uguale a due retti.

Ma se si pone in secondo luogo, come Euclide, un'esistenza indipendente dalla posizione non solo delle linee, ma anche dei corpi, ne segue che la misura della curvatura è ovunque costante, e allora la somma degli angoli è determinata in tutti i triangoli, quando è determinata in uno.

Si potrebbe infine in terzo luogo, invece di assumere la lunghezza delle linee come indipendente dalla posizione e dalla direzione, supporre anche un'indipendenza della loro lunghezza e direzione dalla posizione. Secondo questa concezione le variazioni o le differenze di posizione sono quantità complesse, esprimibili con tre unità indipendenti.

2.

Nel corso delle considerazioni precedenti abbiamo distinto per prima cosa le relazioni di estensione o tra regioni dalle relazioni metriche e abbiamo trovato che con le stesse relazioni di estensione sono pensabili diverse relazioni metriche; sono stati poi studiati i sistemi di determinazione metrica semplice, mediante i quali le relazioni metriche dello spazio siano completamente determinate, e dei quali tutti i teoremi su di esse siano una conseguenza necessaria; resta ora da discutere il problema: come, in che misura e in quale ambito queste ipotesi sono confermate dall’esperienza. A questo riguardo si trova tra le pure relazioni di estensione e le relazioni metriche una differenza sostanziale, perché per le prime, per le quali i casi possibili costituiscono una molteplicità discreta, le risposte dell’esperienza, anche se non completamente sicure, non sono imprecise, mentre per le seconde, per le quali i casi possibili costituiscono una molteplicità continua, ogni determinazione sperimentale rimane sempre imprecisa - per quanto grande sia la probabilità che essa sia pressoché giusta. Questa circostanza sarà importante per l’estensione di queste determinazioni empiriche oltre i confini dell’osservazione nell’ incommensurabilmente grande e nell’incommensurabilmente piccolo; infatti queste ultime possono evidentemente diventare sempre più imprecise al di là dei limiti dell’osservazione, mentre le prime no.

Nell’estendere la costruzione dello spazio nell’incommensurabilmente grande bisogna distinguere tra assenza di confini ed infinitezza; quella appartiene alle relazioni di estensione, questa alle relazioni metriche. Che lo spazio sia una molteplicità ad estensione tripla senza confini è un’ipotesi che viene applicata in ogni concezione del mondo esterno, nella quale in ogni istante la regione delle percezioni reali viene completata e vien costruita la posizione possibile di un oggetto in esame; tale ipotesi viene confermata progressivamente da queste applicazioni. L’assenza di confini dello spazio possiede perciò una certezza empirica più grande di una qualsivoglia esperienza esterna. Ma da questo non segue affatto l’infinitezza; piuttosto, se si presuppone l’indipendenza dei corpi dalla posizione, e quindi si attribuisce allo spazio una misura della curvatura costante, questo sarà necessariamente finito, purché questa misura della curvatura abbia un valore positivo per quanto piccolo. Se si prolungano secondo linee di minima lunghezza le direzioni di partenza contenute in un elemento di superficie, si otterrà una superficie senza confini con misura della curvatura costante positiva, quindi una superficie che assumerebbe in una molteplicità piana ad estensione tripla la forma di una superficie sferica, e che di conseguenza è finita.

3.

I problemi dell’incommensurabilmente grande sono problemi oziosi per la comprensione della natura. Altrimenti succede tuttavia con i problemi dell’incommensurabilmente piccolo. Dalla precisione con cui seguiamo i fenomeni nell’infinitamente piccolo dipende essenzialmente la conoscenza delle loro connessioni causali. I progressi degli ultimi secoli nella conoscenza della natura meccanica dipendono quasi esclusivamente dall’esattezza della costruzione, che è stata resa possibile dall’invenzione dell’analisi infinitesimale, e dai semplici concetti fondamentali scoperti da Archimede, Galilei e Newton, dei quali si serve la fisica odierna. Ma nelle scienze naturali, dove i concetti fondamentali semplici per siffatte costruzioni finora mancano, per conoscere la connessione causale si seguono i fenomeni su spazi piccoli, fin là dove solo il microscopio lo permette. Quindi i problemi delle relazioni metriche dello spazio nell’incommensurabilmente piccolo non appartengono a quelli oziosi.

Se si suppone che i corpi esistano indipendentemente dalla posizione, allora la misura della curvatura è ovunque costante, e segue dalle misure astronomiche che non può essere diversa da zero; in ogni caso il reciproco del suo valore dev’essere un’area rispetto alla quale la regione raggiungibile con i nostri telescopi dev’essere praticamente nulla. Ma se una siffatta indipendenza dei corpi dalla posizione non ha luogo, non è possibile dalle relazioni metriche su grande scala trarre alcuna conclusione su quelle nell’infinitamente piccolo; allora la misura della curvatura in ogni punto in tre direzioni può avere un valore arbitrario, purché la curvatura complessiva di ogni porzione misurabile dello spazio non sia sensibilmente diversa da zero; ancora possono aver luogo comportamenti complicati se la supposta rappresentabilità di un elemento di linea mediante la radice quadrata di un’espressione differenziale di secondo grado non ha luogo. Ora i concetti empirici sui quali sono fondate le determinazioni metriche dello spazio, il concetto di corpo rigido e quello di raggio di luce, sembrano tuttavia perdere la loro validità nell'infinitamente piccolo; è quindi assai ben concepibile che le relazioni metriche dello spazio nell'infinitamente piccolo non siano conformi ai postulati della geometria, e ciò si dovrebbe di fatto assumere, nel momento in cui i fenomeni si lasciassero spiegare così in maniera più semplice.

Il problema della validità dei postulati della geometria nell'infinitamente piccolo si collega con il problema del fondamento intrinseco delle relazioni metriche dello spazio. In tale problema, che si può ben annoverare nello studio dello spazio, si viene ad utilizzare l'osservazione prima fatta, che in una molteplicità discreta il principio delle relazioni metriche è contenuto nel concetto stesso di questa molteplicità, mentre nel caso di una continua questo deve venire da fuori. Quindi o la realtà che sta alla base dello spazio costituisce una molteplicità discreta, oppure il fondamento delle relazioni metriche va cercato fuori, in forze di legame che agiscono su di esso.

La risposta a tali problemi si può trovare soltanto qualora si parta dalla interpretazione dei fenomeni finora usata, confermata dall'esperienza, che Newton ha posto a fondamento e, spinti da fatti che non si lascino spiegare con essa, la si rielabori gradualmente; le ricerche che, come quelle condotte qui, partono da idee generali, possono servire solo a far sì che questo lavoro non sia intralciato dalla ristrettezza dei concetti, e che il progresso nella conoscenza delle connessioni tra le cose non sia impedito da pregiudizi tramandati.

Questo ci porta nel campo di un'altra scienza, nel campo della fisica, nel quale la natura della presente occasione non ci consente di addentrarci.

Sommario.

Piano della ricerca.

I. Concetto di grandezza ad estensione n-pla[1].

§1. Molteplicità continue e discrete. Parti determinate di una molteplicità si chiamano quanti. Suddivisione dello studio delle grandezze continue nello studio

1. delle pure relazioni tra regioni, per le quali non si presuppone un'indipendenza delle grandezze dalla posizione,

2. delle relazioni metriche, per le quali si deve presupporre una tale indipendenza.

§2. Costruzione del concetto di una molteplicità ad estensione semplice, doppia,...,*n*-pla.

§3. Riduzione della determinazione della posizione in una data molteplicità a determinazioni di quantità. Caratteri distintivi essenziali di una molteplicità ad estensione *n*-pla.

II. Relazioni metriche di cui è passibile una molteplicità ad *n* dimensioni[2], sotto l'ipotesi che le linee possiedano una lunghezza indipendente dalla posizione, e che quindi ogni linea sia misurabile con ognun'altra.

§1. Espressione dell'elemento di linea. Come si debbano considerare piane quelle molteplicità nelle quali l'elemento di linea sia esprimibile come la radice di una somma di quadrati di differenziali esatti.

§2. Studio delle molteplicità ad estensione *n*-pla, nelle quali l'elemento di linea può essere rappresentato mediante la radice quadrata di un'espressione differenziale di secondo grado. Misura della sua deviazione dalla piattezza (misura della curvatura) in un

---

[1] *L'art. I costituisce parimenti il lavoro preparatorio per gli studi di analysis situs.*

[2] *La ricerca sulle possibili determinazioni metriche di una molteplicità ad estensione n-pla è assai incompleta; tuttavia è del tutto sufficiente per lo scopo attuale.*

punto dato ed in una data direzione di superficie. Per la determinazione delle sue relazioni metriche è (sotto certe restrizioni) ammissibile e sufficiente che la misura della curvatura sia data in ogni punto in $n \cdot (n-1)/2$ direzioni di superficie.

§3. Illustrazione geometrica.

§4. Le molteplicità piane (nelle quali la misura della curvatura è ovunque = 0) si possono considerare come un caso particolare delle molteplicità con misura della curvatura costante. Queste possono anche essere definite dalla proprietà che in esse ha luogo l'indipendenza delle grandezze ad estensione *n*-pla dalla posizione (mobilità delle stesse senza stiramento).

§5. Superfici con misura della curvatura costante.

III. Applicazione allo spazio.

§1. Sistema di fatti che sono sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio, come le postula la geometria.

§2. Fino a che punto è probabile la validità di queste determinazioni empiriche al di là dei confini dell'osservazione nell'incommensurabilmente grande?

§3. Fino a che punto nell'infinitamente piccolo? Connessione di questo problema con l'interpretazione della natura[3].

---

[3] *Il § 3 dell'art. III richiede ancora una rielaborazione ed un'ulteriore compimento.*