

IL
NUOVO CIMENTO

FONDATA DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI

A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA.

DELEGATI DELLA SOCIETÀ

A. GARBASSO E G. P. GRIMALDI.

REDATTORE

O. M. CORBINO.

Serie VI. — Tomo I

PISA

STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO

Ditte : Vannucchi-Galileiana-Pieraccini

1911

AZIONI ELETTROMAGNETICHE DOVUTE AGLI IONI DEI METALLI DEVIATI DALLA TRAIETTORIA NORMALE PER EFFETTO DI UN CAMPO.

O. M. CORBINO.

I. — Introduzione.

Nei fenomeni classici della distribuzione dei potenziali nei conduttori percorsi da corrente (legge di Ohm), dell'elettromagnetismo (azione di Oersted), dell'elettrodinamica (azioni di Ampère) e dell'induzione elettromagnetica (azione di Faraday) le due correnti opposte di ioni positivi e negativi, ammesse nella teoria elettronica della conducibilità metallica esercitano azioni inseparabili; gli effetti osservati possono considerarsi come somma di quelli che sarebbero separatamente prodotti dalle due specie di ioni, e, per una data corrente totale, sono indipendenti dai valori parziali delle correnti positiva e negativa e dalle loro velocità.

La supposta coesistenza delle due correnti distinte lascia però prevedere tutta una serie di fenomeni, correlativi a quelli sopra citati, nei quali esse intervengono in modo specifico con le quantità di elettricità trasportate e con la loro velocità.

Di questa serie di fenomeni elettrodinamici di *seconda specie* era noto finora uno solo, l'anomalia nella distribuzione delle linee equipotenziali in una lamina metallica percorsa da corrente e disposta in un campo magnetico; cioè il fenomeno di Hall. Questo infatti dimostra che la distribuzione dei potenziali nella lamina non segue più le leggi stabilite dal Kirchhoff per i conduttori a tre dimensioni sulla base della legge di Ohm. Non è più vero, cioè, che le linee di ugual livello elettrico son normali alle linee di corrente, mentre queste conservano, nella lamina isolata, l'andamento normale che possiedono in assenza del campo.

La teoria elettronica rende ben conto di queste deviazioni dalla legge di Ohm, che sono un effetto *differenziale* delle quantità di moto disuguali delle due correnti, complicato dalla coesistenza di alcuni effetti termici anch'essi in pieno accordo colla teoria.

Era naturale quindi l'idea di passare dal capitolo della legge di Ohm agli altri capitoli della elettrologia: all'elettromagnetismo, alle forze elettrodinamiche, all'induzione elettromagnetica; ed esaminare quali nuovi effetti di seconda specie, la teoria permetta di prevedere e l'esperienza confermi. È questo lo scopo del presente lavoro nel quale mi son proposto di stabilire l'esistenza dei fenomeni fondamentali e la loro dipendenza da un unico parametro caratteristico del metallo, che chiamerò il suo momento ionico differenziale. Esso è legato alle costanti di Drude nel modo seguente:

Siano ev_1 , ev_2 le velocità assolute acquistate dalle due specie di ioni sotto l'azione d'un campo elettrico 1; σ la conducibilità del metallo; $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ e $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ le frazioni della corrente totale trasportate dalle due correnti opposte; chiameremo momento degli ioni positivi l'espressione $\frac{ev_1\sigma_1}{\sigma}$, momento dei negativi l'espressione corrispondente, e momento ionico differenziale la quantità

$$E = \frac{ev_1\sigma_1}{\sigma} - \frac{ev_2\sigma_2}{\sigma}.$$

Se fossero poi, come negli elettroliti, eguali i numeri di ioni mobili positivi e negativi per cm^3 , si avrebbe più semplicemente

$$E = e(v_1 - v_2)$$

cioè eguale alla differenza delle mobilità ev_1 ed ev_2 delle due specie di ioni.

Oggetto delle nostre considerazioni sarà un disco circolare metallico di cui il centro e la periferia possano in modo opportuno collegarsi a una sorgente di forza elettromotrice o a un galvanometro.

II. — Azione elettromagnetica del disco percorso da corrente radiale e disposto in un campo costante.

Secondo la teoria ordinaria un disco percorso da corrente radiale ha un autoflusso normale nullo, anche se disposto in un campo. La considerazione delle due correnti ioniche ci condurrà invece alla conclusione che per azione di un campo normale, il disco si trasforma in una speciale lamina magnetica producente un flusso di forza normale al disco. Questo sarà perciò capace d'eccitare una corrente indotta in una bobina che lo circonda, all'atto in cui s'invia la corrente radiale.

Siano r_1 ed r_2 i raggi, interno ed esterno, che limitano il disco, disposto nel campo normale H ; e questo sia prodotto da una corrente che circola nel senso destrorso. Sotto l'azione della forza elettrica F , e dell'azione elettromagnetica, gli ioni positivi acquisteranno una velocità le cui componenti radiale e circolare, in coordinate polari, saranno rilegate dalle equazioni

$$(1) \quad r \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = H e v_1 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = e v_1 F - H e v_1 r \frac{d\mathfrak{D}}{dt}.$$

E invero il potenziale elettrico essendo una funzione monodroma, e tutte le azioni essendo simmetriche rispetto all'asse del disco e del campo, le linee equipotenziali continueranno ad avere la forma circolare posseduta in assenza del campo; e la forza elettrica sarà perciò sempre radiale.

Posto

$$(2) \quad H e v_1 = m_1$$

la prima ci dà

$$r d\mathfrak{D} = m_1 dr$$

cioè

$$\mathfrak{D} = m_1 \log r + C.$$

La costante C si determina ponendo $r = r_1$, per $\vartheta = 0$; si ha con ciò

$$(3) \quad r = r_1 e^{\frac{\vartheta}{m_1}}$$

e analogamente per gli ioni negativi, ponendo

$$H e v_2 = m_2$$

si avrebbe

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_2}}$$

Adunque le traiettorie dei due ioni sono due spirali logaritmiche distinte, anzichè un raggio comune del cerchio come avviene in assenza del campo. Con una corrente centrifuga la spirale degli ioni positivi è percorsa in senso opposto alla corrente magnetizzante.

In generale si può dire perciò che mentre restano inalterate le linee equipotenziali nel disco, si separano le traiettorie delle due correnti, contrariamente a quanto ha luogo nell'esperienza di Hall, quando dalla lamina non vengano derivate correnti laterali.

E non occorre, in conseguenza, tener conto come nella teoria del fenomeno di Hall, della condensazione trasversale degli ioni e della loro conseguente retrodiffusione elettrica e termica.

3. — Non meno agevole è il computo teorico dell'azione elettromagnetica dovuta a queste correnti distorte.

Per ragioni evidenti di simmetria, nella valutazione del flusso totale attraverso al disco, o anche attraverso a una bobina indotta concentrica, potremo non tener alcun conto della componente radiale della corrente. D'altra parte, detta I_1 , la corrente totale trasportata dagli ioni positivi, legata alla corrente complessiva I dalla relazione

$$I_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} I$$

si ha

$$I_1 = 2\pi r \epsilon N_1 e \frac{dr}{dt}$$

ove ϵ indica lo spessore del disco. E perciò

$$\frac{dr}{dt} = \frac{I_1}{2\pi r \epsilon N_1 e}$$

cosicchè la densità della corrente circolare sarà

$$N_1 e r \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{m_1 I_1}{2\pi r \epsilon}$$

mentre la totale corrente circolare ^{di junc.} che traversa mezzo piano diametrale del disco si potrà esprimere con

$$\frac{m_1 I_1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Risulta così dimostrato che l'azione degli ioni positivi e negativi del disco è *proporzionale rispettivamente, a $m_1 I_1$ e a $m_2 I_2$, e che perciò l'azione elettromagnetica totale del disco equivale a quella di un sistema di correnti circolari di densità lineare $\frac{EIH}{2\pi r}$, ovvero è proporzionale al momento ionico differenziale E, alla corrente totale I e al campo esterno H.*

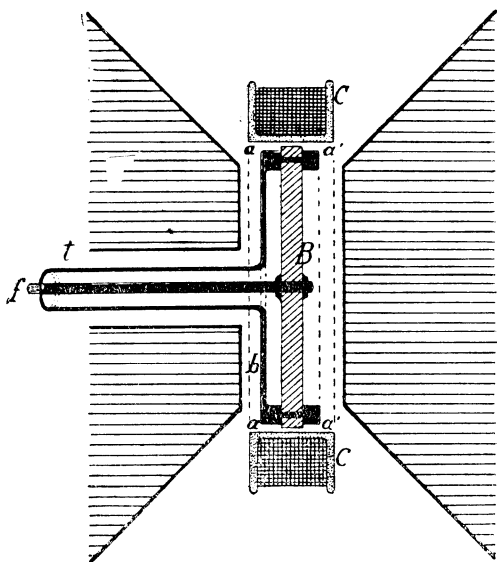
La costante di proporzionalità dipenderà solo dalle dimensioni del disco, e anche della bobina indotta, se invece del flusso attraverso al primo si ricerca l'azione induttiva sulla seconda; essa sarà perciò comune a tutti i dischi di eguale contorno e di qualsiasi metallo, e potrebbe essere calcolata con considerazioni di natura puramente geometrica. Ma può anche determinarsi sperimentalmente; basta a tal fine misurare l'azione induttiva d'una lamina conduttrice forata al centro, spaccata lungo un raggio e nella quale sia applicata, con due conduttori di resistenza trascurabile disposti lungo gli orli del taglio, una forza elettromotrice costante; questa darà luogo appunto a correnti circolari di densità inversamente proporzionale a r .

Si misuri, sperimentalmente, con una o più spire che l'abbraccino tutto intorno, (o con una bobina indotta), il flusso

totale attraverso la lamina (o la sua azione induttiva sulla bobina) quando la corrente circolare integrale ha il valore $\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$ e sia K il valore ottenuto, ad esempio, per l'effetto induttivo sulla bobina. È chiaro che l'azione induttiva di seconda specie constatata col disco, percorso dalla corrente radiale I , sarà data da $C = KEIH$.

4. — L'esperienza ha confermato la previsione teorica; essa fu eseguita nel modo seguente:

Un disco circolare di bismuto B può essere percorso radialmente da una corrente continua; la quale penetra dal



centro, per un filo f che lo traversa e vi è fissato con due piccoli dadi, e viene raccolta alla periferia da due anellini di rame a, a' applicati all'orlo delle due facce del disco. Da uno degli anelli la corrente ritorna radialmente lungo una piastrina forata di rame parallela al disco, fino ad un tubo t che s'innesta nel foro e circonda il filo centrale. Una bobina piatta

CC, con le spire parallele al disco, lo circonda tutto in giro ed è rilegata ad un galvanometro.

Disco e bobina sono disposti tra i poli d'un elettro-magnete Weiss, normalmente alle linee di forza. A tal fine il tubo circondante il filo centrale passa pel canale del nucleo dell'elettro-magnete e pel foro d'una delle masse polari, l'altra massa polare è cieca; entrambe hanno le facce piane d'estensione quasi eguale alla parte scoperta del disco di bismuto. Quando l'elettro-magnete non è eccitato, il passaggio della corrente radiale non crea alcuna azione magnetica nella bobina che circonda il disco; e perciò il galvanometro non dà alcuna deviazione qualora si stabilisca e s'interrompa la corrente radiale medesima. Se però si eccita il campo (interrompendo durante la manovra il circuito della bobina e del galvanometro) e si stabilisce, a campo eccitato, la corrente nel disco, si nota al galvanometro una deviazione brusca, come per una corrente indotta. Tornato il galvanometro a zero e interrompendo la corrente nel disco, si ha una deviazione eguale ed opposta. Il senso delle deviazioni ottenute s'inverte col senso della corrente nel disco, come anche col senso della corrente nell'elettro-magnete; e la corrente indotta si annulla quando si sostituisce al disco di bismuto un disco di rame.

È perciò escluso che si tratti di azioni dovute a induzioni di prima specie, o a lievi correnti derivate; naturalmente occorre provvedere a che le due correnti che circolano nell'elettro-magnete e nel disco siano completamente indipendenti.

In queste esperienze la parte attiva del disco aveva il diametro di 65 mm. e lo spessore di 2,8 mm. L'azione elettromagnetica risultò proporzionale alla corrente che traversava il disco; e crescente con l'intensità del campo medesimo.

Con un campo di circa 3700 unità e una corrente nel disco di 15 Ampere, le deviazioni ottenute corrispondevano all'azione induttiva esercitata sulla stessa bobina, da una spira, dello stesso contorno del disco, situata intorno ad esso, nell'interferro, e percorsa dalla corrente di 0,26 Ampère. Il senso delle deviazioni fu sempre conforme alla regola seguente:

Il passaggio d'una corrente centrifuga nel disco, sotto l'azione del campo, lo trasforma in una lamina magnetica col medesimo senso di circuitazione della corrente magnetizzante; se la corrente è centripeta, il senso di circuitazione della lamina magnetica equivalente al disco è opposto a quello della corrente magnetizzante.

L'esperienza conferma perciò la proporzionalità a I e c'insegna inoltre che nel bismuto E è negativo; prevale cioè il momento degli ioni negativi.

Quanto alla legge di dipendenza da H essa sarà meno semplice di quel che appare dalla formola, qualora il campo sia creato con un elettromagnete in ferro. E invero il flusso che traversa il disco e la bobina si chiude, in parte, attraverso alla carcassa di ferro, penetrando e uscendo per le facce polari. Viene con ciò accresciuta l'intensità delle azioni osservate; ma all'aumentare del campo, e quindi dell'induzione nel ferro, diminuisce la sua permeabilità differenziale, cioè la sua attitudine a dare facile passaggio alla nuove linee di forza create dal disco. È perciò che l'azione induttiva cresce, secondo l'esperienza, più lentamente del campo; ed è perciò che, a campo eguale, l'azione aumenta avvicinando al disco le facce polari. Si può, però, correggere questa influenza del ferro confrontando l'azione osservata con quella d'una spira circolare percorsa da corrente, e situata nell'intraferro, intorno al disco.

Così facendo ho avuto agio di osservare che anche l'azione corretta cresce più lentamente del campo, come avviene dello stesso bismuto pel fenomeno di Hall. Ciò è dimostrato dalla seguente tabella; in cui la seconda colonna contiene le correnti che era necessario mandare nella spira per ottenere la stessa deviazione galvanometrica osservata col disco, percorso da 15 Ampère:

Campo H =	Corrente equivalente nella spira, C =	C/H $\times 10^5$
3700	0,26 A	7
5700	0,31 »	5,6
7000	0,34 »	4,9
8200	0,35 »	4,3
9000	0,37 »	4

5. — L'effetto osservato dipende adunque, secondo la teoria, da σ_1 , σ_2 , v_1 e v_2 ; mentre l'effetto Hall dipende inoltre da

$$x_1 = \frac{d \log N_1}{dT}, \quad x_2 = \frac{d \log N_2}{dT};$$

cioè dalle variazioni relative dei numeri di ioni con la temperatura, secondo la formola

$$R = \frac{e}{\sigma} \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{x_1 + x_2}.$$

Si riconosce da ciò che l'azione elettromagnetica constatata non è una semplice variante dell'effetto Hall, ma fornisce un'altra relazione *indipendente* tra le costanti caratteristiche del metallo.

Che se, allo scopo di formarci un'idea dell'*ordine di grandezza relativo*, pei diversi metalli, dell'effetto Hall e dell'effetto elettromagnetico, ammettiamo che sia per essi, all'incirca,

$$N_1 = N_2 = N$$

e

$$x_1 = x_2$$

si avrà, ritenendo solo i fattori variabili da metallo a metallo, per l'effetto elettromagnetico:

$$C = \frac{N}{\sigma} (v_1^2 - v_2^2) = v_1 - v_2$$

e per l'effetto di Hall :

$$R = \frac{v_1 - v_2}{\sigma}$$

e perciò

$$C = R \sigma$$

Or, com'è noto, mentre R varia moltissimo da metallo a metallo, il prodotto di R per la conducibilità σ varia molto meno. Così mentre il tellurio dà luogo ad un effetto Hall circa 650.000 volte superiore a quello dell'argento ¹⁾, l'effetto elettromagnetico sarà solo 5 volte maggiore! E per la stessa ragione tra bismuto e argento il rapporto dei due coefficienti Hall è circa 11 mila, mentre quello tra le azioni elettromagnetiche sarebbe solo 150. Tutto ciò, beninteso, con le necessarie riserve per la supposta eguaglianza di N_1 e N_2 , x_1 e x_2 ²⁾.

III. — Energia del disco nel campo. — Forze elettromagnetiche.

6. — Il risultato ottenuto sugli effetti elettromagnetici del disco percorso da corrente radiale nel campo ci pone in grado di valutare la loro energia mutua.

Abbiamo visto che il disco equivale ad un sistema piano di correnti circolari di densità $\frac{EIH}{2\pi r}$. Un anellino di raggio r e larghezza dr , è quindi percorso dalla corrente $\frac{EIH}{2\pi r} dr$ e la sua energia nel campo H , poichè la corrente dipende dal campo, sarà

$$dW = - \frac{EIH}{4\pi r} dr \times \pi r^2 H .$$

¹⁾ Drude. *Ann. d. Phys.* 3, p. 392; 1900.

²⁾ Sarà mostrato in una prossima Nota che l'ultima relazione è rigorosamente soddisfatta quando si consideri il coefficiente R dell'effetto Hall isotermico.

Cosicchè l'energia complessiva del disco nel campo sarà data da

$$W = - \frac{1}{8\pi} E I H^2 S$$

ove S indica la superficie *attiva* del disco, sottraendo cioè dalla superficie totale del disco il cerchietto centrale di raggio r_1 .

Se invece il campo forma con la normale al disco un angolo α , la energia W' sarà data da

$$W' = W \cos^2 \alpha$$

e perciò il disco sarà sollecitato da una coppia di momento

$$M = - \frac{dW'}{d\alpha} = W \sin 2\alpha = - \frac{1}{8\pi} E I S H^2 \sin 2\alpha$$

che sarà massima per $\alpha = 45^\circ$. Or W , come vedremo, ha un valore notevole; doveva quindi essere possibile mettere in evidenza queste speciali azioni elettrodinamiche di seconda specie.

E per quanto sulla effettiva esistenza dell'azione prevista non possa aversi alcun dubbio, il suo valore notevole dà un particolare interesse alla realizzazione dell'esperienza, poichè se ne può dedurre un metodo sensibile di misura della costante E del metallo, cioè del suo momento ionico differenziale.

Ma nella esecuzione si sono incontrate difficoltà non lievi. Occorreva invero rendere mobile tra le masse polari un sistema di due dischi di bismuto e d'un altro metallo (destinato a raccogliere la corrente periferica inviata nel centro del primo) e fare in modo che per i fili adduttori della corrente, meccanicamente solidali col sistema dei dischi, fossero trascurabili le azioni elettromagnetiche di prima specie o amperiane. Inoltre dovendo disporre il sistema dei dischi a 45° dalle linee di forza, il loro movimento viene fortemente ostacolato dalle correnti di Foucault che esercitano proprio in quella posizione la massima azione di freno.

Infine il sistema mobile tra le masse polari subisce da parte del campo un'azione orientatrice dovuta alle proprietà magnetiche del materiale impiegato; e perciò la forza antagonista che si oppone alla cercata coppia elettromagnetica non è solo la torsione del filo cui il sistema è sospeso. Non potendosi facilmente realizzare un sistema astatico per queste azioni magnetiche, ed essendo queste molto variabili nelle diverse posizioni del disco, le rotazioni elettromagnetiche vengono di molto ridotte, e il valore esatto della coppia non è facile a misurare.

7. — Per rimuovere tutte queste difficoltà ho proceduto nel modo seguente.

L'apparecchio della fig. 1 già descritto venne modificato sostituendo alla scatoletta di rame su cui è fissato il disco di bismuto una scatola di zinco di spessore più piccolo; e inoltre il fondo posteriore della scatola e l'anello periferico furono tagliati lungo un raggio e una generatrice, per attenuare le correnti di Foucault, che costituiscono come si è detto un grave ostacolo al movimento del sistema nel campo. Il tubo *t*, col filo interno connesso al centro del disco, venne piegato fino a ricondurlo nel piano della scatola lungo una direzione passante pel centro di quella. Così tutta la scatola poteva essere sospesa tra le masse polari; mentre in basso, e a notevole distanza da queste, i capi del tubo e del filo centrale costituiti da due fili di platino pescavano in due bicchierini contenenti mercurio pei quali si poteva mandare la corrente.

Le masse polari, del diametro di 10 cm., eran disposte a circa 5 cm. di distanza, cosicchè la scatola del diametro di 7 cm. poteva essere orientata fino a circa 40° dalle linee di forza.

In queste condizioni il campo nel grande spazio tra le masse polari non poteva rendersi superiore a 3000 unità.

Malgrado le cure impiegate nella costruzione della scatola, non si riuscì a ottenere che fossero assolutamente nulle le azioni elettromagnetiche di tipo amperiano; le quali si rivelavano col fatto che la rotazione del disco prodotta dalla corrente non restava assolutamente invariata invertendo il senso del campo. Ho trovato utile per facilitare la compensa-

zione dell'effetto di prima specie saldare un filo di rame tra due punti del tubo t ripiegato, nella parte in cui esso è disposto nel campo; il filo era così percorso da una piccola derivazione della corrente totale, ed era quindi soggetto a una forza amperiana da parte del campo, cosicchè dandogli per via di tentativi una forma opportuna si poteva ottenere che la deviazione restasse sensibilmente invariata in direzione e in valore invertendo il senso del campo; prendendo la media degli effetti osservati col campo diretto nei due sensi, la residua azione di prima specie poteva eliminarsi del tutto.

La forza orientatrice dovuta alle proprietà magnetiche del materiale impiegato, la quale era diversa nelle diverse posizioni della scatola, superava quella dovuta al filo di sospensione, anche quando questo, era costituito da un filo di ottone di 0,13 mm. di diametro e circa 5 cm. di lunghezza, che dava luogo a un momento di torsione di 4,3 dine-centimetro per grado. In questo caso le due coppie orientatrici erano però molto prossime.

Per valutare la coppia dovuta alla corrente fu quindi necessario confrontare la deviazione osservata con quella prodotta da una misurabile rotazione dell'estremo superiore del filo. Questo fu tarato determinando la durata di oscillazione di un corpo a esso sospeso e di cui era noto il momento d'inerzia.

8. Dal valore della coppia si passa facilmente a quello della costante E del metallo. Si ha infatti.

$$M = W \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1}{8\pi} E I S H^2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

in cui I è l'intensità della corrente S la superficie del disco, H l'intensità del campo e α l'angolo formato dalla normale al disco con le linee di forza.

Nelle condizioni dell'esperienza si ebbe $M = 7,8$ dine-centimetro per $I = 0,02$ (unità elettromagnetiche),

$$S = 38 \text{ cm}^2.; H = 2400 \text{ e } \alpha = 18^\circ.$$

Se ne deduce

$$E = 7,2 \times 10^{-5}.$$

Si riconobbe inoltre che mentre il metodo della coppia richiede grandi precauzioni, esso è sempre molto vantaggioso poichè l'effetto osservabile è d'un ordine di grandezza assai rilevante. Cosicchè non appare improbabile che si riesca a constatare e misurare la coppia anche con altri metalli, come il rame e l'argento, pei quali il valore di E dovrebbe essere da 100 a 200 volte minore.

IV. — Forza elettromotrice radiale creata in un disco metallico da un campo variabile.

9. — Come abbiamo visto un disco metallico, percorso da corrente radiale, si trasforma per azione del campo in una speciale lamina magnetica, normale al campo medesimo. Il disco, percorso da corrente radiale produce cioè una lieve alterazione del campo preesistente; si può allora prevedere che reciprocamente la creazione del campo deve far nascere nel disco una f. e. m. radiale qualora si rileghino metallicamente il centro e la periferia.

Effettivamente, disponendo tra i poli dell'elettromagnete il disco di bismuto, come nella fig. 1, e rilegando il centro f e il tubo periferico t a un galvanometro, si constata la produzione d'una corrente indotta alla eccitazione del campo, e d'una corrente inversa alla sua diseccitazione. La corrente indotta ha il *medesimo* senso alla chiusura del campo, qualunque sia la direzione di questo; si ha in ciò una differenza caratteristica coi fenomeni ordinari d'induzione.

Questo fenomeno può essere interpretato come un vero effetto di Hall subito dalle correnti di Foucault circolari che si generano nel disco per la variazione del campo; vi deve corrispondere in vero, per l'effetto Hall, una f. e. m. normale alle linee di corrente, e perciò diretta radialmente. La forma delle correnti resterà la primitiva, cioè la circolare, finchè per mezzo del circuito esterno non sia stabilita la comunicazione tra il centro e la periferia del disco.

La previsione teorica delle leggi del fenomeno riesce però molto complicata, qualora esse si vogliano dedurre dall'integrazione, lungo il raggio, delle diverse f. e. m. di Hall,

poichè già il calcolo delle correnti di Foucault presenta notevoli difficoltà quando si tenga conto del loro ritardo sulle variazioni del flusso *esterno*. Si aggiunga che il coefficiente di Hall si suol prevedere e misurare pel regime permanente, quando cioè si son rese stabili le differenze di temperatura tra i bordi della lamina dovute alla condensazione degli ioni (effetto trasversale termico per corrente longitudinale elettrica); mentre nel caso attuale è da ritenere che il processo si svolga a temperatura sensibilmente costante.

10. Ci converrà invece connettere le deviazioni osservate a quelle proprie dell'effetto elettromagnetico, partendo dall'espressione della energia W posseduta dal disco percorso da una corrente radiale nel campo esterno, e applicando i procedimenti comunemente usati per dedurre le leggi dell'induzione dall'elettromagnetismo. Converrà tener presente che, come nel caso del bismuto, E può anche essere dipendente da H .

Durante il periodo variabile di chiusura del campo, entro un tempo dt , sia I la corrente indotta, e la f. e. m. relativa e dW la variazione dell'energia W .

Sarà

$$dW = e I dt = -\frac{1}{8\pi} S I d(EH^2)$$

e perciò

$$e = -\frac{1}{8\pi} S \frac{d(EH^2)}{dt}.$$

Detta ρ la resistenza del circuito totale che rilega il centro alla periferia del disco, la quantità di elettricità Q raccolta, tra i valori estremi O e H del campo, nell'eccitazione di questo, sarà dunque

$$(5) \quad Q = \frac{1}{8\pi\rho} S E_H H^2$$

nella quale E_H indica il valore finale di E , quando il campo è H .

L'effetto induttivo sarà, perciò indipendente dal segno di H , e il galvanometro darà deviazioni eguali e nel medesimo senso alla chiusura del campo, qualunque sia la dire-

zione di questo. L'esperienza conferma, come si è visto, questa previsione.

Se il disco fosse sottoposto ad un campo alternativo, l'espressione $E_H H^2$ della (5) riprenderebbe periodicamente gli stessi valori, e al passaggio per zero si avrebbe sempre $Q = 0$; il circuito esterno sarebbe percorso perciò da correnti alternate, con trasporto di quantità d'elettricità eguali nei due sensi.

La formola (5) si presta a una determinazione immediata del momento ionico differenziale E . Basta allo scopo tarare il galvanometro per quantità di elettricità, e misurare il campo e la superficie della lamina. Ho ottenuto in tal modo per la lamina di bismuto che mi è servita nelle esperienze del § 2 :

H	3700	6100	7250	8100	8650
$E \times 10^5$	15,4	9,8	9,1	8,8	8,6

Si ritrova così la stessa diminuzione di E al crescere del campo già osservata con l'azione elettromagnetica.

L'ordine di grandezza relativo ai diversi metalli del fenomeno induttivo è proporzionale al momento ionico differenziale, come per l'effetto elettromagnetico, e perciò, in prima approssimazione, dipende dal prodotto $R\sigma$ del coefficiente di Hall per la conducibilità del metallo; prodotto che varia pei diversi metalli molto meno di R .

Malgrado ciò, poichè l'azione costatata nel bismuto è piuttosto piccola, (un galvanometro Hartmann e Braun a telaio mobile, di 4 ohm di resistenza, subiva alla chiusura del campo una deviazione massima di circa 100 divisioni della scala), si può prevedere che l'effetto sarà constatabile nettamente, senza cure speciali, solo per pochi altri metalli, quali l'antimonio, il tellurio e forse anche il ferro. Finora son riuscito a metterlo in evidenza con l'antimonio e col ferro.

11. Dell'effetto induttivo osservato può darsi ancora una interpretazione più sintetica e suggestiva. Gli ioni del disco metallico moventisi in tutti i sensi come le molecole d'un gas, si trovan sottoposti per effetto del campo magnetico supposto *crescente*, a una forza elettrica, dovuta alla variazione del campo, che tende a trascinarli *prevalentemente* lungo un

cerchio concentrico al disco, e a una forza elettromagnetica, dovuta al valore attuale del campo, perpendicolare al moto, e perciò agente *con prevalenza* nel senso radiale; quest'ultimo moto sarà, centripeto, com'è facile riconoscere, per entrambi gli ioni, se il campo è crescente, centrifugo nel caso opposto. A causa della loro ineguale mobilità questa forza radiale è diversa per le due specie di ioni; essi si accumuleranno perciò in diversa misura al centro o alla periferia opponendosi al nuovo arrivo di altri dello stesso segno qualora il circuito esterno sia aperto e non ne permetta l'uscita. L'esperienza descritta può quindi considerarsi come una vera centrifugazione magnetica degli ioni.

V. — Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto percorso radialmente da un flusso di calore.

12. — Un disco di bismuto è sospeso tra le facce polari d'un elettromagnete, a 45° dalle linee di forza, per mezzo di un filo che compensa con la sua torsione la tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo del disco.

Inviando *nel centro* di questo un sottile fascio di luce, che lo riscaldi anche lievemente, si constata l'esistenza d'una energica coppia che tende ad annullare l'orientazione diamagnetica, e a disporlo perciò parallelamente alle linee di forza. L'azione non s'inverte invertendo il senso del campo; cambia invece di segno se del disco si scalda con un fascio di luce anulare, o altrimenti, la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza, e può allora raggiungere un valore rilevante, così da annullare la forte tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo, specialmente se il disco è un poco affumicato.

13. — La teoria elettronica dei metalli ci rende conto facilmente dell'effetto osservato.

Secondo il Drude la conduzione del calore nei metalli avviene con un doppio meccanismo. Da un canto si produce nel metallo tra le parti calde e le fredde uno scambio continuo di ioni, che ha per effetto di eguagliare le temperature convettivamente come nei gas, in modo cioè che un numero

eguale di ioni traversa un piano qualsiasi nei due sensi. A questo trasporto di calore non è connessa perciò alcuna manifestazione elettrica.

Contemporaneamente avrebbe origine una differenza nella concentrazione degli ioni tra i punti in cui la temperatura è differente, poichè in quasi tutti i metalli il numero di ioni per centimetro cubo è funzione della temperatura. Ne segue una vera migrazione di ioni in un senso determinato, e se il corpo è isolato, nascono in esso delle forze elettriche capaci di arrestare un'ulteriore diffusione degli ioni. A questa migrazione sarebbero dovute le deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e l'effetto Thomson; ad essa pure è dovuta la rotazione sopra riferita del disco di bismuto nel campo.

14. — Supponiamo che il disco sia percorso, in un campo ad esso normale, da un flusso di calore centrifugo radiale. Dimostriamo che il disco deve equivalere a una particolare lamina magnetica con senso di circuitazione opposto a quello della corrente magnetizzante. Notiamo anzitutto che la distribuzione delle temperature ed eventualmente del campo elettrico nel disco continuerà per ragioni di simmetria, a essere circolare. E perciò il gradiente di temperatura e la forza elettrica saranno in ogni punto radiali.

Al gradiente termico nel senso dr eguale a $\frac{dT}{dr}$, negativo, corrisponde per la teoria di Drude, un flusso di ioni positivi con la velocità $-t_1 \frac{dT}{dr}$, essendo

$$(6) \quad t_1 = p y_1 x_1$$

nella quale p è una costante universale, $y_1 = e v_1$ il prodotto della carica e dell'ione per la velocità ch'esso acquista sotto la forza 1, e x_1 la variazione relativa con la temperatura del numero N_1 di ioni per centimetro cubo:

$$x_1 = \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dT} = \frac{d \log N_1}{dT}.$$

Consideriamo, in un punto del disco, alla distanza r dal centro, la componente radiale $\frac{dr}{dt}$ e la componente circolare $r \frac{d\vartheta}{dt}$ della velocità, e supponiamo che la corrente magnetizzante circoli nel senso di ϑ crescente. Ponendo $Hev_1 = m_1$, avremo

$$(7) \quad r \frac{d\vartheta}{dt} = -m_1 \frac{dr}{dt}.$$

Detta E la forza elettrica radiale che prende origine per l'accumulo disuguale di ioni, e computandola positivamente nel senso centrifugo, sarà inoltre

$$(8) \quad \frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} + m_1 r \frac{d\vartheta}{dt}.$$

La (7) ci dice che la traiettoria degli ioni è la stessa spirale

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_1}}$$

già trovata per un flusso radiale *elettrico*. La differenza di segno nell'esponente, rispetto alla formola (3), è dovuta a ciò che la corrente magnetizzante si è supposta adesso nel senso di ϑ crescente.

La (8), combinata con la (7) ci dà poi

$$(1 + m_1^2) \frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr}.$$

Trascurando, in prima approssimazione, m_1^2 di fronte all'unità, la densità della corrente radiale trasportata dagli ioni positivi sarà perciò

$$I_{1,r} = N_1 e \frac{dr}{dt} = N_1 e \left(y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right).$$

Per gli ioni negativi si trova egualmente

$$I_{2,r} = -N_2 e \frac{dr}{dt} = -N_2 e \left(-y_2 E - t_2 \frac{dT}{dr} \right).$$

Ma essendo il disco isolato, dev'essere

$$I_{1,r} + I_{2,r} = 0$$

e perciò

$$(9) \quad N_1 \left(y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right) = -N_2 \left(y_2 E + t_2 \frac{dT}{dr} \right)$$

dalla quale si ricava il valore della forza elettrica:

$$(10) \quad E = \frac{N_1 t_1 - N_2 t_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} \frac{dT}{dr}.$$

Analogamente, ponendo per gli ioni negativi $m_2 = e v_2 H$ si ottiene per la densità delle correnti circolari trasportate dagli ioni positivi e negativi

$$I_{1,c} = N_1 e r \frac{d\vartheta}{dt} = -m_1 I_{1,r}$$

$$I_{2,c} = -N_2 e r \frac{d\vartheta}{dt} = m_2 I_{2,r}.$$

A questo flusso circolare di cariche corrisponderà un'azione magnetica equivalente a quella prodotta da una corrente complessiva i ; e questa, per la (9) sarà data da

$$i = I_{1,c} + I_{2,c} = -e (m_1 + m_2) N_1 \left(y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right).$$

Tenendo presente la (10), e la (6) questa diviene

$$i = p e N_1 y_1 N_2 y_2 \frac{x_1 + x_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} (y_1 + y_2) \frac{dT}{dr} H$$

o anche essendo

$$\sigma_1 = e N_1 y_1$$

e

$$\sigma_2 = e N_2 y_2$$

i contributi delle due specie di ioni alla conducibilità elettrica totale

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

si potrà scrivere

$$(11) \quad i = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) \frac{dT}{dr} H.$$

Ma se si indica con Q la quantità totale di calore che fluisce nel disco, si avrà, computandola positivamente nel senso centrifugo,

$$Q = -k \cdot 2 \pi r \frac{dT}{dr}$$

ove con k è indicata la conducibilità termica della sostanza.

Sarà perciò

$$-\frac{dT}{dr} = \frac{1}{k} \frac{Q}{2 \pi r}.$$

Sostituendo nella (11) avremo dunque

$$i = -p \frac{1}{2 \pi r} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k \sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) Q H$$

e perciò, ponendo

$$(12) \quad U = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k \sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2)$$

il disco eserciterà un'azione elettromagnetica equivalente a quella d'un sistema di correnti circolari di densità

$$(13) \quad i = -\frac{1}{2 \pi r} U Q H$$

e l'azione stessa sarà, per date dimensioni del disco, proporzionale al coefficiente U caratteristico della sostanza, al flusso di calore Q e al campo H . Poichè $x_1 + x_2$, secondo la teoria, è una funzione della temperatura che ha lo stesso valore per tutti i metalli, e da quanto è noto essa ha un valore positivo, e poichè le altre grandezze che compariscono nella espressione di U sono essenzialmente positive, ne risulta che i ha un senso opposto a quello di circuitazione della corrente magnetizzante.

15. — Il disco per le sue proprietà elettromagnetiche, possiederà un'energia di posizione nel campo; per un anellino $2 \pi r \times dr$ essa è data da

$$dW = \frac{1}{4 \pi r} U Q H dr \times \pi r^2 H.$$

L'energia totale sarà

$$W = \frac{1}{8 \pi} U Q S H^2$$

ove S indica la superficie totale attiva del disco.

Ma se la normale al disco fra un angolo α con le linee di forza, l'energia sarà

$$W' = W \cos^2 \alpha.$$

Si eserciterà perciò sul disco una coppia di momento

$$M = - \frac{dW'}{d\alpha} = W \sin 2\alpha$$

e per $\alpha = 45^\circ$

$$M = \frac{1}{8 \pi} U Q S H^2.$$

La coppia sarà perciò proporzionale al quadrato del campo H , al flusso calorifico Q , alla superficie del disco S , e dipenderà dal coefficiente U caratteristico del metallo.

Deducendo dall'esperienza il valore di U si viene così a possedere una nuova relazione indipendente dalle altre già

note per la determinazione delle costanti caratteristiche di Drude. E come si vede dalla (12) il coefficiente non ha niente da fare col coefficiente

$$Q = - \frac{p}{\sigma} (\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1)$$

del fenomeno trasversale termomagnetico (effetto elettrico) di Ettingshausen e Nernst, come potrebbe sembrare a prima vista.

Osserveremo invece che si può porre la (12) sotto la forma:

$$U = p \frac{\sigma}{k} \times \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} (x_1 + x_2) \times \frac{y_1 + y_2}{\sigma} \times \sigma$$

or il primo fattore varia di poco per i diversi metalli; il secondo fattore è proporzionale a queste variazioni, cioè alle deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e il terzo al coefficiente P del fenomeno galvanomagnetico (effetto termico) di Ettingshausen, cioè alla differenza di temperatura trasversale che acquista una lamina percorsa nel campo da una corrente elettrica.

Cosicchè la coppia constatata nelle presenti esperienze dipende dal prodotto dello scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, del coefficiente P e della conducibilità σ del metallo.

Purtroppo questi tre elementi si conoscono solo per pochi metalli, e anche in modo poco sicuro; essi sono riferiti nella seguente tabella, nella quale la prima colonna dà i valori delle deviazioni D dalla legge di Wiedemann e Franz, la seconda il coefficiente P, la terza la conducibilità σ riferita all'argento, la quarta il loro prodotto II in unità arbitrarie da cui dovrebbe dipendere U.

	D. 10 ³	P. 10 ⁶	σ	Π
Ag	0	—	60	0
Cu	22	—	56	0
Costant.	468	—		0
Ni	16	0,2	7,4	2,4
Fe	140	0,06	8	67
Carbone	?	5		?
Sh	300	2	1,5	900
Bi	308	50	0,8	12300

Come si vede la coppia si potrebbe manifestare solo col bismuto e con l'antimonio, e forse anche col carbone.

In realtà, servendomi della semplice disposizione indicata, non ho ottenuto alcun risultato con dischi di alluminio, di argento e di rame; mentre l'azione è ancora rilevantissima con l'antimonio.

Roma, Istituto Fisico della R. Università.
