Sull’induzione elettromagnetica

Giuseppe Giuliani

Dipartimento di Fisica “Volta”
Via Bassi 6, 27100 Pavia

giuliani@fisicavolta.unipv.it
http://matsci.unipv.it/percorsi/

1. Introduzione.

E’ noto che la “legge del flusso” non descrive correttamente i fenomeni di induzione elettromagnetica quando parte del circuito è in moto rispetto alla sorgente del campo magnetico. In questi casi, i manuali introducono, di solito, ipotesi ad hoc implicite per salvaguardare la legge del flusso; un’eccezione è costituita dalle “Lezioni di Feynman” che parlano esplicitamente di “eccezioni alla legge del flusso”. Gli autori delle “Lezioni” pongono bene in luce l’esistenza di due sorgenti della forza elettromotrice indotta: la variazione temporale del campo magnetico e la componente magnetica della forza di Lorentz.[1]

> Dobbiamo guardare alla “legge del flusso” in questo modo. In generale, la forza sulla carica unitaria è $\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. In fili in moto c’è una forza derivante dal secondo termine. Inoltre, c’è un campo $\vec{E}$ se, da qualche parte, c’è un campo magnetico che varia. *Sono due effetti indipendenti*, ma la *fem* lungo un filo chiuso è sempre uguale al tasso di variazione del flusso magnetico attraverso di esso.[2]

Vedremo più avanti che l’affermazione finale non è corretta. Gli stessi autori, peraltro, subito dopo questa affermazione discutono alcuni esempi ai quali “la legge del flusso non può essere applicata”.[3]

2. Una legge generale.

Definiamo la *fem* lungo una spira conduttrice omogenea come l’integrale di linea della forza esercitata dal campo elettromagnetico sulla carica unitaria positiva:

$$fem = \oint_l (\vec{E} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot dl = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (1)$$

dove abbiamo specificato che la velocità che compare sotto il segno di integrale è la velocità della carica (per distinguerla dalla velocità dell’elemento di linea $d\vec{l}$ che comparirà più avanti). Ponendo:

$$\vec{E} = -grad\,\boldsymbol{j} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (2)$$

---

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M.L. Sands, *Lectures on Physics*, vol. II, Addison-Wesley (1989), 17-1,17,3.
[2] Ibidem. p. 17-2; corsivo mio.
[3] Ibidem.

dove j e $\vec{A}$ sono, rispettivamente, il potenziale scalare e il potenziale vettore, la (1) assume la forma:

$$fem = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \; + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

poiché l'integrale lungo una linea chiusa di $grad\, j$ è nullo. La (3) è la legge generale dell'induzione. Essa mostra che:

1° La fem è data, in generale, dalla somma di due termini.

2° Il primo termine deriva dalla variazione temporale del potenziale vettore e, quindi, dalla variazione temporale del campo magnetico. Esso è nullo quando $\vec{A}$ e, quindi, $\vec{B}$ non dipendono dal tempo.

3° Il secondo termine deriva dalla componente magnetica della forza di Lorentz.

La legge generale (3) è una *legge locale e causale*. E' *locale* perché connette i valori di grandezze diverse nello stesso punto dello spazio; è *causale* perché afferma che la variazione temporale del potenziale vettore e la componente magnetica della forza di Lorentz *producono* – indipendentemente l'una dall'altra – un contributo al campo elettrico indotto $\vec{E}_i$ definito dalla relazione:

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B} \qquad (4)$$

La fem è localizzata nei tratti della spira in cui sono diversi da zero $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ e/o $\vec{v}_{carica} \times \vec{B}$. Il vettore densità di corrente $\vec{J}$ è definito dalla relazione:

$$\vec{J} = s\vec{E}_e \qquad (5)$$

dove s è la conducibilità e $E_e = fem / l$ il campo elettrico effettivo (l è la lunghezza della spira). La (5) è la legge di Ohm espressa in forma locale.

La legge generale dell'induzione (3) può, ovviamente, essere scritta in termini del campo magnetico. Essa può essere infatti scritta nella forma:

$$fem = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS - \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (6)$$

dove S è una qualunque superficie che abbia la linea l come contorno e $\vec{v}_{linea}$ è la velocità dell'elemento di linea $d\vec{l}$.
La (6) si ottiene:

- Applicando il teorema di Stokes e ponendo $\vec{B} = rot\vec{A}$. Si ottiene così il secondo membro della (6).

❖ Usando la relazione [4]

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (7)$$

che vale per qualunque vettore la cui divergenza, come quella del campo magnetico, sia nulla. Si perviene così al terzo membro della (6).
Pertanto, l'equazione dell'induzione, espressa in termini del campo magnetico assume la forma:

$$fem = \left[-\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS - \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \right] + \oint_l (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (8)$$

La (8) mostra che la "legge del flusso" è solo un caso particolare di una legge più generale. L'interpretazione fisica della (8) richiede un po' di attenzione. Abbiamo posto i primi due termini entro parentesi quadra per ricordare che essi derivano dal primo integrale al terzo membro della (1):

$$\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \qquad (9)$$

(si veda la (6)). Pertanto, la loro *somma deve essere nulla quando il campo magnetico è costante* ($\partial \vec{B} / \partial t = 0$). Ne deriva che, quando il campo magnetico è costante, la fem è unicamente dovuta alla componente magnetica della forza di Lorentz.
Nel caso della spira che stiamo esaminando, la (3) e la (8) possono essere semplificate. Infatti, essendo:

$$\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_{drift} \qquad (10)$$

ed essendo, in una spira, la velocità di deriva $\vec{v}_{drift}$ sempre parallela all'elemento di linea $d\vec{l}$, le due equazioni diventano, rispettivamente:

$$fem = -\oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad \text{(3-bis)}$$

e

$$fem = \left[-\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS - \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \right] + \oint_l (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad \text{(8-bis)}$$

La forma della (8-bis) spiega la capacità predittiva della legge del flusso anche in situazioni in cui l'origine fisica della fem è la componente magnetica della forza di Lorentz. Tipico è il caso di una spira piana mantenuta in rotazione in un campo magnetico uniforme e costante (alternatore). Essendo il campo magnetico costante, la somma dei primi due termini della (8-bis) è nulla: la fem è dovuta al terzo termine derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz. Tuttavia, essendo i due integrali di linea in questo caso uguali, la "legge del flusso" predice correttamente il

[4] Si veda ad esempio: R. Becker, *Teoria della elettricità*, Sansoni, (1949), vol. I, pp. 44-46; A. Sommerfeld, *Lectures in theoretical Physics*, Academic Press, (1950), vol. II , pp. 130-132; ibidem, vol. III, p. 286.

valore della fem, pur indicando per la fem un'origine fisica sbagliata (la variazione del flusso del campo magnetico concatenato alla spira).
In rete si trova un lavoro in cui la legge generale (3 o 8) è applicata a casi tipici: una barra conduttrice in moto in un campo magnetico uniforme e costante, il disco di Faraday, il disco di Corbino, l'induzione unipolare, nonché due altri casi discussi in letteratura. Si noti che lo studio dell'induzione nei casi di materiali estesi è complicata dal fatto che in un materiale esteso la velocità di deriva non è – in generale - parallela all'elemento di linea $d\vec{l}$: una trattazione semplice è possibile solo in casi di particolare simmetria (disco di Corbino e di Faraday).[5]

3. $\vec{A}$ o $\vec{B}$?

Abbiamo già osservato come la (3), espressa in termini del potenziale vettore, sia una legge *locale* e *causale*. La legge del flusso:

$$fem = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS \qquad (11)$$

è invece una legge *non-locale* e *non causale.* Essa connette una proprietà della spira (la fem), e quindi localizzata in essa, ai valori del campo magnetico su una *qualunque* superficie che abbia la spira come contorno: non è locale, perché connette grandezze definite su specie geometriche (linea, superficie) distinte; non è una legge causale perché non è in grado di stabilire una connessione causa-effetto univoca (la superficie di integrazione è in larga misura arbitraria). In questo caso, $\vec{B}$ non è un "buon" campo: esso, infatti, secondo la (11) agisce "a distanza" sulla spira e la sua "azione" si propaga con velocità infinita.[6]

4. Brevi riflessioni di carattere storico.

Le considerazioni svolte mostrano che la "legge del flusso" è, in generale, una legge sbagliata: solo fortunate (?) coincidenze preservano la sua capacità predittiva in alcuni casi. [7]
La legge generale (3) è il risultato di una deduzione basata sulla definizione (1) che, a sua volta, non è che l'espressione del lavoro compiuto dal campo elettromagnetico su di una carica unitaria. Ragioni di carattere storico spiegano il successo della "legge del flusso" nonostante i suoi limiti di applicazione. Essa - dal punto di vista formale - è nata, per opera di Neumann e Maxwell, ben prima della formulazione da parte di Lorentz dell'espressione della forza esercitata dal campo elettromagnetico su di una carica puntiforme, espressione che sta alla base della presente derivazione.[8] Michael Faraday, che ha scoperto e genialmente studiato i fenomeni di induzione elettromagnetica, interpretava tutti i suoi risultati sperimentali sulla base dell'ipotesi dell'esistenza reale delle linee di forza del campo magnetico. Secondo Faraday, c'è forza elettromotrice indotta ogniqualvolta c'e moto relativo tra almeno una parte del circuito e le linee di forza del campo magnetico, concepite come oggetti reali: c'è forza elettromotrice indotta ogniqualvolta almeno una

---

[5] G. Giuliani, *On electromagnetic induction*, http://matsci.unipv.it/percorsi/emi_web.pdf; oppure: http://babbage.sissa.it/abs/physics/0008006.
[6] Un'interessante discussione sui campi "buoni" (o meno) si trova nelle già citate "lezioni di Feynman", vol. II, pp. 15-7,15-8. Gli autori operano una distinzione tra campi "reali" e non. Tuttavia, questa distinzione si basa su di una definizione *ad hoc* di realtà.
[7] Si vedano i casi discussi nel lavoro della nota 5.
[8] E' interessante notare come sia Neumann sia Maxwell scrivano la legge dell'induzione usando anche il potenziale vettore: nei manuali contemporanei il ruolo del potenziale vettore è invece ridimensionato.

parte del circuito interseca le linee di forza. La “legge del flusso” è stata interpretata come una matematizzazione di questa ipotesi di Faraday: ciò ha contribuito a consolidare la presunta validità generale della “legge del flusso”.

5. **Una possibile verifica sperimentale.**

E’ possibile sottoporre la legge generale (3) ad una verifica sperimentale quando c’è una variazione di flusso concatenato e, al contempo, il termine dovuto alla componente magnetica della forza di Lorentz è nullo. Si consideri una spira di rame piana rotante in un campo magnetico uniforme e costante. Si è già osservato che, secondo la legge (3), la *fem* è dovuta in questo caso alla componente magnetica della forza di Lorentz e non alla variazione temporale del flusso concatenato con la spira.
La condizione desiderata può essere realizzata depositando sulla spira di rame del materiale superconduttore con il risultato che, all’interno della spira di rame il campo magnetico ed il potenziale vettore sono nulli grazie all’azione schermante del superconduttore. Secondo la (3), una rotazione della spira in un campo magnetico uniforme e costante non produce alcuna *fem* nella spira di rame, nonostante si abbia una variazione del flusso concatenato alla spira.
Un altro possibile esperimento: la spira, schermata dal materiale superconduttore, è mantenuta in quiete e viene acceso un campo magnetico con conseguente variazione del flusso concatenato alla spira. Secondo la legge *locale* (3), anche in questo caso, non viene prodotta alcuna forza elettromotrice.

Ringraziamenti. Ringrazio Attilio Rigamonti per una proficua discussione e per avermi suggerito le possibili verifiche sperimentali.