Il ruolo della radiazione di corpo nero nello sviluppo della fisica dei quanti

Giuseppe Giuliani
Dipartimento di Fisica “Volta”, Pavia

1 Introduzione

E' noto che l'avvio dello sviluppo della fisica quantica, attraverso l'introduzione della costante h (1900) è legato allo studio della radiazione di corpo nero. Meno noto è il fatto che la radiazione di corpo nero ha costituito il supporto fisico diretto della elaborazione einsteniana dei quanti di luce (1905 - 1917) e della messa a punto, da parte di Bose, della prima statistica quantistica (1924). Come si cercherà di mostrare in questo scritto, la radiazione di corpo nero ha costituito quindi la struttura portante, lungo un venticinquennio, di fondamentali innovazioni concettuali legate allo sviluppo della fisica quantistica.

2 La costante h di Planck e la quantizzazione dei livelli di energia

Il percorso che ha condotto Planck all'introduzione della costante h è molto complesso. Ne ricorderemo qui solo alcuni aspetti.[1]

Agli inizi del 1900, Planck era convinto di avere trovato una deduzione teoricamente rigorosa della formula della distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero suggerita da Wien nel 1896:

$$u(\nu, T) = a\nu^3 e^{-b\nu/T} \tag{1}$$

ove $u(\nu, T)$ è la densità di energia nella cavità isoterma, ν la frequenza, T la temperatura assoluta e a e b sono delle costanti. Tuttavia, i nuovi dati sperimentali ottenuti presso l'Istituto Imperiale di Fisica e Tecnica di Berlino nel corso dello stesso anno misero in evidenza come la (1) interpolasse in modo soddisfacente i dati sperimentali solo per valori di ν/T sufficientemente grandi e come, per valori di ν/T sufficientemente piccoli, l'intensità della radiazione di corpo nero risultasse invece proporzionale alla temperatura assoluta. La reazione di Planck fu rapida: nel giro di poche settimane di intenso lavoro,

[1] Una trattazione abbastanza dettagliata di questo argomento si può trovare in: G. Giuliani “La teoria della radiazione di corpo nero : il percorso di Planck”, in *Storia della fisica e didattica*, a cura di F. Bevilacqua e A. Gandolfi, Pavia, 1989, 61 - 77.

trovò che una semplice modifica del procedimento da lui usato per "dimostrare" la (1) conduceva ad una formula per la distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero che interpolava in modo soddisfacente *tutti* i dati sperimentali disponibili:

$$u(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{e^{B\nu/T} - 1} \tag{2}$$

Tuttavia, per pervenire alla (2), Planck aveva fatto una assunzione "*arbitraria*" circa la relazione intercorrente tra l'entropia e l'energia vibrazionale media dei risonatori.[2] Planck si impegnò quindi nel tentativo di dare un significato fisico ed un fondamento teorico soddisfacente all'interpolazione "*arbitraria*" che lo aveva condotto alla (2). Rompendo con una sua ben radicata posizione che lo aveva indotto a guardare con sospetto l'interpretazione statistica della termodinamica, Planck decise di utilizzare la relazione:

$$S = costante \times lnW \tag{3}$$

che lega, secondo Boltzmann, l'entropia S alla probabilità W di uno stato di un qualunque sistema fisico (la costante che compare in questa formula fu poi chiamata, su proposta di Planck, "costante di Boltzmann"). Effettuata questa scelta, il problema era allora quello del calcolo di W e quindi di R, numero dei modi possibili in cui un determinato stato può essere realizzato.[3] Per calcolare R, Planck suddivide i risonatori presenti nella cavità in gruppi in modo tale che i risonatori di ogni gruppo abbiano (approssimativamente) la stessa frequenza. Considerato uno di questi gruppi - N risonatori di frequenza ν a cui è attribuita l'energia E - il problema è quello di vedere come l'energia E può essere distribuita tra gli N risonatori. A questo proposito, Planck osserva che:

> Se E è considerata come una quantità divisibile in modo continuo, questa distribuzione è possibile in un numero infinito di modi. Tuttavia, noi supponiamo - questo è il punto essenziale di tutto il procedimento - che E sia composta di un numero ben definito di parti uguali ed useremo d'ora innnanzi la costante della natura $h = 6.55 \times 10^{-27}$ *erg sec*. Questa costante, moltiplicata per la frequenza ν dei risonatori ci dà l'elemento di energia ε e, dividendo E per ε, otteniamo il numero P degli elementi di energia che debbono

[2]Planck usava un modello di cavità costituita da superfici perfettamente riflettenti e contenente, oltre alla radiazione, oscillatori ("risonatori") in grado di assorbire ed emettere radiazione elettromagnetica avente la loro frequenza di vibrazione.

[3]W e R sono fra loro proporzionali sulla base dell'assunzione che tutti i possibili modi di realizzazione di un medesimo stato sono equiprobabili.

essere suddivisi tra gli N risonatori. Se il rapporto non è un intero, noi prendiamo per P un intero vicino.[4]

E' questo il passo cruciale della memoria del 14 dicembre 1900: infatti in esso non solo si concretizza l'uso della costante h, ma, secondo la tradizionale interpretazione, si ipotizza anche che i risonatori possano assumere solo valori discreti di energia. Tuttavia, è stato mostrato come questa interpretazione non sia sostenibile.[5] Senza entrare in una analisi dettagliata, si può osservare che:[6]

a) Planck non scrive da alcuna parte che l'energia di un risonatore può assumere solo valori discreti;

b) la precisazione contenuta nella precedente citazione e relativa ai possibili valori di P non interi ha senso solo se l'energia dei risonatori non è quantizzata;

c) l'ipotesi della quantizzazione è in contraddizione con l'uso dell'equazione che sta alla base della derivazione di Planck. Questa equazione (che lega la densità di energia elettromagnetica nella cavità alla energia vibrazionale media dei risonatori):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{U}_\nu \tag{4}$$

si ricava infatti all'interno della teoria elettromagnetica di Maxwell supponendo che lo scambio di energia tra risonatori e radiazione avvenga in modo continuo; ciò non è ovviamente possibile se l'energia dei risonatori è quantizzata.

L'ipotesi della quantizzazione dei livelli di energia dei risonatori apparve invece in un articolo di Einstein del 1906.[7] Einstein sosteneva che, per arrivare alla formula di Planck fosse necessario assumere che l'energia dei risonatori potesse assumere solo i valori discreti $nh\nu$; tale assunzione era però incompatibile con l'equazione (4), punto di partenza della derivazione. Era pertanto necessario, secondo Einstein, assumere la (4) come postulato, in attesa di una sua nuova deduzione.

---

[4] M. Planck, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Geselleschaft, **2**, 237-245 (1900); trad. it. in: M. Planck, "Scienza, filosofia e religione", Milano 1973.

[5] Si veda, ad esempio, l'articolo citato alla nota (1); per una ricostruzione storica dettagliata si veda: T. Kuhn, "Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity: 1894-1912", Oxford - New York, (1978); trad. it. "Alle origini della fisica contemporanea. La teoria del corpo nero e la discontinuità quantica", Bologna (1981). Kuhn è stato il primo a mettere in discussione le ricostruzioni storiche che attribuivano a Planck la quantizzazione dei livelli di energia dei risonatori.

[6] Mi limito a riassumere alcune delle argomentazioni svolte nell'articolo citato alla nota (1) e relative alla memoria che stiamo discutendo. L'atteggiamento assunto da Planck negli anni successivi al 1900 rende ancora meno credibili le tradizionali ricostruzioni storiche.

[7] A. Einstein, *Annalen der Physik*, 20, 199 - 206 (1906); trad. it. in: E. Bellone (a cura di), *Albert Einstein: opere scelte*, Torino 1988, pp. 181-188. Einstein si era già in precedenza occupato della radiazione di corpo nero all'interno dell'articolo sui quanti di luce che discuteremo nel prossimo paragrafo.

3 I quanti di luce

L'articolo di Eistein sui quanti di luce venne pubblicato, come è noto, nello stesso anno di pubblicazione (1905) dei lavori sulla relatività ristretta e sul moto browniano.[8] Con questo articolo Einstein intraprende un lungo percorso che si concluderà nel 1924 - 25 con i due articoli sulla statistica del gas perfetto. In questo paragrafo, verranno delineati i passi principali di questo percorso.

Le motivazioni che hanno indotto Einstein a proporre l'ipotesi dei quanti di luce sono rese esplicite nella parte introduttiva dell'articolo:

> . . . nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce. A me sembra infatti che le osservazioni sulla "radiazione di corpo nero", la fotoluminescenza, la generazione dei raggi catodici tramite la luce ultravioletta e altri classi di fenomeni concernenti la generazione e la trasformazione della luce appaiano più comprensibili nell'ipotesi di una distribuzione spaziale discontinua dell'energia luminosa. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.[9]

Il problema è posto cautamente, ma in termini netti: si tratta di capire esattamente quale è il dominio di applicazione della teoria ondulatoria (elettromagnetica) della luce; e la non applicabilità di tale teoria ai fenomeni di interazione radiazione - materia è suggerita da una serie di osservazioni sperimentali riguardanti, tra l'altro, la radiazione di corpo nero e l'effetto fotoelettrico.[10]

Se la parte introduttiva del lavoro ha sicuramente costituito una sorpresa per la comunità dei fisici di allora, la parte "tecnica" del lavoro non è meno sorprendente. Infatti Einstein mostra dapprima che la variazione di entropia

[8] A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17, 354 - 362 (1905); trad. it. in: nota (6), pp. 118 - 135.

[9] Ibidem, p. 119.

[10] Non intendo sottovalutare il ruolo delle considerazioni che Einstein svolge all'inizio dell'articolo sulla asimmetria formale che caratterizza la descrizione di sistemi di particelle e quella del campo elettromagnetico. Tuttavia, è evidente che l'ipotesi dei quanti di luce viene formulata sulla base delle riflessioni stimolate dalle osservazioni sperimentali citate da Einstein.

della radiazione di corpo nero al variare del volume della cavità e *nei limiti di validità della legge di Wien* è data da:[11]

$$S - S_0 = k\frac{u}{h\nu}\ln\frac{v}{v_0} \tag{5}$$

ove u è la densità di energia contenuta nella cavità di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$; v_0 il volume iniziale e v il volume finale. Einstein commenta:

> Questa equazione mostra che l'entropia di una radiazione monocromatica di densità abbastanza piccola varia con il volume secondo la stessa legge con cui varia l'entropia di un gas perfetto o di una soluzione diluita. L'equazione ora trovata sarà interpretata nel seguito sulla base del principio, introdotto in fisica da Boltzmann, secondo cui l'entropia di un sistema è una funzione della probabilità del suo stato.[12]

Einstein mostra poi che si può pervenire alla formula che dà l'entropia di un gas perfetto o di una soluzione diluita partendo dalla formula che, secondo Boltzmann, dà la variazione di entropia in funzione della probabilità relativa W dello stato finale rispetto allo stato iniziale di un sistema:

$$S - S_0 = k\ln W \tag{6}$$

Ora se inizialmente le n molecole occupano un volume v_0, la probabilità che si verifichi il caso in cui tutte le n molecole siano contenute nel volume $v < v_0$ è data da:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n \tag{7}$$

La variazione di entropia di un gas composto da n molecole è quindi data da:

$$S - S_0 = kn\ln\frac{v}{v_0} \tag{8}$$

Einstein commenta così il risultato ottenuto:

> Se una radiazione monocromatica di frequenza ν e di energia u è racchiusa (da pareti riflettenti) nel volume v_0, allora la probabilità che in un istante arbitrario tutta l'energia di radiazione si trovi contenuta in un sottovolume v del volume v_0 è:
>
> $$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{u/h\nu} \tag{9}$$

[11] Einstein usa notazioni diverse. In particolare non usa la costante di Planck.
[12] Nota (8), p. 126.

Se ne conclude inoltre che:

> sotto il profilo della teoria del calore, una radiazione monocromatica di piccola densità (all'interno del dominio di validità della legge di Wien) si comporta come se consistesse di quanti di energia, tra loro indipendenti, di grandezza $h\nu$.[13]

Abbiamo qui un esempio significativo dell'uso dell'analogia in fisica. Il ragionamento di Einstein può essere così schematizzato:

a) alla formula che dà l'entropia di un gas perfetto (o di una soluzione diluita) si può pervenire usando la relazione di Boltzmann $S = k \ln W$ e la formula (7) che dà la probabilità che n molecole inizialmente nel volume v_0, occupino, in un istante successivo, il volume $v < v_0$;

b) la dipendenza dell'entropia della radiazione di corpo nero dal volume della cavità ha la stessa forma, nei limiti di validità della legge di Wien, di quella del gas perfetto (equazioni (5) e (8)); anzi, le due equazioni diventano le stesse se si pone, nella (5) $u = nh\nu$, se cioè si assume che la radiazione sia composta da quanti di energia $h\nu$; tali quanti soddisfano inoltre la (7) (cui si riduce la (9) se $u = nh\nu$) e sono quindi tra di loro statisticamente indipendenti. L'indipendenza statistica comporta che le particelle non interagiscono.[14]

L'analogia consiste ovviamente nell'estendere, sulla base dell'identità formale di due coppie di formule, l'interpretazione acquisita di una coppia (quelle del gas perfetto) all'altra coppia (quelle della radiazione di corpo nero). Alla radiazione vengono così attribuite alcune proprietà corpuscolari.[15]

Einstein ritorna sull'argomento nel 1909: il punto di partenza delle sue riflessioni è sempre la radiazione di corpo nero. Einstein calcola dapprima la fluttuazione (variazione quadratica media) dell'energia della radiazione, ottenendo, nel caso in cui la distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero sia data dalla formula di Planck:[16]

$$\overline{\varepsilon^2} = \left(uh\nu + \frac{c^3}{8\pi} \frac{u^2}{\nu^2 d\nu} \right) v \tag{10}$$

(v è il volume della cavità; gli altri simboli hanno il significato già definito). Di fronte a questa formula, Einstein osserva che "*l'attuale teoria della radiazione*

[13] Nota (8), p. 129.

[14] Le particelle sono statisticamente indipendenti quando la probabilità che una di esse si trovi in un determinato volume dello spazio delle fasi non dipende dal numero delle particelle che già lo occupano.

[15] Non si dimentichi che Einstein sviluppa le sue considerazioni nel dominio di validità della legge di Wien. In tale dominio, la statistica di Bose si riduce, con buona approssimazione, a quella di Boltzmann. Secondo la statistica di Bose, i quanti di luce non sono più statisticamente indipendenti.

[16] A. Einstein, *Physikalische Zeitschrift*, 10, (1909), 185 - 193; trad. it. in nota (6), pp. 201 - 220.

è incompatibile con questo risultato".[17] Secondo Einstein infatti, la teoria elettromagnetica di Maxwell - Lorentz produce solo il secondo termine: questo termine sarebbe inoltre l'unico prodotto se, per la radiazione di corpo nero, si usasse la formula di Rayleigh - Jeans invece di quella di Planck. Inoltre, riferendosi al primo termine:

> ...il primo termine, qualora fosse il solo presente, produrrebbe fluttuazioni [come] se la radiazione fosse composta da quanti puntiformi di energia $h\nu$ che si muovono indipendentemente [l'uno dall'altro].[18]

Einstein calcola poi l'effetto delle fluttuazioni della pressione della radiazione di corpo nero sul moto di uno specchio piano, ottenendo per le fluttuazioni della quantità di moto dello specchio, relative all'intervallo di tempo τ:

$$\overline{(\Delta p)^2} = \frac{1}{c}\left(uh\nu + \frac{c^3}{8\pi}\frac{u^2}{\nu^2 d\nu}\right)\tau f \tag{11}$$

ove f è la superficie dello specchio. Il commento di Einstein è, in questo caso, un po' oscuro e chiaramente limitativo:

> Se la radiazione consistesse di complessi molto poco estesi di energia $h\nu$ che si muovono indipendentemente nello spazio e che sono indipendentemente riflessi ... allora, come conseguenza delle fluttuazioni nella pressione della radiazione, queste quantità di moto agirebbero sul nostro specchio nel modo descritto dal primo termine della nostra formula.[19]

La questione è che una lettura della (11) analoga a quella della (10) avrebbe condotto Einstein ad attribuire ai quanti di luce una quantità di moto $h\nu/c$.[20]

Rispetto a quattro anni prima la situazione è comunque mutata: se nel 1905 i quanti di luce erano stati proposti attraverso l'uso di una analogia, nei due lavori del 1909 Einstein dimostra che le formule della fluttuazione dell'energia e della pressione della radiazione di corpo nero ricavate all'interno della termodinamica statistica conducono, assunta la formula della radiazione di Planck come "*espressione dell'esperienza*",[21] ad un risultato incompatibile con

[17] Nota (16), p. 209.
[18] Nota (16), p. 211.
[19] A. Einstein, *Physikalische Zeitschrift*, 10, (1909), 817 - 825.
[20] Per alcuni commenti su questa reticenza di Einstein ad associare ai quanti di luce una quantità di moto (nonostante che anche la relazione relativistica per particelle con massa a riposo nulla $p = E/c$ gli fosse già nota!), si veda per es.: A. Pais, *Review of Modern Physics*, 51, 863 - 914 (1979).
[21] Nota (16), p. 209.

la teoria di Maxwell: questa è quindi contraddetta dall'esperienza.[22] Appare inoltre che i "nuovi" termini che conpaiono nella (10) e nella (11) sono legati ai quanti di luce ed alle loro proprietà corpuscolari.

Nel corso del 1917 apparve un altro importante contributo di Einstein.[23] Lo scopo dell'articolo era quello di trovare una nuova deduzione della formula della radiazione di corpo nero e di cercare di "*fare un po' di luce sul processo, per noi ancora tanto oscuro, dell'emissione e dell'assorbimento della radiazione da parte della materia*".[24] Tale deduzione si basa su due semplici ipotesi:

a) i livelli di energia delle molecole sono discreti: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$;

b) la frequenza relativa degli stati corrispondenti è data da: $W_n = p_n e^{-E_n/kT}$.[25]

Le molecole sono contenute in una cavità isoterma e scambiano energia con la radiazione. Se si pone la condizione che il sistema (molecole+radiazione) sia all'equilibrio termico, ne consegue che la densità della radiazione è data da:

$$u = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{(E_m - E_n)/kT} - 1} \tag{12}$$

ove A_m^n e B_m^n sono le probabilità di transizione tra lo stato E_m e lo stato E_n (con $E_m > E_n$): la prima "*senza ... cause esterne*";[26] la seconda dovuta alla radiazione presente nella cavità. Il fatto che l'espressione della u debba avere la forma imposta dalla legge dello spostamento di Wien:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\frac{\nu}{T}) \tag{13}$$

comporta che, nella (12), sia:

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \tag{14}$$

e

$$E_m - E_n = h\nu \tag{15}$$

"*dove α e h sono costanti universali.*"[27] Per determinare la costante α, è però necessario effettuare un passaggio al limite per valori di ν/T piccoli e utilizzare la formula di Rayleigh-Jeans.

---

[22] Si veda l'articolo citato alla nota (16), p. 214.

[23] A. Einstein, *Physikalische Zeitschrift*, 18, (1917), 121 - 128; trad. it.: nota (6), pp. 344-360.

[24] Ibidem, p. 345.

[25] Gli stati delle molecole cui si riferisce Einstein sono stati elettronici per i quali deve valere la statistica di Fermi-Dirac (proposta nel 1926). L'uso della statistica di Boltzmann è giustificato nel limite in cui $E >> kT$: in questo limite infatti la statistica di Fermi-Dirac è bene approssimata da quella di Boltzmann.

[26] Nota (23), p. 347.

[27] Nota (23), p. 350.

Einstein dimostra poi che la distribuzione della velocità delle molecole all'equilibrio termico è quella prevista dalla formula di Maxwell se lo scambio di energia $h\nu$ tra radiazione e molecole è accompagnato da uno scambio di quantità di moto uguale a $h\nu/c$. In altri termini: i quanti di luce di energia $h\nu$ posseggono anche una quantità di moto $h\nu/c$; l'emissione e l'assorbimento da parte di una molecola di un quanto di energia $h\nu$ sono processi direzionali la cui direzione è individuata dalla direzione di propagazione del quanto di luce assorbito o emesso.

La pur breve esposizione del lavoro di Einstein ha permesso di metterne in rilievo gli aspetti concettuali fondamentali. Tuttavia, è opportuno sottolinearne almeno un paio. Innanzitutto quello relativo alla quantità di moto da associarsi ai quanti di luce; in secondo luogo quello, ad esso collegato, della direzionalità dei processi di emissione e di assorbimento della radiazione da parte della materia. Questa caratteristica direzionale dei processi di emissione e di assorbimento sono ovviamente incompatibili con la teoria elettromagnetica di Maxwell.[28] Quella che nell'articolo del 1905 era una ipotesi, è ora diventata per Einstein, una certezza: la teoria elettromagnetica di Maxwell, se applicata ai processi di emissione e di assorbimento della luce, entra in conflitto con l'esperienza. Conclude infatti Einstein:

> Queste proprietà dei processi elementari richieste dall'equazione (...) fanno apparire quasi inevitabile la costituzione di una vera e propria teoria quantica della radiazione. La debolezza della [attuale] teoria sta, da una parte, nel fatto che essa non ci porta più vicini a un collegamento con la teoria ondulatoria e, dall'altra, nel fatto che essa lascia al "caso" l'istante e la direzione dei processi elementari; ciononostante io nutro piena fiducia nell'attendibilità della strada intrapresa.[29]

4 La statistica di Bose - Einstein

L'articolo di Bose del 1924, che ha dato origine alla prima statistica quantistica, è in realtà anch'esso un lavoro teso alla ricerca di una deduzione rigorosa della formula della radiazione di corpo nero proposta da Planck nel 1900.[30] Bose tratta la radiazione contenuta nella cavità come composta da quanti di energia $E = h\nu$ e quantità di moto $p = h\nu/c$.

[28] Nella teoria di Maxwell l'emissione di radiazione da parte di un oscillatore dà sempre origine ad onde sferiche.

[29] Nota (23), p. 359.

[30] S. Bose, *Zietschrifts fur Physik*, 26, (1924), 178 - 181; trad. inglese in: Theimer H., Ram B., "The beginning of quantum statistics", *American Journal of Physics*, 44, (1976), 1056 - 1057.

> Il quanto ha una quantità di moto lineare $h\nu/c$ nella direzione del suo moto. Lo stato istantaneo del quanto è caratterizzato dalle sue coordinate x, y, z e dai momenti associati p_x, p_y, p_z. Queste sei grandezze possono essere interpretate come coordinate di un punto in uno spazio esadimensionale... l'intervallo di frequenze $d\nu$ è associato al volume dello spazio delle fasi:
>
> $$\int dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z = V 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{c^3} h^3 \nu^2 d\nu \tag{16}$$
>
> ... Per tenere conto della polarizzazione, sembra obbligatorio moltiplicare questo numero per un fattore 2 così che il numero di celle corrispondenti all'intervallo di frequenze $d\nu$ diventa $8\pi V \nu^2 d\nu / c^3$.[31]

Questa misteriosa polarizzazione associata ai quanti di luce risulterà in seguito essere la quantità di moto angolare dei fotoni! Si osservi che, con questa "correzione" il numero di celle - per unità di volume - la cui energia è compresa tra $E = h\nu$ e $E + dE = h(\nu + d\nu)$ è dato da:

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{17}$$

che è esattamente il fattore che compare al secondo membro della (4). Finalmente era stata trovata una derivazione di questo fattore indipendentemente dalla teoria elettromagnetica di Maxwell! Se ora si assume che ad ogni cella possano essere associati $n >= 0$ quanti di luce, il problema della radiazione di corpo nero si risolve calcolando il numero N_s di quanti di luce che, all'equilibrio, occupano le celle Z_s.[32] Se applicassimo la statistica di Boltzmann ai quanti di luce, potremmo scrivere immediatamente:[33]

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu e^{-h\nu/kT} \tag{18}$$

Otterremmo così la formula cui si riduce quella di Planck per valori di ν/T grandi (formula di Wien).[34] Tuttavia, Bose procede, senza alcuna spiegazione, in un modo differente. Il procedimento di Bose è equivalente, anche se non identico, al seguente.

Indichiamo con N_s i quanti di luce che occupano le celle Z_s. Il numero dei modi in cui N_s quanti possono essere distribuiti tra Z_s celle, se si considerano

[31] Nota (30), p. 1057.

[32] Ci discostiamo qui dal testo di Bose per rendere più evidenti i passaggi concettualmente cruciali.

[33] Bose non svolge questa considerazione.

[34] Sono questi i quanti di luce studiati da Einstein nel 1905.

i quanti indistinguibili e le celle distinguibili, è dato da:

$$\frac{(N_s + Z_s - 1)!}{N_s!\,(Z_s - 1)!} \tag{19}$$

Il numero dei modi W in cui N_s quanti possono essere distribuiti tra Z_s celle, se si tiene conto di tutti i valori possibili di s, è dato da:

$$W = \prod_s \frac{(N_s + Z_s - 1)!}{N_s!\,(Z_s - 1)!} \tag{20}$$

Per trovare i valori di N_s corrispondenti all'equilibrio termico bisogna trovare il massimo di $\ln W$, al variare degli N_s, sotto la condizione:[35]

$$\sum_s N_s h\nu_s = E \tag{21}$$

Il calcolo conduce alla formula:

$$N_s = Z_s \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{22}$$

che, espressa in termini del numero medio di quanti di luce che occupano una cella di energia E_s, si scrive:

$$P(E_s) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{23}$$

La formula per la radiazione di corpo nero è allora semplicemente data da:

$$u(\nu, T) = N_s(\nu) h\nu \tag{24}$$

che può anche essere scritta come:

$$u(\nu, T) = Z_s(\nu) P[E_s(\nu)] h\nu \tag{25}$$

Si ritrova così la formula di Planck:

$$u(\nu, t) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{26}$$

La derivazione suggerita da Bose è quindi del tutto indipendente dalla fisica classica: essa non utilizza neanche la legge dello spostamento di Wien. E' pertanto opportuno raggruppare le ipotesi su cui si basa:[36]

[35]Trovare il massimo di $\ln W$ equivale, ovviamente, a trovare il massimo dell'entropia del sistema (data da $S = k \ln CW$ ove C è una costante arbitraria).

[36]A questo insieme di postulati diamo una forma che tiene conto degli sviluppi successivi al lavoro di Bose.

1) la radiazione contenuta nella cavità è costituita da quanti di energia $h\nu$, quantità di moto $h\nu/c$ e momento angolare parallelo o antiparallelo alla direzione di propagazione dei quanti;

2) i quanti sono indistinguibili, le celle distinguibili.

La 1) permette di ricavare il termine $8\pi\nu^2/c^3$ che dà il numero degli stati di energia $E(\nu)$; le altre due determinano la statistica, cioè il modo in cui detti stati sono occupati dai quanti all'equilibrio termico.

Siamo giunti così alla fine della nostra storia: dobbiamo solo aggiungere che Einstein, applicando il procedimento statistico di Bose al gas perfetto, ne ottenne la statistica quantistica. Essa coincide con quella di Bose per i quanti di luce. La derivazione tiene naturalmente conto del fatto che, in questo caso si ha a che fare con particelle di massa diversa da zero e il cui numero si conserva.

5 Conclusioni

La rilevanza della radiazione di corpo nero nella storia della fisica dei quanti dovrebbe essere, a questo punto, sufficientemente acquisita. E' tuttavia necessario aggiungere che la problematica dei quanti di luce e il loro rapporto conflittuale con la teoria elettromagnetica della luce hanno costituito il terreno di coltura di quello che, in una certa fase dello sviluppo della fisica dei quanti (e, anacronisticamente anche oggi) venne chiamato il "dualismo onda-corpuscolo". In questo contesto è opportuno ricordare che Einstein, dopo aver trovato la statistica quantistica per il gas perfetto, calcolò le fluttuazioni dell'energia del gas ottenendo una formula identica alla (10), ottenuta nel 1909 per i quanti di luce, purché si ponga, nel caso del gas:

$$\frac{p^2}{2m} = h\nu \tag{27}$$

Questa volta, diversamente dal caso dei quanti di luce, il termine familiare era costituito dal primo termine del secondo membro della (10), tipico di un insieme di particelle. Il secondo termine, che nel caso dei quanti di luce aveva una evidente origine ondulatoria, viene interpretato da Einstein "*in modo corrispondente, associando un fenomeno ondulatorio al gas.*"[37] Il percorso di Einstein si chiude quindi, in un certo senso, su se stesso. Nel 1905, un'analogia fondata sulle conoscenze relative al gas perfetto condusse ad attribuire proprietà corpuscolari alla radiazione; nel 1925, un'altra analogia, basata sulla statistica di Bose della radiazione, suggerisce di attribuire proprietà ondulatorie alle particelle. Il fatto che l'ipotesi di de Broglie (secondo cui ad una

[37] Einstein fa poi, a questo proposito, esplicito riferimento alla ipotesi delle onde di materia di de Broglie.

particella di quantità di moto p è associata un'onda con $\lambda = h/p$) fosse già nota, è, dal punto di vista concettuale, irrilevante. Infatti, la via seguita da Einstein per associare fenomeni ondulatori alle particelle era concettualmente indipendente da quella seguita da de Broglie.

6 Appendice sulle moderne derivazioni della formula di Planck

Il complesso percorso storico che ha condotto alla derivazione di Bose della formula di Planck, si riflette tuttora nei libri di testo. Non è infatti difficile trovare deduzioni della formula di Planck che, ignorando alcuni snodi concettuali rilevanti, siano insoddisfacenti o addirittura incoerenti. Riassumiamo, ancora una volta, i termini della questione. Il problema della deduzione della formula di Planck può essere suddiviso in due parti:

a) determinare il numero degli "stati" la cui energia è compresa tra E e $E + dE$ (o la cui frequenza è compresa tra ν e $\nu + d\nu$);[38]

b) determinare la probabilità di occupazione di questi stati. Naturalmente la soluzione data alle due parti del problema deve essere internamente coerente.

E' tuttavia opportuno, prima di procedere, ricordare che Debye nel 1910 aveva proposto un'elegante deduzione della formula di Planck tesa ad evitare le incongruenze messe in luce da Einstein. Debye ricavava quello che abbiamo chiamato il numero degli stati (il termine: $8\pi\nu^2/c^3$) con una procedura alla Rayleigh (conteggio del numero dei modi di vibrazione di una radiazione elettromagnetica costituita da onde stazionarie in una cavità). Supponeva poi che a ciascun modo di frequenza ν fosse associato un numero di quanti $f(\nu)$ di energia $h\nu$. Il calcolo di $f(\nu)$ veniva effettuato cercando la distribuzione più probabile dell'energia totale della radiazione tra le varie frequenze sotto la condizione che l'energia rimanesse costante e supponendo indistinguibili i quanti e distinguibili i modi di vibrazione. Otteneva così :[39]

$$f(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{28}$$

Formalmente, la derivazione di Debye è molto simile a quella, di molto successiva, di Bose. Esse sono tuttavia diverse per i modelli di radiazione usati: ondulatoria per Debye, corpuscolare per Bose. Inoltre, la derivazione di Debye è incongruente anche se non contraddittoria. Essa infatti associa alle onde

[38] Non è necessario precisare apriori che cosa siano questi stati. Il loro significato fisico dipende infatti dal modello di radiazione usato (ondulatorio o corpuscolare).

[39] Questo conteggio è, evidentemente, lo steso effettuato da Planck e, successivamente da Einstein.

elettromagnetiche solo energie discrete, senza proporre una reinterpretazione della teoria di Maxwell che colleghi i quanti al formalismo maxwelliano.[40] E' peraltro possibile una lettura moderna della derivazione di Debye che utilizza la quantizzazione del campo elettromagnetico. Le energie possibili per il modo di frequenza ν sono, come è noto, $(1/2)h\nu + nh\nu$. Pertanto, se si tenesse conto dell'energia di punto zero del campo elettromagnetico, non solo non si ritroverebbe la formula di Planck, ma si perverrebbe al risultato che l'energia totale emessa dal corpo nero diventa infinita. In realtà l'energia di punto zero del campo elettromagnetico è un'energia che il campo elettromagnetico non può fornire, perchè corrisponde al suo stato fondamentale. La rilettura moderna della derivazione di Debye è quindi legittima.[41]

E veniamo ora alle derivazioni della formula di Planck che si ritrovano nei libri di testo. Esse coprono, in sostanza, tutte le variazioni possibili. Troviamo infatti riproposta la derivazione originale di Planck, senza che ne siano messe in rilievo le contraddizioni evidenziate da Einstein. Non solo: il conteggio del valore medio dell'energia dell'oscillatore viene tranquillamente effettuato ignorando, senza alcun commento, l'energia di punto zero.[42]

Ci sono poi deduzioni che ricalcano quella di Debye, senza tuttavia metterne in luce i problemi concettuali. Ci sono infine trattazioni che si rifanno alle procedure di Bose e di Einstein. In generale, (e non casualmente), queste sono le più rigorose.

[40] Tale connessione si ottiene ponendo la densità di energia del campo elettromagnetico alla frequenza ν uguale a $Nh\nu$ ove N è il numero di fotoni di frequenza ν per unità di volume.

[41] La derivazione originale di Debye corrisponde infatti alla situazione in cui si trascura l'energia di punto zero del campo elettromagnetico. Tale energia crea comunque problemi concettuali all'interno della elettrodinamica quantistica. Essa comporta infatti che l'energia del campo elettromagnetico sia infinita. D'altro lato, l'energia di punto zero del campo elettromagnetico viene utilizzata per spiegare fenomeni quali le transizioni elettroniche spontanee negli atomi, lo "shift di Lamb" ed il valore del momento magnetico dell'elettrone. Tuttavia, se si assume la ragionevole posizione secondo la quale non tutte le entità teoriche di una teoria hanno corrispondenza nella realtà (anche quando, come in questo caso, alcune sue implicazioni sono osservabili), il problema perde almeno uno dei suoi aspetti più fastidiosi.

[42] Anche l'energia di punto zero degli oscillatori materiali non può essere ceduta: è quindi legittimo trascurarla nel contesto che stiamo discutendo.