

Il modello dell'atomo di idrogeno di Bohr *

Giuseppe Giuliani

Dipartimento di Fisica "Volta", Università di Pavia

In questo scritto viene illustrato e discusso il primo dei tre articoli di Bohr pubblicati nel 1913 riguardanti la struttura degli atomi e delle molecole. ¹ Non verrà invece trattata la fase di elaborazione delle idee che hanno condotto alla pubblicazione dei tre articoli. Chi volesse approfondire questo argomento può consultare la parte relativa del libro di Tagliaferri. ²

L'articolo è composto da una introduzione e da cinque paragrafi: considerazioni generali, emissione di spettri di righe, continuazione delle considerazioni generali, assorbimento della radiazione, lo stato permanente ³ di un sistema atomico.

L'Introduzione

Nell'introduzione Bohr confronta due modelli di atomo: quello di Thomson e quello di Rutherford. Il modello di Thomson presenta due caratteristiche che sono assenti in quello di Rutherford: orbite elettroniche stabili e la presenza di una grandezza, il raggio della sfera di carica positiva, che determina le dimensioni dell'atomo. Tuttavia, scrive Bohr,

“Il modo di considerare questo problema ha subito profondi cambiamenti negli ultimi anni grazie allo sviluppo della teoria dell'irraggiamento dell'energia ed all'affermazione delle nuove ipotesi introdotte in questa teoria, dovuta ad esperimenti riguardanti fenomeni molto diversi come i calori specifici, l'effetto fotoelettrico, i raggi Röntgen, ecc.. Il risultato della discussione intorno a questi temi pare essere un generale riconoscimento dell'inadeguatezza della descrizione fornita dalla elettrodinamica classica del comportamento di sistemi di dimensioni atomiche. [†] Qualunque siano le modificazioni da apportare alle leggi del moto degli elettroni, sembra necessario introdurre nelle leggi in questione una quantità sconosciuta alla elettrodinamica classica, cioè la costante di Planck, o, come viene spesso chiamata, il quanto

* Questo articolo è stato pubblicato per la prima volta in: “Atomo ed energia”, pp. 21-31, Pordenone, 1987.

¹ N. Bohr, “On the Constitution of Atoms and Molecules”, *Phil. Mag.*, **26**, 1 (1913). Una traduzione italiana dell'articolo si trova in: N. Bohr, “*Teoria dell'atomo e conoscenza umana*”, Boringhieri, 1961.

² G. Tagliaferri, “*Storia della Fisica Quantistica*”, 161-179, Angeli, 1986.

³ Bohr chiama così quello che noi oggi chiamiamo stato fondamentale dell'atomo.

[†] Si veda per esempio: “*Théorie du Rayonnement et les Quanta*”, Atti del Primo Congresso Solvay (1911), Parigi, 1912.

elementare di azione. Con l'introduzione di questa costante la questione della configurazione stabile degli elettroni negli atomi è essenzialmente mutata, in quantoché questa costante è di dimensioni e grandezza tali che essa, insieme alla massa ed alla carica delle particelle, può determinare una lunghezza dell'ordine di grandezza richiesto."

Questo passo dell'introduzione riflette chiaramente la situazione che Bohr aveva di fronte: il modello di Rutherford, nonostante fosse promettente (*"Grande interesse viene attribuito a questo modello di atomo"*), presentava difficoltà e difetti che avrebbero potuto essere superati solo introducendo nelle leggi del moto degli elettroni la costante di Planck. Come ciò sia possibile, verrà mostrato da Bohr nel primo paragrafo.

Il primo paragrafo: *Considerazioni generali*

Questo paragrafo inizia così :

"L'inadeguatezza della elettrodinamica classica nello spiegare le proprietà degli atomi dal punto di vista di un modello alla Rutherford, apparirà chiaramente se consideriamo un sistema semplice costituito da un nucleo carico positivamente di dimensioni molto piccole e da un elettrone che descrive orbite chiuse intorno ad esso. Per semplicità assumiamo che la massa dell'elettrone sia trascurabile rispetto a quella del nucleo e, inoltre, che la velocità dell'elettrone sia piccola rispetto a quella della luce.

Assumiamo inizialmente che non ci sia irraggiamento di energia. In questo caso l'elettrone descriverà orbite stazionarie ellittiche. La frequenza di rivoluzione ω e l'asse maggiore dell'orbita $2a$ dipenderà dalla quantità di energia W che deve essere fornita al sistema per portare l'elettrone a distanza infinita dal nucleo. Indicando la carica dell'elettrone e del nucleo con $-e$ ed E rispettivamente e la massa dell'elettrone con m , otteniamo

$$\omega = \frac{2^{\frac{1}{2}} W^{\frac{3}{2}}}{\pi e E m^{\frac{1}{2}}}, \quad 2a = \frac{eE}{W} \quad (1)$$

Inoltre, si può facilmente mostrare che il valore medio dell'energia cinetica calcolato su di un'intera rivoluzione è uguale a W . Se il valore di W non è dato, non ci saranno valori di ω e di a caratteristici del sistema."

Le equazioni (1) sono quelle del moto kepleriano relative ad orbite chiuse: l'energia W è l'energia di ionizzazione dell'atomo (uguale all'energia cinetica media dell'elettrone) e quindi rappresenta, a meno del segno, l'energia totale (cinetica + potenziale)

dell'elettrone nell'orbita stazionaria considerata (l'energia potenziale media è uguale a $-2W$); ω è la frequenza di rivoluzione dell'elettrone (non la velocità angolare). E' infine opportuno notare come Bohr consideri orbite ellittiche e non circolari. Egli prenderà in considerazione orbite circolari solo alla fine del terzo paragrafo per mostrare come, in questo caso specifico, la sua condizione di quantizzazione, che esamineremo tra poco, assuma una forma particolare (che è poi quella nota della quantizzazione del momento angolare dell'elettrone) e nell'ultimo paragrafo (per trattare lo stato permanente di sistemi atomici con più elettroni). Dalle equazioni (1) appare inoltre che l'energia dell'elettrone nell'orbita stazionaria dipende solo dal semiasse maggiore dell'orbita: esistono quindi infinite orbite aventi tutte la stessa energia. Osserviamo infine che l'assunzione iniziale (*... che non ci sia irraggiamento*) è necessaria per avere l'elettrone su orbite stazionarie (come Bohr ricorderà tra poco) e rappresenta la prima intenzionale violazione delle leggi della elettrodinamica classica.

A questo punto Bohr osserva che se si tiene conto dell'irraggiamento di energia da parte dell'elettrone (come previsto dalla elettrodinamica per una carica elettrica accelerata) l'elettrone non descrive più orbite stazionarie: la sua energia cinetica W continuerà ad aumentare, l'energia totale dell'elettrone $-W$ a diminuire finché le dimensioni dell'orbita dell'elettrone diventano dello stesso ordine di grandezza di quelle dell'elettrone stesso o del nucleo. Un semplice calcolo mostra che l'energia irraggiata sarebbe enormemente più grande di quella emessa normalmente dagli atomi. ⁴

“E' ovvio che il comportamento di questo sistema sarà molto differente da quello di un sistema atomico che si incontra in natura. In primo luogo, gli atomi nel loro stato permanente sembrano avere dimensioni e frequenze assolutamente fisse. Inoltre, se noi consideriamo un qualsiasi processo molecolare, il risultato costante sembra che dopo l'emissione di una certa quantità di energia caratteristica del sistema, il sistema ritorni in uno stato stabile di equilibrio, in cui le distanze delle particelle sono dello stesso ordine di grandezza di prima del processo. Ora il punto essenziale nella teoria della radiazione di Planck è che l'irraggiamento di energia da parte di un sistema atomico non avviene nel modo continuo assunto dall'ordinaria elettrodinamica, ma che, al contrario, si verifica attraverso emissioni distintamente separate, la quantità di energia irraggiata da un oscillatore atomico di fre-

⁴ Bohr non esegue questo calcolo: esso, sulla base della seconda delle equazioni (1) è immediato. Assumendo che le dimensioni del nucleo o dell'elettrone siano dell'ordine di 10^{-13} cm e quelle dell'orbita elettronica di 10^{-8} cm si ottiene che l'energia irraggiata, nel caso dell'atomo di idrogeno, è di circa 7.2×10^5 eV mentre l'energia emessa dall'atomo di idrogeno durante una transizione elettronica è dell'ordine di $1 \div 10$ eV.

quenza ν in una singola emissione essendo uguale a $\tau h\nu$, dove τ è un numero intero ed h una costante universale.”

Bohr assume ora che un elettrone si trovi ad una distanza molto grande dal nucleo ed abbia, rispetto a questo, velocità trascurabile; assume inoltre che l’elettrone, a causa dell’interazione con il nucleo, si vada a collocare su di un’orbita stazionaria.

“Assumiamo ora che, durante il processo di legame dell’elettrone, sia emessa una radiazione omogenea di frequenza uguale a metà della frequenza di rivoluzione dell’elettrone nell’orbita finale; allora, dalla teoria di Planck, noi ci potremmo aspettare che la quantità di energia emessa dal processo considerato sia uguale a $\tau h\nu$, dove h è la costante di Planck e τ un numero intero.”

E’ questa la condizione di quantizzazione cui ci riferivamo prima. Essa sostituisce la descrizione classica del processo di cattura dell’elettrone da parte del nucleo. E’ importante inoltre osservare che l’ipotesi secondo cui $\nu = \frac{1}{2}\omega$ è arbitraria, anche se Bohr si sforza di renderla plausibile (“...*poiché la frequenza di rivoluzione dell’elettrone all’inizio dell’emissione è zero*”).⁵ Si noti inoltre l’assunzione secondo cui l’energia emessa durante il processo di cattura sia, in generale, costituita da più di un quanto di energia. Un’ultima osservazione: la distinzione della frequenza della radiazione emessa durante il processo di cattura dalla frequenza di rivoluzione dell’elettrone rappresenta una novità essenziale rispetto a precedenti ipotesi di quantizzazione dell’energia dell’elettrone (Haas, Nicholson) e, come vedremo più avanti, verrà ulteriormente precisata da Bohr. Tuttavia, in questo articolo, ed in tutta la elaborazione di Bohr relativa alla struttura degli atomi, le frequenze di emissione quantistiche sono sempre in qualche modo correlate alle frequenze di rivoluzione degli elettroni (si veda più avanti).

“Ponendo

$$W = \tau h \frac{1}{2} \omega \quad (2)$$

noi otteniamo con l’aiuto della formula (1)

$$W = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^2 h^2}, \quad \omega = \frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^3 h^3}, \quad 2a = \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 m e E} \quad (3)$$

Se noi attribuiamo diversi valori a τ , otteniamo una serie di valori per W , ω , ed a , corrispondenti ad una serie di configurazioni del sistema. In accordo con le considerazioni svolte sopra, noi siamo indotti ad assumere che queste

⁵ Bohr intende dire che è ragionevole assumere che la frequenza della radiazione emessa sia la media aritmetica di quella di rivoluzione dell’elettrone prima e dopo dell’emissione.

configurazioni corrispondono a stati del sistema in cui non c'è irraggiamento di energia; stati che conseguentemente saranno stazionari finché il sistema non sarà disturbato dall'esterno....Ponendo in queste espressioni $\tau = 1$, ed $E = e$, ed introducendo i valori sperimentali

$$e = 4.7 \times 10^{-10}, \quad e/m = 5.31 \times 10^{17}, \quad h = 6.5 \times 10^{-27}$$

otteniamo

$$2a = 1.1 \times 10^{-8} cm, \quad \omega = 6.2 \times 10^{15} sec^{-1}, \quad \frac{W}{e} = 13 V$$

Vediamo che questi valori sono dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni lineari degli atomi, delle frequenze ottiche e dei potenziali di ionizzazione.”

Le (3) sono le relazioni che risolvono il problema della determinazione delle caratteristiche degli stati stazionari: esse ci forniscono infatti l'energia ed il semiasse maggiore dell'orbita, nonché la frequenza di rivoluzione dell'elettrone. Tuttavia, per il momento Bohr si limita a ricavarne ordini di grandezza mentre, come vedremo fra poco, da esse si può ovviamente dedurre molto di più.

Dopo aver osservato come le condizioni di quantizzazione di Nicholson (del tipo $\tau h \omega$, dove al solito ω rappresenta la frequenza di rivoluzione dell'elettrone) non consentono di costruire un modello coerente (perché si continua ad identificare la frequenza della radiazione emessa con quella dell'elettrone rotante), né permettono di rendere conto delle leggi empiriche di Balmer e Rydberg relative agli spettri di emissione di righe degli elementi, Bohr scrive:

“Si tenterà ora di mostrare che queste difficoltà scompaiono se noi affrontiamo i problemi dal punto di vista assunto in questo articolo. Prima di procedere potrebbe risultare utile riesporre brevemente le idee che caratterizzano i calcoli che portano alle equazioni (3). Le principali assunzioni usate sono:

- (1) che l'equilibrio dinamico di sistemi negli stati stazionari possa essere discusso con l'ausilio della meccanica ordinaria, mentre il passaggio dei sistemi tra stati stazionari differenti non possa essere trattato su questa base.
- (2) Che quest'ultimo processo è seguito dalla emissione di radiazione *omogenea*, per la quale la relazione tra la frequenza e la quantità di energia emessa è quella fornita dalla teoria di Planck. La prima assunzione sembra

presentarsi da sola; perché è noto che la meccanica ordinaria non può avere validità assoluta, ma varrà solo per calcoli di certi valori medi del moto degli elettroni....La seconda assunzione è in ovvio contrasto con le idee ordinarie dell'elettrodinamica, ma essa appare necessaria per rendere conto dei fatti sperimentali.”

Bohr esce allo scoperto. Riformula infatti due delle assunzioni già esplicitamente fatte all'interno del discorso svolto sinora conferendo loro l'aspetto di postulati. Tuttavia, Bohr cerca di conferire al primo postulato una caratteristica di autoevidenza che esso non possiede. E' infatti legittimo porre dei limiti di applicazione ad una teoria. Tuttavia, di solito, questi limiti o sono esplicitamente contenuti nella teoria o sono suggeriti dall'osservazione sperimentale. Le limitazioni che il modello di Bohr nel suo complesso pone all'applicabilità della fisica classica sono suggerite dall'esigenza di trovare un accordo con i dati sperimentali ma vengono poste non come definizione del campo di applicabilità della fisica classica, ma come sue modificazioni, ponendo così seri problemi di coerenza interna.

Il secondo paragrafo: *L'emissione di spettri di righe*

Bohr affronta ora il problema dello spettro dell'atomo di idrogeno.

“Se noi poniamo nella (3) $E = e$, otteniamo per la quantità totale di energia irradiata durante la formazione di uno stato stazionario,

$$W_{\tau} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \tau^2}$$

La quantità di energia emessa durante il passaggio del sistema dallo stato corrispondente a $\tau = \tau_1$ a quello corrispondente a $\tau = \tau_2$, è di conseguenza

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

Se ora noi supponiamo che la radiazione in questione sia omogenea e che la quantità di energia emessa sia uguale ad $h\nu$, dove ν è la frequenza della radiazione, otteniamo

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = h\nu$$

e da questa

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) \quad (4)$$

Vediamo che questa espressione rende conto della legge che connette le righe nello spettro dell'idrogeno. Se poniamo $\tau_2 = 2$ e lasciamo che τ_1 vari, otteniamo la ordinaria serie di Balmer. Se poniamo $\tau_2 = 3$, otteniamo la serie

nell'infrarosso osservata da Paschen e precedentemente ipotizzata da Ritz. Se poniamo $\tau_2 = 1$ e $\tau_2 = 4, 5, \dots$, otteniamo serie rispettivamente nell'estremo ultravioletto e nell'estremo infrarosso, che non sono state osservate, ma la cui esistenza può essere prevista.

L'accordo in questione è quantitativo oltre che qualitativo, Ponendo

$$e = 4.7 \times 10^{-10}, \quad e/m = 5.31 \times 10^{17}, \quad e \quad h = 6.5 \times 10^{-27}$$

otteniamo

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = 3.1 \times 10^{15}$$

Il valore osservato per il fattore al di fuori delle parentesi nella formula (4) è

$$3.290 \times 10^{15}$$

L'accordo tra il valore teorico e quello sperimentale è all'interno dell'incertezza dovuta agli errori sperimentali nelle costanti che entrano nell'espressione del valore teorico.”

Per arrivare a questo risultato Bohr assume che l'energia emessa durante il passaggio da uno stato stazionario ad un altro consista di un solo quanto $h\nu$, modifica cioè l'ipotesi che ha condotto alla relazione (2) (questa ipotesi prevedeva che durante la formazione di uno stato stazionario l'energia irradiata fosse pari a $\tau h\nu$). D'altra parte la (2) è essenziale per arrivare alle (3). Si pone pertanto il problema di dare alla (2) un diverso fondamento. Bohr affronterà questo argomento nel paragrafo terzo. Bohr conclude il secondo paragrafo osservando come

“...in questo modo noi non otteniamo altre serie di righe, generalmente attribuite all'idrogeno; per esempio, la serie osservata per primo da Pickering nello spettro della stella ζ Puppis e l'insieme di serie recentemente scoperto da Fowler con esperimenti con tubi a vuoto contenenti una miscela di idrogeno e di elio. Tuttavia, con l'aiuto della nostra teoria, noi vedremo che è possibile rendere conto in modo naturale di queste serie se le attribuiamo all'elio.”

Bohr procede quindi a mostrare quanto affermato supponendo che le serie in questione siano dovute allo ione He^+ . Come si può vedere leggendo il resoconto di Tagliaferri, ⁶ il problema dell'attribuzione delle serie di righe in questione non si risolse immediatamente: ma alla fine la correttezza della tesi di Bohr fu riconosciuta contribuendo così a

⁶ G. Tagliaferri, op. cit., 188-191.

favorire l'accettazione delle idee portanti del modello di Bohr. La chiusura del paragrafo avviene con una breve discussione degli “*spettri di altre sostanze*” in cui Bohr mostra come la sua teoria possa spiegare il fatto che nella generalizzazione della legge di Rydberg dovuta a Ritz ed usata per descrivere le serie di righe di un atomo con più elettroni compaia ancora il fattore della (4) fuori parentesi.

Prima di lasciare questo paragrafo sono opportune due ulteriori osservazioni. Bohr non cita neppure il fatto, noto da tempo, che alcune righe della serie di Balmer erano state osservate come composte da due righe molto vicine. E' questo un caso emblematico dell'atteggiamento che gli scienziati assumono quando si tratta di confrontare le previsioni di una teoria con l'esperimento. Al di là del problema della accettabilità delle discrepanze quantitative tra valori previsti ed osservati, spesso si presenta, come in questo caso, una situazione in cui non c'è accordo qualitativo (una riga prevista rispetto alle due osservate). E' probabile che Bohr considerasse questa discrepanza come superabile attraverso un raffinamento della teoria. Rimane tuttavia il fatto che un accenno al problema sarebbe stato metodologicamente opportuno.

La seconda osservazione riguarda le potenzialità predittive della teoria di Bohr: l'indicazione dell'esistenza di serie di righe non ancora osservate, nonché quella relativa allo spettro dell'elio (con la connessa diversa spiegazione di dati già noti).

Il terzo paragrafo: *Continuazione delle considerazioni generali*

Questo paragrafo è interamente dedicato alla riformulazione della condizione (2), necessaria per ricavare la (3) e la (4) ed ottenuta con una ipotesi ($W = \tau h\nu$) poi abbandonata all'interno della discussione dello spettro dell'atomo di idrogeno (dove Bohr ha assunto che l'energia emessa durante il passaggio di un elettrone tra due stati stazionari consista di un solo quanto). Bohr scrive:

“Ulteriori informazioni sulla frequenza della radiazione possono essere ottenute confrontando i calcoli dell'irraggiamento dell'energia nella regione delle vibrazioni lente svolti sulla base delle nostre assunzioni con quelli effettuati con la meccanica ordinaria. Come è noto, calcoli effettuati con la meccanica ordinaria sono in accordo con gli esperimenti sull'irraggiamento dell'energia nella regione delle vibrazioni lente.” ⁷

Bohr assume, invece della (2), la relazione seguente: $W = f(\tau)h\nu$. Ottiene quindi al posto

⁷ Bohr si riferisce qui al fatto che, per quanto riguarda la radiazione emessa da un corpo nero, la teoria classica fornisce, per frequenze sufficientemente basse, valori che approssimano quelli previsti dalla teoria di Planck.

delle (3) le relazioni seguenti:

$$W = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 h^2 f^2(\tau)}, \quad \omega = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 h^3 f^3(\tau)}$$

ed al posto della (4), la relazione

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 h^3} \left(\frac{1}{f^2(\tau_2)} - \frac{1}{f^2(\tau_1)} \right)$$

“Vediamo che per ottenere una espressione della stessa forma della serie di Balmer dobbiamo porre $f(\tau) = c\tau$.”

Per determinare c Bohr procede nel seguente modo. Considera due stati stazionari corrispondenti ai valori N ed $N - 1$ di τ , . La frequenza emessa durante la transizione tra questi due stati, calcolata alla Bohr, è data da:

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^2 h^3} \frac{2N - 1}{N^2(N - 1)^2}$$

D’ altra parte la frequenza di rivoluzione dell’elettrone sull’orbita N -esima e su quella $(N-1)$ -esima sono date da:

$$\omega_N = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^3 h^3 N^3}, \quad \omega_{N-1} = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^3 h^3 (N - 1)^3}$$

“Se N è grande il rapporto tra la frequenza prima e dopo l’emissione sarà molto prossimo ad 1; e secondo la elettrodinamica ordinaria noi ci dovremmo pertanto aspettare che il rapporto tra la frequenza della radiazione e la frequenza di rivoluzione sia pure molto prossimo ad 1. Questa condizione sarà soddisfatta solo se $c = \frac{1}{2}$. Ponendo $f(\tau) = \frac{\tau}{2}$, tuttavia, noi perveniamo ancora all’equazione (2) e conseguentemente all’espressione (3) per gli stati stazionari.

Se consideriamo il passaggio dei sistemi tra due stati corrispondenti a $\tau = N$ ed a $\tau = N - n$, dove n è piccolo rispetto a N , otteniamo con la stessa approssimazione usata sopra, ponendo $f(\tau) = \frac{\tau}{2}$,

$$\nu = n\omega$$

La possibilità di emissione di una radiazione di tale frequenza può pure essere interpretata per analogia con la elettrodinamica ordinaria, come se un elettrone rotante intorno ad un nucleo in un’orbita ellittica emettesse una radiazione che, secondo il teorema di Fourier, può essere risolta in componenti omogenee, le cui frequenze siano $n\omega$, se ω è la frequenza di rivoluzione dell’elettrone.

Siamo pertanto condotti ad assumere che l'interpretazione dell'equazione (2) non è che stati stazionari differenti corrispondono all'emissione di un numero differente di quanti di energia, ma che la frequenza dell'energia emessa durante il passaggio del sistema da uno stato in cui non viene irradiata energia ad uno dei differenti stati stazionari, è uguale a multipli differenti di $\frac{\omega}{2}$, dove ω è la frequenza di rivoluzione dell'elettrone nello stato considerato. Da questa assunzione noi otteniamo esattamente le stesse espressioni di prima per gli stati stazionari, e da queste, con l'ausilio delle principali assunzioni del primo paragrafo, la stessa espressione per la legge dello spettro dell'idrogeno. Di conseguenza, possiamo considerare le riflessioni preliminari del primo paragrafo come una forma semplice di presentare i risultati della teoria.

Prima di abbandonare questa discussione, torneremo per un momento sulla questione del significato dell'accordo tra i valori osservati e calcolati della costante che entra nelle espressioni (4) per la serie di Balmer dello spettro dell'idrogeno. Dalle considerazioni svolte sopra ne consegue che, prendendo come punto di partenza l'espressione della legge dello spettro dell'idrogeno ed assumendo che le differenti righe corrispondono a radiazione omogenea emessa durante il passaggio tra stati stazionari differenti, arriveremo esattamente alla stessa espressione per la costante in questione data dalla (4), se solo assumiamo che la frequenza della radiazione coincida con la frequenza di rivoluzione dell'elettrone nella regione delle vibrazioni lente.

Siccome tutte le assunzioni usate in questo ultimo modo di presentare la teoria sono di natura che potremmo chiamare qualitativa, noi siamo giustificati nel prevedere - se l'intera teoria è corretta - un accordo assoluto tra i valori calcolati ed osservati per la costante in questione, e non un semplice accordo approssimato. La formula (4) può pertanto essere usata nella discussione dei risultati delle determinazioni sperimentali delle costanti e , m ed h .

Mentre ovviamente non si può porre la questione di un fondamento meccanico dei calcoli svolti in questo articolo, è tuttavia possibile fornire una interpretazione molto semplice del calcolo del primo paragrafo con l'ausilio di simboli presi dalla meccanica ordinaria. Designando il momento angolare dell'elettrone intorno al nucleo con M , otteniamo immediatamente per un'orbita circolare $M = \frac{T}{\omega\pi}$, dove ω è la frequenza di rivoluzione e T l'energia

cinetica dell'elettrone; per un'orbita circolare abbiamo inoltre che $T = W$ e dalla (2) otteniamo di conseguenza

$$M = \tau M_0$$

dove

$$M_0 = \frac{h}{2\pi} = 1.04 \times 10^{-27}$$

Se peraltro assumiamo che l'orbita dell'elettrone negli stati stazionari sia circolare, il risultato del calcolo del primo paragrafo può essere espresso dalla semplice condizione: il momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo in uno stato stazionario del sistema è uguale ad un multiplo intero di un valore universale, indipendente dalla carica del nucleo."

Se il secondo paragrafo era importante perchè in esso si confrontavano teoria ed esperimento, il terzo, con questa lucida discussione delle basi concettuali delle assunzioni fatte, non lo è meno. Alcune osservazioni:

a) La condizione di quantizzazione (2) viene ora ricavata partendo dall'assunzione che esista una relazione generale tra l'energia W dello stato stazionario e la corrispondente frequenza di rivoluzione dell'elettrone: $W = f(\tau)h\omega$. Si dimostra poi che per ottenere la legge di Balmer deve essere $f(\tau) = c\tau$. Si trova infine il valore $\frac{1}{2}$ per c imponendo che per grandi valori di τ la frequenza di emissione calcolata e relativa alla transizione tra due stati stazionari contigui coincida approssimativamente con quella di rotazione dell'elettrone nei due stati. Se ora aggiungiamo l'ipotesi che l'energia emessa durante una transizione qualsiasi è costituita da un solo quanto, abbiamo definito i postulati che stanno alla base del modello di Bohr. E' interessante rilevare come questo insieme di postulati differisca da quello iniziale, nonché da quello ora normalmente presentato nei libri di testo. Per maggiore chiarezza:

POSTULATI INIZIALI (A)

A1 - Esistono orbite stazionarie determinate dalle condizioni di quantizzazione $W = \tau h \frac{1}{2} \omega$.

A2 - Le grandezze fisiche delle orbite stazionarie sono correlate dalle leggi della meccanica classica.

A3 - Il passaggio da un'orbita stazionaria ad

un'altra è accompagnato dall'emissione di una radiazione omogenea di frequenza $\nu = \frac{W_{\tau_2} - W_{\tau_1}}{h}$

POSTULATI RIFORMULATI (B)

B1 - Esistono orbite stazionarie determinate dall'assunzione della legge di Balmer e dalla condizione al limite delle basse frequenze

B2 - Come A2

B3 - Come A3

PRESENTAZIONE

MODERNA (C)

C1 - Esistono orbite stazionarie determinate dalle condizioni di quantizzazione del momento angolare

C2 - Come A2

C3 - Come A3

Sottolineato ancora una volta che i tre insiemi di postulati differiscono solo per le condizioni di quantizzazione, osserviamo come la scelta di Bohr, una volta scartato **A** per la sua incoerenza interna, sia caduta ragionevolmente su **B**. Infatti: la condizione di quantizzazione di **B** è più generale di quella di **C** perché applicabile ad orbite ellittiche; essa inoltre si basa sulla condizione che, nel limite di basse frequenze, ci sia un accordo approssimato tra calcolo quantistico e classico. D'altra parte la condizione di quantizzazione del momento angolare non solo era applicabile solo ad orbite circolari ma non presentava alcun raccordo con la fisica classica;

b) appare chiaramente fin da questo primo articolo una caratteristica costante dell'approccio di Bohr. Mentre da un lato Bohr distingue la frequenza di emissione da quella di rotazione dell'elettrone, egli mantiene un rapporto tra le due. Verso la fine degli anni dieci tale rapporto costituirà l'asse portante del principio di corrispondenza.

Il quarto paragrafo: *L'assorbimento della radiazione*

Bohr mostra come, sulla base del suo modello, possano essere spiegate le caratteristiche qualitative dei processi di assorbimento della radiazione.

“Per rendere conto della legge di Kirchhoff è necessario introdurre delle assunzioni relative al meccanismo di assorbimento della radiazione che corrispondano a quelle che abbiamo usato nel trattare l'emissione. Dobbiamo pertanto assumere che un sistema costituito da un nucleo e da un elettrone rotante intorno ad esso, in certe circostanze, può assorbire una radiazione di una frequenza uguale alla frequenza della radiazione omogenea emessa durante il passaggio del sistema tra due stati stazionari.”

Bohr passa quindi in rassegna alcuni dati sperimentali e li spiega sulla base del suo modello:

- l'idrogeno gassoso in condizioni ordinarie non assorbe le radiazioni corrispondenti alle righe del suo spettro di emissione (si ricordi che erano allora note solo le serie di Balmer e di Paschen corrispondenti a transizioni da stati eccitati agli stati con $\tau_2 = 2$ e $\tau_2 = 3$, rispettivamente)

- ionizzazione di atomi con luce ultravioletta e con raggi Röntgen:

“Ovvvviamente noi ritroviamo in questo modo un'espressione per l'energia cinetica di un elettrone strappato ad un atomo mediante effetto fotoelettrico uguale a quella dedotta da Einstein, i.e. $T = h\nu - W$, dove T è l'energia cinetica dell'elettrone emesso, e W è l'energia totale emessa durante il processo originale di cattura dell'elettrone.”

- l'assorbimento continuo di radiazione osservato nel sodio e che “... *inizia in testa alla serie [principale] e che si estende sino all'estremo ultravioletto*”

- la non comparsa di righe di emissione nell'idrogeno e nel sodio gassosi quando la pressione del gas è troppo elevata

- lo spettro a righe osservato nei raggi Röntgen

- la possibilità che elettroni veloci, in un processo d'urto con elettroni legati, perdano energia solo per distinti quanti finiti.

Bohr conclude quindi il paragrafo così :

“Non è necessario sottolineare il carattere preliminare ed ipotetico delle considerazioni sopra svolte. L'intenzione, tuttavia, è stata quella di mostrare che la generalizzazione delineata della teoria degli stati stazionari può fornire una semplice base per rappresentare un insieme di fatti sperimentali che non possono essere spiegati con l'elettrodinamica ordinaria, e che le assunzioni

usate non sembrano inconsistenti con esperimenti su fenomeni per i quali una spiegazione soddisfacente è stata fornita dalla dinamica classica e dalla teoria ondulatoria della luce.”

Non è forse necessario sottolineare la cautela con cui Bohr commenta l'intera impostazione del paragrafo. Questa cautela è verosimilmente dovuta da un lato al fatto che la trattazione dei processi di assorbimento della radiazione è solo qualitativa e dall'altro alle novità concettuali introdotte.⁸

Il quinto paragrafo: *Lo stato permanente di un sistema atomico*

Bohr cerca di estendere la sua trattazione ad atomi con più di un elettrone per determinarne lo stato permanente. Bohr considera due casi. Nel primo caso suppone che tutti gli elettroni si dispongano su di una circonferenza centrata sul nucleo, siano equidistanti tra loro ed abbiano ovviamente la stessa frequenza di rotazione. In questo caso, trascurando le forze elettromagnetiche dovute al moto degli elettroni e facendo assunzioni analoghe a quelle fatte per l'atomo di idrogeno, si ritrova che, nello stato permanente il momento angolare di ogni elettrone è uguale a $\frac{h}{2\pi}$. (Le assunzioni sono: che il sistema di n elettroni rotanti su di una circonferenza intorno al nucleo si formi in modo analogo a quello assunto per un sistema costituito da un singolo elettrone rotante intorno ad un nucleo; che durante la formazione del sistema gli elettroni si trovino sempre su circonferenze centrate sul nucleo e rimangano equidistanti tra loro; che esistano stati stazionari nei quali l'energia cinetica per elettrone sia uguale a $\tau h \frac{1}{2}\omega$). Ne segue che anche nel caso considerato l'energia massima emessa durante la formazione del sistema è quella corrispondente a $\tau = 1$. Ne segue infine che il momento angolare di ogni elettrone nello stato permanente (assunto essere quello per cui $\tau = 1$) è uguale a $\frac{h}{2\pi}$.

Nel secondo caso Bohr considera un insieme qualunque di nuclei e di elettroni in cui i nuclei siano fermi l'uno rispetto all'altro e gli elettroni si muovano su orbite circolari con velocità piccole rispetto a quelle della luce. In questo caso si può dimostrare che

“...l'energia cinetica sarà numericamente equivalente a metà dell'energia potenziale. Con l'aiuto di questo teorema otteniamo che ...la quantità di energia emessa durante la formazione del sistema...è uguale all'energia cinetica degli elettroni nella configurazione finale.”

Proseguendo poi con le solite assunzioni, si perviene al risultato per cui:

⁸ Novità rispetto alla fisica classica; rispetto alla teoria di Bohr esposta nei primi paragrafi le idee contenute nel quarto paragrafo sono solo delle coerenti applicazioni.

“In ogni sistema molecolare costituito da nuclei positivi e da elettroni in cui i nuclei sono fermi l’uno rispetto agli altri e gli elettroni si muovono su orbite circolari, il momento angolare di ogni elettrone rispetto al centro della propria orbita sarà, nello stato permanente del sistema, uguale a $\frac{h}{2\pi}$ ove h è la costante di Planck.”

L’articolo finisce praticamente qui.

Considerazioni finali

Tentiamo ora di riassumere alcune osservazioni già fatte completandole con qualche commento aggiuntivo.

L’articolo si presenta con una struttura complessa dovuta al fatto che argomenti fondamentali quali quelli della condizione di quantizzazione o del sistema di postulati vengono trattati più di una volta con approcci diversi. C’è poi un uso articolato dell’approssimazione delle orbite circolari. Sulla prima questione ci siamo già soffermati; circa la seconda, è opportuno sottolineare che Bohr fa un uso essenziale dell’approssimazione delle orbite circolari solo nella trattazione dello stato permanente dei sistemi atomici complessi (quinto paragrafo), mentre la trattazione dell’atomo di idrogeno è condotta interamente usando orbite ellittiche.

La mescolanza di elementi concettuali e di leggi della fisica classica con nuove ipotesi incompatibili sia con i primi che con le seconde è tipica, oltre che dell’articolo che stiamo discutendo, di tutta la fisica dei quanti antecedente la formulazione della meccanica ondulatoria di Schrödinger e della meccanica delle matrici di Heisenberg. Tuttavia, per quanto riguarda l’articolo di Bohr, va rilevato come questa tensione fra elementi contraddittori si rifletta anche nella struttura dello scritto e nella gradualità con cui gli elementi di rottura vengono via via introdotti. L’immagine che ne emerge è quella di uno scienziato consapevole della portata innovativa delle proprie idee, ma anche dell’opportunità di presentarle, senza peraltro attenuarne la nettezza, nel modo meno traumatico possibile.

E’ infine opportuno sottolineare come si possano trovare nell’articolo di Bohr spunti per approfondire la riflessione su:

- il ruolo, nello sviluppo della fisica e della scienza in generale, di teorie di transizione caratterizzate dalla convivenza, che pone anche problemi di coerenza interna, di vecchio e di nuovo;
- i significati, i ruoli delle teorie nella scienza, il problema della loro accettazione, del

loro sviluppo, del loro superamento;

- il rapporto tra teoria ed esperimento;

- il significato ed il ruolo dei modelli nella scienza;

- il problema della realtà delle entità usate nelle teorie per rappresentare insiemi di fenomeni. Non pensiamo di aver esaurito l'elenco, né di averlo compilato organicamente: nostra intenzione era solo quella di indicare alcune possibili vie di approfondimento. ⁹

⁹ Per un approfondimento di questi temi si può vedere: H. Brown, *"Perception, Theory and Commitment"*, The University of Chicago Press, 1977. Trad. It.: *"La nuova filosofia della scienza"*, Laterza, 1985.