

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico - critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno.

In quanto il più semplice degli atomi stabili, l'idrogeno permette confronti unici tra esperimenti spettroscopici e teorie fondamentali. La spettroscopia dell'idrogeno ha svolto un ruolo centrale nello sviluppo della meccanica quantica e della fisica atomica. L'interpretazione delle regolarità dello spettro visibile di Balmer dell'idrogeno ha ispirato diverse innovazioni concettuali, da Bohr e la vecchia teoria dei quanti alle teorie di Sommerfeld, de Broglie, Schrödinger e Dirac sino alla scoperta del Lamb-shift e lo sviluppo della moderna elettrodinamica quantica.

Theodor Hänsch

Il modello di Bohr ha svolto un ruolo emblematico nella storia della fisica. Il lavoro del luglio 1913, primo di tre lavori consecutivi pubblicati in quell'anno [1], [2], [3], [4], risente, come avremo modo di vedere, del "contesto della scoperta". Pertanto, presenteremo il modello in forma "razionalizzata", cercando tuttavia di conservare l'impianto concettuale del lavoro originale. Accenneremo poi agli sviluppi successivi sino alla moderna spettroscopia dell'atomo di idrogeno ⁽¹⁾.

1. Il modello "razionalizzato"

L'elettrone è sottoposto al campo elettrico coulombiano del protone; siccome la massa del protone è circa 1836 volte più grande di quella dell'elettrone, è possibile, in prima approssimazione, considerare il moto dell'elettrone in un campo elettrico centrale il cui potenziale è dato da

$$(1) \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}$$

(ciò equivale a supporre infinita la massa del protone); e è la carica del protone. Ignorando, per il momento, che un elettrone accelerato emette radiazioni elettroma-

⁽¹⁾ La citazione che apre questa voce del Glossario costituisce l'incipit di [5]. Theodor Hänsch ha condiviso il premio Nobel per la fisica del 2005 con Roy Glauber e John Hall.

gnetiche, si osserva che il problema è analogo a quello risolto da Newton per il moto dei pianeti intorno al Sole. Quindi, se l'elettrone possiede inizialmente una componente della velocità in direzione perpendicolare alla retta che lo congiunge al centro di attrazione, le orbite possibili sono coniche con il centro di attrazione in uno dei due fuochi. In particolare si ha

- i) un'iperbole se l'energia totale dell'elettrone (potenziale + cinetica) è positiva
- ii) una parabola se l'energia totale dell'elettrone è nulla
- iii) un'ellisse se l'energia totale dell'elettrone è negativa

Lo "stato legato" delle due particelle, cioè l'atomo di idrogeno, corrisponde al caso di orbite ellittiche (iii). Indicata con \mathcal{E} l'energia totale dell'elettrone, si ha

$$(2) \quad \mathcal{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a},$$

dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse. Indicato con l il modulo del suo momento angolare (costante), si ha

$$(3) \quad l^2 = m_e \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2}{a},$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e b il semiasse minore dell'ellisse. Infine

$$(4) \quad \nu_{rot} = \frac{\epsilon_0}{e^2} \sqrt{\frac{32|\mathcal{E}|^3}{m_e}},$$

dove ν_{rot} è la frequenza di rotazione dell'elettrone sull'orbita ⁽²⁾. La (2) mostra che l'energia totale dell'elettrone dipende solo dal semiasse maggiore dell'ellisse; la (3) mostra invece che, fissato a e, quindi, l'energia totale dell'elettrone, il suo momento angolare è direttamente proporzionale al semiasse minore dell'ellisse e diventa massimo quando $b = a$ cioè quando l'ellisse si trasforma in un cerchio.

L'analogia tra il caso gravitazionale e quello dell'atomo di idrogeno si ferma qui: c'è infatti una differenza fondamentale dovuta al fatto che l'elettrone, essendo soggetto ad un moto accelerato, emette radiazioni elettromagnetiche. Ciò significa che, in ogni istante, la derivata temporale dell'energia dell'elettrone è negativa, cioè che l'elettrone non può collocarsi su alcuna delle orbite, chiuse od aperte, sopra considerate: ognuna di esse è infatti caratterizzata da un valore costante dell'energia dell'elettrone. È per questa ragione che modelli atomici di questo tipo, apparsi all'inizio del '900, sono stati rapidamente abbandonati. Bohr ha potuto riprenderli in considerazione solo *assumendo* che esistano orbite ellittiche *stazionarie* tali che, orbitando su di esse, l'elettrone *non* irraggia. Questa assunzione costituisce una consapevole violazione delle leggi dell'elettrodinamica: la convivenza di leggi classiche e di assunzioni incompatibili con queste, costituisce, peraltro, la caratteristica principale dei modelli *ibridi* alla Bohr.

⁽²⁾ Per la trattazione del moto kepleriano si veda, per esempio, [6].

L'ipotesi delle orbite stazionarie per l'elettrone, permette di applicare a queste le proprietà delle orbite ellittiche "gravitazionali": l'energia dell'elettrone su una qualsiasi di queste orbite dipende solo dalla lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse. Ciò significa che esistono infinite orbite stazionarie corrispondenti allo stesso valore dell'energia dell'elettrone: se si è interessati solo all'energia dello stato elettronico, si può scegliere, tra queste, l'orbita circolare. Si può allora procedere enunciando i postulati su cui si basa il modello di Bohr.

P1 Le orbite *possibili* sono determinate applicando le leggi della meccanica newtoniana e dell'elettromagnetismo.

P2 Le orbite *permesse, stazionarie*, sono determinate dalla seguente condizione: il modulo del momento angolare dell'elettrone l in un'orbita *circolare* è un multiplo intero, non nullo, di $\hbar = h/2\pi$, dove h è la costante di Planck ($l = n\hbar$; n è chiamato numero quantico).

P3 Il passaggio da un'orbita stazionaria di energia E_i ad un'altra di energia E_f , comporta l'emissione o l'assorbimento di un quanto di energia $h\nu = |E_i - E_f|$, dove ν è la frequenza della radiazione emessa o assorbita, descritta in termini di onde.

Si noti che la condizione di quantizzazione P2 vale solo per orbite circolari. Tuttavia, individuata un'orbita circolare permessa, sono automaticamente individuate tutte le orbite ellittiche permesse aventi la stessa energia e come semiasse maggiore il raggio dell'orbita circolare; si ricordi tuttavia che, su queste orbite, il momento angolare dell'elettrone è dato dalla (3), cioè varia in funzione del semiasse minore dell'ellisse.

Per determinare le orbite *permesse*, si potranno semplicemente utilizzare le equazioni (3 e 2) applicando la condizione di "quantizzazione" P2. Si ottiene così dalla (3), ponendo in essa $b = a = r$

$$(5) \quad r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e} \hbar^2.$$

I raggi delle orbite permesse sono quindi dati da $r_n = n^2 r_0$, dove

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$$

è il raggio della prima orbita (detto raggio di Bohr), corrispondente al numero quantico $n = 1$. Sostituendo i valori di r_n ad a nella (2), si ottiene

$$(6) \quad \mathcal{E}_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

La (5) e la (6) forniscono, rispettivamente, i raggi delle orbite circolari permesse (o i semiasse maggiori delle ellissi) e le corrispondenti energie totali dell'elettrone.

La frequenza della radiazione emessa durante il passaggio dall'orbita n_i all'orbita n_f , con $n_i > n_f$, è allora data, secondo il postulato P3, da

$$(7) \quad \nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Questa è anche la frequenza della radiazione assorbita durante il passaggio inverso ⁽³⁾.

2. Il contesto della scoperta

L'aspetto più appariscente è costituito dalla condizione di quantizzazione. Infatti, la condizione di quantizzazione P2 appare solo alla fine dell'articolo e non viene usata per alcuna "ricostruzione razionale" del modello ⁽⁴⁾. La condizione di quantizzazione proposta all'inizio è presentata all'interno della descrizione del processo di cattura di un elettrone da parte del protone ⁽⁵⁾. Supponendo che l'energia iniziale dell'elettrone sia trascurabile (e quindi che l'elettrone si trovi molto lontano dal nucleo e quasi in quiete), si suppone che durante il passaggio dell'elettrone dalla condizione iniziale ad un'orbita *stazionaria* l'elettrone emetta energia pari a

$$(8) \quad \tau h \nu = \tau h \left(\frac{1}{2} \nu_{rot} \right),$$

dove τ è un numero intero non nullo e ν_{rot} è la frequenza di rotazione dell'elettrone, data dalla (4), sull'orbita stazionaria in cui si colloca ⁽⁶⁾. Questa condizione permette a Bohr di scrivere che

$$(9) \quad |\mathcal{E}| = \tau h \frac{1}{2} \nu_{rot}.$$

Questa equazione, insieme alla (4), permette di ricavare direttamente la (6) (con τ al posto di n). Supponendo poi che nel passaggio dell'elettrone da uno stato τ_i ad uno stato τ_f (con $\tau_i > \tau_f$) l'atomo emetta un quanto di energia $h\nu$ si ottiene la serie di Balmer (nello spettro visibile) se $\tau_f = 2$; se $\tau_f = 3$ si ottiene la serie di Paschen (nello spettro infrarosso) (fig. 1); per $\tau_f = 1, 4 \dots$ si ottengono altre serie allora non ancora osservate.

⁽³⁾ Tuttavia è possibile sviluppare un calcolo *ab initio* basandosi su orbite circolari. Questa è la procedura usuale seguita nei libri di testo.

⁽⁴⁾ Le ricostruzioni storiche della nascita del modello di Bohr sono molteplici. Anche in rete si trovano diverse pagine (in lingua inglese). Si ricordano, comunque, i testi di Jammer [7] e Tagliaferri [8].

⁽⁵⁾ In realtà Bohr suppone di avere a che fare con un nucleo di carica generica E . Questa generalizzazione permette di applicare il modello anche ad altre configurazioni atomiche; per esempio, ad ioni He^+ , come Bohr farà più avanti nell'articolo.

⁽⁶⁾ Scrive Bohr: "Se assumiamo che la radiazione emessa [durante il processo di cattura] sia omogenea, la (seconda) ipotesi relativa alla frequenza della radiazione si suggerisce da sola, poiché la frequenza di rotazione dell'elettrone all'inizio dell'emissione è zero".

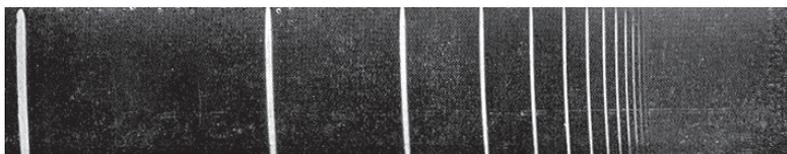


Fig. 1. – La serie di Balmer. Le prime quattro righe, partendo da sinistra, sono la H_α (656.3 nm), H_β (486.1 nm), H_γ (434 nm) e H_δ (410.2 nm), rispettivamente; le lunghezze d'onda diminuiscono da sinistra verso destra. Figura tratta da [9], per gentile concessione di Wiley-VCH Verlag GmbH.

A questo punto Bohr è costretto a rivedere la condizione di quantizzazione. Infatti, la (8), necessaria per ricavare la (6), presuppone l'emissione di τ quanti di energia; mentre l'ipotesi $P3$ necessaria per ottenere le serie spettroscopiche presuppone che nel passaggio tra due stati stazionari sia emesso/assorbito solo un quanto di energia. La soluzione suggerita da Bohr per eliminare questa discrepanza è la seguente. Bohr assume, invece della (9), la relazione

$$(10) \quad |\mathcal{E}| = f(\tau)h\nu_{rot},$$

dove $f(\tau)$ è una funzione da determinare. La (10) conduce, attraverso semplici passaggi, alla

$$(11) \quad \nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{f^2(\tau_f)} - \frac{1}{f^2(\tau_i)} \right)$$

invece che alla (7). Affinché questa equazione abbia la stessa forma della formula di Balmer deve essere $f(\tau) = C\tau$. Per determinare C , Bohr impone che, per alti numeri quantici, la frequenza ν emessa durante la transizione tra due stati adiacenti $\tau = N$ e $\tau = N - 1$, calcolata “alla Bohr”, tenda al valore della frequenza di rotazione ν_{rot} dell'elettrone sulle orbite $\tau = N$ e $\tau = N - 1$. Ottiene così $C = 1/2$, cioè ottiene di nuovo la (9). Si noti, tuttavia, che il risultato così ottenuto, vale, a rigore, solo per alti numeri quantici. Per estendere la sua validità è necessaria una ipotesi *ad hoc*. Bohr, tuttavia, non compie questo passo in modo esplicito (7).

3. Il confronto con l'esperimento

Per la costante che compare nella (7) (che è poi la costante di Rydberg R_∞ (8) moltiplicata per la velocità della luce nel vuoto), Bohr ottiene il valore

$$(12) \quad 3.1 \times 10^{15} \text{ Hz},$$

mentre il valore sperimentale (di origine spettroscopica) era 3.290×10^{15} Hz, con una discrepanza del 6% circa. Il suo commento è significativo: “L'accordo tra il valore teorico e quello sperimentale è all'interno dell'incertezza dovuta agli errori sperimentali

(7) Bohr utilizza qui *ante litteram* una procedura da lui chiamata, qualche anno dopo, *principio di corrispondenza*.

(8) La costante di Rydberg R differisce dalla costante di Rydberg R_∞ perché essa contiene la massa ridotta al posto della massa dell'elettrone.

nelle costanti che entrano nell'espressione del valore teorico." Non abbiamo verificato la veridicità di questa affermazione. Quello che è certo è che la costante $R_\infty c$ calcolata con i valori attualmente adottati per le costanti coinvolte assume il valore $3.289841956965 \times 10^{15}$, assai più vicino al valore sperimentale noto ai tempi di Bohr. Il valore sperimentale attuale è $3.289841960360 \times 10^{15}$ Hz ⁽⁹⁾ [10]. Si noti inoltre come il valore teorico sia minore di quello sperimentale e come, sostituendo alla massa dell'elettrone la sua massa ridotta (come si dovrebbe fare), la discrepanza tra i due valori aumenti: si stanno trascurando (verosimilmente) altri effetti ⁽¹⁰⁾. Come vedremo più avanti (sezione 6.1), questi sono dovuti — se si prescinde dalle correzioni apportate dalla elettrodinamica quantica — a tre fattori: la necessità di usare la dinamica relativistica invece di quella newtoniana; l'esistenza dello spin dell'elettrone e la cosiddetta interazione spin-orbita.

Il rapporto teoria-esperimento era, tuttavia, più complesso. Nel corso del lavoro, Bohr mostra che una serie di righe (dette di Fowler e Pickering) allora attribuite all'idrogeno sono invece dovute a ioni He^+ . Tuttavia, la controversia relativa all'attribuzione di queste righe prosegue dopo la pubblicazione del lavoro di Bohr e si risolve solo dopo qualche tempo [11].

Complessivamente, l'accordo tra predizioni teoriche ed esperimento era da considerarsi sorprendente, anche perché nessuna altra teoria era in precedenza riuscita a fornire una spiegazione della struttura discreta degli spettri atomici. Sussisteva, tuttavia, una discrepanza *qualitativa* (oltre al fatto, già posto in evidenza, secondo cui le formule teoriche contenenti la massa ridotta si discostano maggiormente dai dati sperimentali di quelle contenenti la massa dell'elettrone) ⁽¹¹⁾. Già nel 1892, Michelson aveva mostrato, usando metodi interferometrici, che la riga H_α ($\lambda \approx 656.3$ nm, situata nella regione del rosso dello spettro visibile) dell'idrogeno *appariva* come costituita da un "doppietto" [12]: tale doppietto non era previsto dal modello di Bohr. Tuttavia, Bohr non cita questo risultato sperimentale e non commenta quindi la discrepanza tra le predizioni del modello e l'esperimento.

4. Questioni di metodo

Nel discutere i postulati del modello di Bohr abbiamo sottolineato come esso violi consapevolmente alcune regole metodologiche e come, questa violazione sia essenziale ai fini della funzione predittiva del modello. L'insieme dei postulati è infatti caratterizzato dall'uso della teoria elettromagnetica, congiuntamente a ipotesi incompatibili

⁽⁹⁾ Abbiamo scritto in corsivo le cifre che differenziano i due valori, teorico e sperimentale.

⁽¹⁰⁾ Si osservi che: a) il valore "teorico" di $R_\infty c$ dipende dai valori sperimentali delle costanti che compaiono nella sua espressione; b) il suo valore "sperimentale" (e, quindi, di R_∞) dipende dalla teoria usata per descrivere i livelli atomici. Infatti, ciò che viene misurato è una frequenza di transizione tra due livelli energetici data dalla relazione $\nu = R_\infty c \times \text{numero}$ dove il *numero* che compare in questa formula dipende dalla teoria usata.

⁽¹¹⁾ Non so dire se, ai tempi di Bohr, questo fastidioso comportamento della teoria abbia suscitato interesse o commenti significativi.

con quella parte della teoria elettromagnetica che è sostituita dalle ipotesi quantiche (postulati P2 e P3). La coerenza interna dell'insieme dei postulati del modello è assicurata dall'assunzione che solo alcune parti della teoria elettromagnetica sono applicabili ai sistemi atomici. Bohr risolve cioè i problemi di coerenza interna del modello aprendo problemi di validità e di dominio di applicazione della teoria elettromagnetica.

La storia della fisica (e della scienza) mostra come la violazione temporanea di regole metodologiche ampiamente condivise dalla comunità scientifica abbia svolto ruoli essenziali nelle fasi di innovazione concettuale; tuttavia, questa violazione non può essere permanente e modelli o abbozzi di teorie *ibride* debbono, auspicabilmente, essere sostituite da teorie prive di contraddizioni interne e compatibili con l'insieme della conoscenza acquisita.

5. Nuovi modelli

Negli anni successivi, modelli atomici “alla Bohr” furono sviluppati introducendo nuove regole di quantizzazione (Sommerfeld, Wilson, Ishiwara) ed applicando, per quanto riguarda l'atomo di idrogeno, la dinamica relativistica al posto di quella newtoniana (Sommerfeld) [13]. Queste nuove condizioni di quantizzazione si basano sulla trattazione hamiltoniana del moto di una particella in cui alle coordinate q_k corrispondono i “momenti coniugati” p_k ⁽¹²⁾. Le orbite permesse (sulle quali l'elettrone non irraggia) sono individuate dalle condizioni di quantizzazione

$$(13) \quad \oint p_k dq_k = n_k h, \quad k = 1, 2, 3, \quad n_k \text{ intero.}$$

Se si scelgono le coordinate polari (r, θ, φ) , le (13) assumono la forma

$$(14) \quad \begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h, & p_r &= m\dot{r}, \\ \oint p_\theta d\theta &= n_\theta h, & p_\theta &= mr^2\dot{\theta}, \\ \oint p_\varphi d\varphi &= n_\varphi h, & p_\varphi &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Sommerfeld, in realtà, affrontò dapprima il problema della quantizzazione dei parametri di un'orbita ellittica usando le due coordinate r, χ , dove r è la distanza dell'elettrone dal centro di attrazione (uno dei due fuochi dell'ellisse) e χ l'angolo che

⁽¹²⁾ Per il formalismo hamiltoniano, si veda, per esempio, [14].

individua l'orientazione di r nel piano dell'orbita. L'applicazione delle condizioni di quantizzazione

$$(15) \quad \oint p_r dr = n_r h, \quad \oint p_\chi d\chi = k h, \quad (p_\chi = m r^2 \dot{\chi}),$$

permette di ricavare i valori permessi dell'energia dell'elettrone e quelli dei semiassi dell'ellisse ⁽¹³⁾. Ottenne così le formule

$$(16) \quad E = -R_\infty h c \frac{1}{(n_r + k)^2} = -R_\infty h c \frac{1}{n^2}, \quad (n = n_r + k),$$

$$(17) \quad a = n^2 r_0, \quad b = n k r_0, \quad \frac{b}{a} = \frac{k}{n},$$

dove $n_r = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$ e r_0 è il raggio della prima orbita di Bohr ⁽¹⁴⁾. Si osservi come i valori permessi dell'energia siano gli stessi di quelli individuati dal modello di Bohr: la somma dei numeri quantici $n_r + k$ individua infatti tutti i numeri interi positivi ≥ 1 . Questo risultato non deve sorprendere. Infatti le orbite ellittiche permesse dalle condizioni di quantizzazione sono scelte all'interno di quelle possibili individuate dall'uso congiunto della dinamica e della legge di Coulomb: l'energia dell'elettrone rotante su queste orbite dipende solo dal semiasse maggiore dell'ellisse (e, quindi, dal raggio della corrispondente orbita circolare di Bohr). Infine, poiché l'energia dell'elettrone su un'orbita ellittica non dipende — *in assenza di campi esterni* — dall'orientazione dell'orbita nello spazio, anche l'introduzione della terza condizione di quantizzazione (14) non conduce alla individuazione di nuovi livelli energetici.

Ricordiamo infine che la trattazione non relativistica dell'atomo di idrogeno della meccanica quantica conduce agli stessi livelli energetici previsti dal modello di Bohr ⁽¹⁵⁾.

⁽¹³⁾ La seconda delle (15) porta alla condizione: $p_\chi = k\hbar$, perché il momento angolare dell'elettrone $m r^2 \dot{\chi}$ è una costante del moto.

⁽¹⁴⁾ Queste formule si basano sulla trattazione che considera infinita la massa del protone. Per ottenere le formule includenti la massa ridotta, basta sostituire R ad R_∞ nella (16) e la massa ridotta μ alla massa m_e dell'elettrone nell'espressione di r_0 .

⁽¹⁵⁾ I numeri quantici usati da questa trattazione sono: $n = 1, 2, 3, \dots$ (numero quantico principale o totale); $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ (numero quantico azimutale); $m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, +l$ (numero quantico magnetico). Si noti che, diversamente dal modello di Sommerfeld, il numero quantico azimutale può assumere anche il valore 0, ma non il valore n .

6. La struttura “fine” delle righe spettroscopiche

6.1. Sommerfeld e Dirac

La trattazione relativistica del moto dell’elettrone condusse Sommerfeld alla seguente equazione per i livelli energetici dell’elettrone nell’atomo di idrogeno [15]

$$(18) \quad E \approx -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

dove k è il numero quantico che quantizza il momento angolare dell’elettrone, μ la sua massa ridotta e

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

è la *costante di struttura fine*. Si noti che la costante α è adimensionale. I livelli energetici previsti dalla (18) coincidono con quelli ottenuti espandendo, in funzione delle potenze di α (e considerando solo il primo termine dello sviluppo) la formula esatta ottenuta da Dirac [16] [17]

$$(19) \quad E \approx -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

dove $j = l + s$ ⁽¹⁶⁾ ⁽¹⁷⁾. Le due formule coincidono, per quanto riguarda il valore di E , perché, sia k , sia $j + 1/2$ possono assumere i valori interi compresi tra 1 ed n ; tuttavia, la formula di Dirac prevede che i livelli energetici corrispondenti allo stesso valore di j , ma con l diverso, abbiano la stessa energia, siano cioè, come si dice, degeneri.

La medesima ⁽¹⁸⁾ capacità predittiva delle formule di Sommerfeld e Dirac richiede qualche commento. La formula di Sommerfeld è ricavata usando la dinamica relativistica e le condizioni di quantizzazione (15). La dipendenza dell’energia dei livelli permessi dal numero quantico k ($k = 1, 2, \dots, n$) è una conseguenza della trattazione relativistica. La formula di Dirac approssimata (19) può essere ricavata anche aggiungendo ai valori permessi dell’energia — che si ottengono con la trattazione quantica non relativistica (e che coincidono, come abbiamo visto, con quelli del modello di Bohr) — correzioni che tengano conto del fatto che ⁽¹⁹⁾:

- 1) la dinamica usata deve essere relativistica;
- 2) l’elettrone possiede uno spin; questa correzione è nulla per $l > 0$;

⁽¹⁶⁾ Il numero quantico azimutale l può assumere i valori $0, 1, 2, \dots, n - 1$; il numero quantico di spin s i valori $\pm 1/2$.

⁽¹⁷⁾ Nelle due formule compare il segno \approx invece di quello di uguaglianza perché sono state approssimate trascurando i termini contenenti potenze superiori di α (il primo termine successivo dipende da α^4).

⁽¹⁸⁾ Se si trascura la ricordata degenerazione dei livelli presente nella formula di Dirac.

⁽¹⁹⁾ Si veda, per esempio, [18].

- 3) c'è una interazione tra il momento magnetico intrinseco dell'elettrone e il suo momento magnetico orbitale (interazione *spin-orbita*); questa correzione è nulla per $l = 0$.

La correzione relativistica di cui al punto 1) risulta uguale a

$$-\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[\frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{l+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

con $l = 0, 1, \dots, n-1$. La correzione relativistica quantica è quindi diversa da quella relativistica calcolata da Sommerfeld. Accade tuttavia che, aggiungendo le altre correzioni, le predizioni della (18) e della (19) coincidono. Tuttavia, la formula di Sommerfeld, ovviamente, non tiene conto dei fenomeni fisici elencati ai punti 2 e 3. Il rapporto tra la teoria di Sommerfeld e quella di Dirac suggerisce che i criteri di valutazione delle teorie non si debbono basare esclusivamente sul (buon) accordo con l'esperimento ma richiedono, *necessariamente*, una prospettiva temporale adeguata.

6.2. Il Lamb-shift

Verso la fine degli anni trenta del secolo scorso, una serie di meticolose osservazioni hanno posto in evidenza piccole discrepanze tra le previsioni basate sulla (19) e i dati sperimentali riguardanti la riga H_α che, in emissione, corrisponde alla transizione tra i livelli $n = 3$ ed i livelli $n = 2$. Nel 1938, S. Pasternack osservò che tali discrepanze sarebbero attenuate se i due livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ — che hanno lo stesso valore di j ($1/2$) e diverso valore di l (0 ed 1, rispettivamente) — differissero in energia di un ammontare opportuno, essendo $2P_{1/2}$ il livello inferiore [19] ⁽²⁰⁾. Nel 1947, Lamb e Retherford osservarono la transizione diretta tra lo stato $2P_{1/2}$ e lo stato $2S_{1/2}$, mostrando così che la loro energia è diversa [20]. La frequenza corrispondente a questa transizione è di circa 1058 MHz. La spiegazione teorica di quello che è chiamato *Lamb-shift* è fornita dalla elettrodinamica quantica ⁽²¹⁾ che prevede, in generale, una dipendenza dell'energia dell'elettrone anche dal numero quantico l . In fig. 2, sono mostrati i livelli energetici nei quali si suddividono i livelli $n = 2$ ed $n = 3$ previsti dal modello di Bohr, secondo la teoria di Dirac “corretta” dalla elettrodinamica quantica.

Si noti che:

- Il livello di Bohr $n = 2$ è suddiviso in due livelli ($j = 1/2, 3/2$) dalla teoria di Dirac. A sua volta, il livello con $j = 1/2$ è suddiviso in due livelli ($l = 0, 1$) dalla elettrodinamica quantica. La differenza in energia tra questi due livelli (${}^2P_{1/2}$, ${}^2S_{1/2}$) corrisponde al cosiddetto *Lamb-shift*.

⁽²⁰⁾ I livelli energetici dell'elettrone nell'atomo di idrogeno sono rappresentati mediante la notazione: ${}^a\text{Lettera}_b$, dove $a = 2s + 1$, $b = j$ e *Lettera* = *S, P, D, F, ...*. Le lettere usate corrispondono a $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, rispettivamente.

⁽²¹⁾ Si noti che, per completare la trattazione dell'atomo di idrogeno, si deve tenere conto anche dell'interazione tra il momento magnetico dell'elettrone (orbitale e di spin) e quello del protone. Questa interazione dà origine ad una struttura delle righe detta *iperfine*.

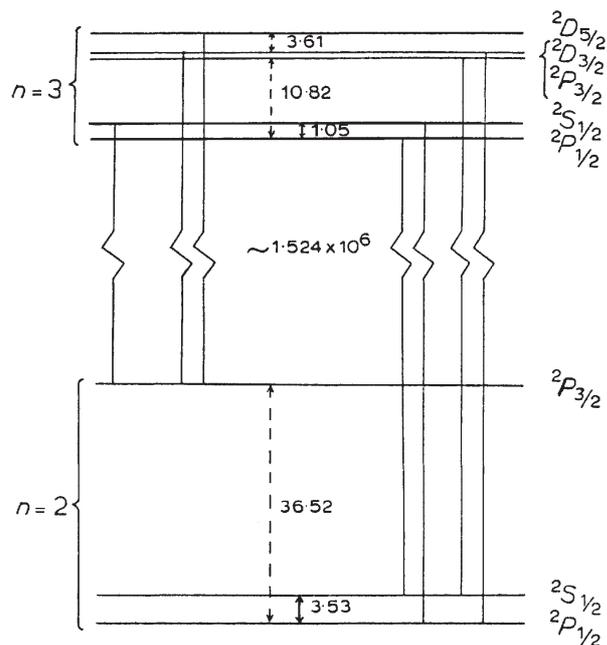


Fig. 2. – Suddivisione dei livelli energetici di Bohr corrispondenti a $n = 2$ e $n = 3$ secondo la teoria di Dirac e la elettrodinamica quantica. Si veda il testo. Questa figura è stata tratta da [21]: la parte inferiore della figura originale è stata soppressa.

- Il livello di Bohr $n = 3$ è suddiviso in tre livelli ($j = 1/2, 3/2, 5/2$) dalla teoria di Dirac. A loro volta i livelli con $j = 1/2$ e $j = 3/2$ sono suddivisi in due livelli dalla elettrodinamica quantica. Le differenze in energia tra i livelli ($^2P_{1/2}, ^2S_{1/2}$) e tra i livelli ($^2P_{3/2}, ^2S_{3/2}$) corrispondono ad altrettanti “*Lamb-shifts*”.

Si noti come lo spostamento dei livelli dovuta alla trattazione di Dirac, introducendo transizioni a frequenze maggiori, permetta di colmare la differenza tra i valori teorici e sperimentali della costante $R_{\infty}c$ considerata da Bohr (sezione 3). Da questo punto di vista, i *Lamb-shifts* introducono correzioni più piccole di un ordine di grandezza (si veda la fig. 2).

6.3. La struttura svelata

Nei primi anni settanta del secolo scorso, misure di assorbimento effettuate con tecniche che eliminano l’allargamento delle righe dovuto all’effetto Doppler hanno permesso di individuare le principali componenti della riga H_{α} e di confrontarle con quelle previste dalla teoria (fig. 3).

L’allargamento delle righe di assorbimento di un gas di idrogeno a temperatura ambiente è essenzialmente dovuto all’effetto Doppler. La larghezza a metà altezza di

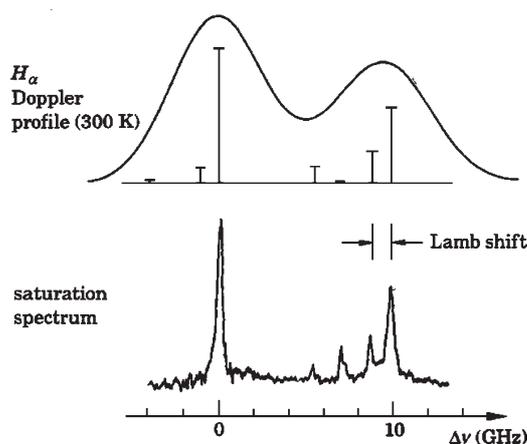


Fig. 3. – La parte superiore della figura mostra l'apparente doppietto della riga H_α ottenuto con metodi spettroscopici tradizionali (si confronti questa curva con quella, ottenuta da Michelson in [12]). Le linee verticali indicano la posizione e l'intensità teoriche delle varie componenti – corrispondenti alle transizioni permesse tra i livelli energetici della fig. 2. La parte inferiore della figura riproduce lo spettro sperimentale ottenuto con il metodo della *saturation spectroscopy* illustrato nel testo: siccome le condizioni sperimentali non assicurano che i livelli di partenza delle transizioni siano ugualmente popolati, non è possibile un confronto tra le intensità delle varie componenti previste teoricamente e quelle osservate. Questa figura è stata tratta da [5]; la parte superiore della figura originale è stata soppressa.

una riga dovuta all'effetto Doppler del primo ordine è data da ⁽²²⁾

$$(20) \quad \Delta\nu = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{M_H c^2}},$$

dove k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, M_H la massa dell'atomo di idrogeno e c la velocità della luce. A 300 K $\Delta\nu \approx 5.6 \times 10^9$ Hz, se $\lambda_0 = 656.3$ nm.

Data una riga di assorbimento allargata per effetto Doppler, indichiamo con ν_0 la frequenza corrispondente al massimo assorbimento: gli atomi che entrano in risonanza a questa frequenza sono quelli che hanno una componente nulla della loro velocità lungo la direzione del fascio di fotoni che esplora il gas. Se la frequenza di questo fascio di luce è $\nu < \nu_0$, i fotoni del fascio ecciteranno quel gruppo di atomi che stanno viaggiando in direzione opposta a quella dei fotoni con velocità v tale per cui $\nu = \nu_0 - v/c$: se il fascio di luce è prodotto da un laser abbastanza potente, la popolazione del livello di partenza sarà quasi "svuotato" dal fascio laser. Se un altro fascio laser (ottenuto mediante un *beam-splitter*) viene lanciato in direzione quasi opposta al primo, i suoi fotoni ecciteranno quel gruppo di atomi che stanno viaggiando con velocità v in direzione opposta alla direzione del fascio: i due gruppi di atomi eccitati dai due laser sono distinti (nessun atomo di un gruppo appartiene

⁽²²⁾ Si veda, per esempio, [22].

all'altro gruppo) ⁽²³⁾. Tuttavia, se $\nu = \nu_0$, i due fasci agiscono sullo stesso gruppo di atomi (quello la cui velocità lungo la direzione dei due fasci è nulla). Pertanto, variando la frequenza ν dei due fasci, modulando con un *chopper* l'intensità del fascio principale e misurando l'assorbimento dei fotoni del secondo fascio si ottiene una curva di assorbimento che riproduce quella della transizione sotto misura depurata dall'effetto Doppler ⁽²⁴⁾. Per poter osservare le transizioni tra i livelli $n = 2$ ed $n = 3$ dell'atomo di idrogeno, il gas è opportunamente eccitato da una scarica elettrica. In fig. 4 è riprodotto uno schema dell'apparato sperimentale.

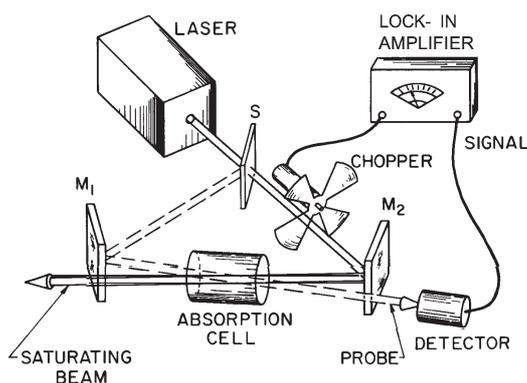


Fig. 4. – Schema di apparato per misure di *saturation spectroscopy*. Figura tratta da [24]. © The Nobel Foundation, 1981.

7. Commenti finali

La spettroscopia dell'atomo di idrogeno è un settore di ricerca ancora vivo per quanto concerne la possibilità di sottoporre a verifica sperimentale le predizioni della elettrodinamica quantica e, nel contempo, per ottenere misure sempre più precise della costante di Rydberg: per una rassegna dei più recenti sviluppi si vedano, per esempio, [23, 27].

In una prospettiva storica, è difficile sopravvalutare l'importanza del modello di Bohr: per la capacità predittiva, l'impianto concettuale e metodologico, il rapporto con l'esperienza, la funzione di rottura rispetto alla fisica classica e, nel contempo, di raccordo tra la descrizione "classica" e quella della meccanica quantica. Per queste ragioni esso è opportunamente usato, ancora oggi, a scopo didattico: una sua presentazione culturalmente consapevole, che ne ponga in evidenza tutte le caratteristiche, costituisce uno dei possibili percorsi di un insegnamento teso a sviluppare le capacità critiche degli studenti. (g.g.)

⁽²³⁾ Se $\nu > \nu_0$, gli atomi eccitati dai due fasci sono quelli che "fuggono" davanti ai fotoni con componente della velocità v tale che $\nu = \nu_0 + v/c$.

⁽²⁴⁾ Il segnale di assorbimento del fascio di misura avrà la stessa frequenza dell'intensità del fascio principale e sarà in opposizione di fase rispetto ad essa (le tecniche di modulazione permettono, mediante l'uso di amplificatori a sensibilità di fase, di rivelare segnali più piccoli del rumore di fondo).

Bibliografia

- [1] N. BOHR, "On the Constitution of Atoms and Molecules - Part I", *Philos. Mag.*, **26** (1913) 1-25.
In rete alla pagina: <http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/webdocs/Chem-History/Bohr/Bohr-1913a.html>
- [2] Una traduzione italiana dell'articolo si trova in: N. BOHR, *Teoria dell'atomo e conoscenza umana*. (Boringhieri, Torino) 1961.
- [3] N. BOHR, "Systems Containing only a Single Nucleus - Part II", *Philos. Mag.*, **26** (1913) 476-502.
- [4] N. BOHR, "Systems Containing Several Nuclei - Part III", *Philos. Mag.*, **26** (1913) 857-875.
- [5] T.W. HÄNSCH, "Laser Spectroscopy in Atomic Hydrogen" in: *Frontiers in Laser Spectroscopy - Proc. of the Inter. School of Physics "Enrico Fermi"* edited by T.W. HÄNSCH, M. INGUSCIO, (SIF, Bologna; North-Holland, Amsterdam) 1994, pp. 297-316, p. 298.
- [6] L. BIASI, *Meccanica razionale ed analitica*, cap. 13. In rete alla pagina: <http://www.pv.infn.it/biasi/dispense/>
- [7] M. JAMMER, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York) 1966.
- [8] G. TAGLIAFERRI, *Storia della fisica quantistica* (Angeli, Milano) 1985.
- [9] G. HERZBERG, "Über die Spektren des Wasserstoffs", *Ann. Phys. (Leipzig)*, **84** (565-604) 1927.
In rete all'interno dell'archivio <http://gallica.bnf.fr>
- [10] In rete alla pagina: http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Results?search_for=Rydberg
- [11] Rif. [7], pp. 82-85; rif. [8], pp. 188-191.
- [12] A.A. MICHELSON, "On the Application of Interference Methods to Spectroscopic Measurements - II", *Philos. Mag.*, **34** (1892) 280-299.
- [13] Rif. [7], pp. 89-109; rif. [8], pp. 203-219.
- [14] Rif. [6], cap. 16.
- [15] A. SOMMERFELD, "Zur Quantentheorie der Spektrallinien" *Ann. Phys. (Leipzig)*, **51** (1916) 1-94; 125-167. In rete all'interno dell'archivio <http://gallica.bnf.fr>
- [16] P.A.M. DIRAC, "The Quantum Theory of the Electron" *Proc. Roy. Soc.*, **117** (1928) 610-624.
In rete all'interno dell'archivio (accesso condizionato): <http://search-sandbox.jstor.org/search/AdvancedSearch>
- [17] G.C. DARWIN, "The Wave Equations of the Electron" *Proc. Roy. Soc.*, **118** (1928) 654-680. In rete all'interno dell'archivio: <http://gallica.bnf.fr>
- [18] F.K. RICHTMYER, E.H. KENNARD, T. LAURITSEN, *Introduction to Modern Physics* (McGraw-Hill, New York) 1955, pp. 258-260.
- [19] S. PASTERNAK, "Note on the Fine Structure of H_{α} and D_{α} " *Phys. Rev.*, **54** (1938) 1113.
- [20] W.E. LAMB, R.C. RETHERFORD, "Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method" *Phys. Rev.*, **72** (1947) 241-243.
- [21] G.W. SERIES, *Contemp. Phys.*, **14** (1974) 49 - 68, p. 56.
- [22] G. GIULIANI, I. BONIZZONI, *Lineamenti di elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia) 2004, p. 201.
- [23] T.W. HÄNSCH, A.L. SCHAWLOW, G.W. SERIES, "The Spectrum of Atomic Hydrogen" *Sci. Am.*, **240** (1979) 94-110.
- [24] A.L. SCHAWLOW, "Spectroscopy in a New Light", Nobel Lecture (1981). In rete alla pagina: http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1981/schawlow-lecture.html
- [25] G.F. BASSANI, M. INGUSCIO, T.W. HÄNSCH, (Editors) *The Hydrogen Atom* (Springer, Berlin Heidelberg) 1989.
- [26] P.J. MOHR, B.N. TAYLOR, "Adjusting the values of the fundamental constants", *Phys. Today*, **54** (2001) 29-34.
- [27] P.J. MOHR, B.N. TAYLOR, "Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2002", appendice A, *Rev. Mod. Phys.*, **77** (2005) 1-107.