

SILVANO SGRIGNOLI

ITIS per la Chimica e Liceo ScientificoTecnologico "G. Natta",
Bergamo

Teorema di Carnot e rendimento del motore ideale

(Pervenuto il 31.07.01, approvato il 22.03.02)

ABSTRACT

Carnot's theorem and the ideal engine's efficiency. This article discusses the efficiency formula proposed in a former article by another author, and shows how it can lead to contradictions when applied to particular cycles where heat is exchanged with only two reservoirs.

In un articolo apparso recentemente su questa rivista¹, l'autore mostra come in molti testi, universitari e liceali, l'enunciazione del *Teorema di Carnot* sia formulata in modo ambiguo e tale da generare errate interpretazioni negli studenti. Nella discussione si fa riferimento a due aspetti: il primo è la non chiara distinzione tra una macchina che scambi calore con due soli "termostati" e una macchina che invece, più genericamente, lavori "tra due temperature" assegnate, nel senso che possa scambiare calore con più sorgenti le cui temperature siano comprese in un dato intervallo.

A tale proposito, è interessante notare che l'uso di espressioni non chiare sotto questo profilo è relativamente recente, mentre la questione è del tutto limpida nei testi dei "fondatori" della teoria termodinamica. Come esempio, si consideri l'affermazione seguente, tratta da un'opera di Rankine del 1861:

"Motore termico e massimo rendimento. - In un dato intervallo di temperature, il rendimento di un motore termodinamico è il massimo possibile allorché l'intero assorbimento di calore avviene al limite superiore, mentre tutto il calore ceduto è scambiato alla temperatura inferiore, vale a dire quando il motore è un *motore elementare*; e il rendimento del fluido in tale motore è indipendente dalla natura del fluido utilizzato."²

D'altra parte, l'uso dell'espressione "lavorare tra due temperature" nell'accezione restrittiva di scambiare calore con due sole sorgenti a quelle temperature non è per nulla arbitraria. Si legga, per esempio, questo passo tratto da un notissimo libro di Enrico Fermi:

"La temperatura termodinamica assoluta. Nella precedente sezione abbiamo descritto un

motore reversibile ciclico, il ciclo di Carnot, che compie una quantità di lavoro L durante ciascuno dei suoi cicli assorbendo una quantità di calore Q_2 da una sorgente a temperatura t_2 e cedendo una quantità di calore Q_1 a una sorgente alla temperatura più bassa t_1 . Diremo che un simile motore lavora tra le temperature t_1 e t_2 ."³

Il seguito della trattazione di Fermi nel testo citato si mantiene coerente alla definizione data e non pone alcuna ambiguità, ma è evidente che l'uso disinvolto della locuzione "motore che lavora fra due temperature", senza che sia esplicitamente definito il senso restrittivo della frase, può ingenerare veri e propri fraintendimenti, come giustamente messo in evidenza dall'articolo menzionato all'inizio.

In generale, la questione qui analizzata rimanda al difficile equilibrio che dovrebbe essere ricercato nello scrivere i testi per l'insegnamento: da un lato è importante evitare di dar per ovvio e scontato ciò che risulta tale solamente per "gli addetti ai lavori" e, viceversa, si deve tendere a chiarire bene quali ipotesi di partenza siano alla base dei discorsi che si presentano; d'altro canto bisogna evitare il rischio di confondere le idee con troppe sottili distinzioni iniziali, fatte prima ancora che il lettore ne possa apprezzare la necessità.

Il secondo argomento proposto nell'articolo menzionato è più complesso e riguarda la definizione di rendimento. In particolare l'autore solleva la questione di come debba essere calcolato il rendimento allorché il ciclo termodinamico preveda che vi siano più scambi di calore con uno stesso "termostato". È possibile, infatti, che un motore assorba calore da una sorgente e, in una fase successiva, tutto o parte di questo calo-

re sia restituito alla stessa sorgente. Un caso tipico, analizzato nell'articolo in discussione, è quello del Ciclo di Stirling: il motore Stirling prevede infatti un *rigeneratore*, cioè un sistema in grado di assorbire calore lungo un'isocora del ciclo per poi restituirlo al fluido di processo durante la seconda trasformazione isocora. Nel caso di *rigenerazione perfetta*, si ammette che i passaggi di calore fluido-rigeneratore e rigeneratore-fluido avvengano reversibilmente, si compensino esattamente e – ad ogni ciclo – riportino il rigeneratore nello stato termodinamico iniziale.

In queste ipotesi, il rigeneratore deve essere assimilato a un insieme infinito di termostati, che coprano con continuità l'intervallo delle temperature tra le quali opera il motore; ciascuno di questi termostati assorbe una quantità infinitesima di calore durante la prima isocora e la restituisce, alla stessa temperatura, durante la seconda isocora.

Nell'articolo menzionato, l'autore sostiene che, in questi casi, "il modo più naturale e didatticamente più valido" per definire il rendimento consiste nel sommare tutte le *quantità di calore comunque assorbite* dal fluido operativo e calcolare *con tale somma* il rapporto:

$$\eta = \frac{L}{\sum Q_{\text{ass}}}$$

E dichiara di preferire questa definizione di rendimento a quella che si trova usualmente nei trattati di termodinamica, per la quale si devono invece considerare gli *scambi netti* che ogni termostato subisce in un ciclo – cosicché nel ciclo di Stirling si devono ignorare tutte le quantità di calore scambiate con il rigeneratore (in quanto, per ciascuno degli infiniti termostati, hanno un totale nullo in ogni ciclo). Agli altri autori⁴ che – adottando implicitamente questa seconda "scelta" – dimostrano che un ciclo di Stirling reversibile ha lo stesso rendimento di un ciclo ideale di Carnot, sviluppato nel medesimo intervallo di temperature, il nostro aveva all'inizio del lavoro obiettato che tale affermazione di eguaglianza è "didatticamente molto pericolosa, perché inevitabilmente genera negli studenti errate interpretazioni".

Temo, tuttavia, che le cose non stiano esattamente nel modo descritto e, in particolare, che

nella definizione del rendimento non ci si trovi di fronte a due alternative entrambe valide, ciascuna con i suoi vantaggi, tra le quali sia lecito scegliere. Mi sembra, al contrario, che la "nuova" definizione proposta conduca, purtroppo, a contraddizioni e, quindi, *non possa* essere adottata.

In verità, non è necessario considerare termostati intermedi tra i due estremi (T_c e T_f) per mettere in luce i problemi insiti nella "nuova" definizione. Basta, invece, considerare un ciclo di Carnot modificato, nel quale l'isoterma $T_c = \text{cost}$ si prolunghi oltre l'intersezione con l'adiabatica che porta il fluido alla temperatura T_f . Il tratto aggiuntivo deve essere percorso due volte: in andata, col gas che si espande ed assorbe un'ulteriore quantità di calore Q_x , e in ritorno, col gas che restituisce al "termostato" T_c il calore precedentemente assorbito. Con riferimento alla Figura 1, tale ciclo si svolgerebbe perciò lungo il percorso $A-B-B'-B-C-D-A$.

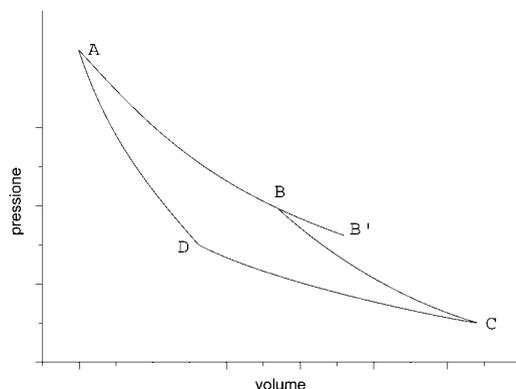


Figura 1.

Da un lato, è chiaro che le due trasformazioni $B-B'$ e $B'-B$ sono l'una inversa dell'altra, si cancellano a tutti gli effetti e di fatto non contribuiscono in alcun modo al rendimento del ciclo – nel quale comunque il *fluido scambia reversibilmente calore con due sole sorgenti*. Per questa macchina si dovrebbe poter parlare di rendimento senza alcuna ambiguità – invece, se si utilizza la "nuova" definizione, si ottiene un rendimento *minore* di quello del ciclo di Carnot corrispondente. Anzi, immaginando di estendere diversamente l'isoterma oltre B e/o supponendo di ripetere n volte il percorso di andata e ritorno lungo il tratto aggiuntivo, si ottiene un rendimento arbitrariamente piccolo!⁵ La cosa appare, franca-

mente, inaccettabile (per non parlare delle confusioni assurde nelle quali si troverebbero, ora sì, gli studenti).

Si noti che, per quanto possa qui apparire artificiosa, una trasformazione che si sviluppa avanti e indietro (di fatto annullandosi) non è per nulla una trovata bizzarra e, anzi, è comune in molte dimostrazioni di termodinamica. Per esempio, si considerino due macchine di Carnot associate, la seconda delle quali assorba dal “termostato” T_1 esattamente la quantità di calore che vi è riversata dalla prima macchina, operando come nella Figura 2 e cedendo calore a un ulteriore termostato T_0 (lungo l’isoterma EF).

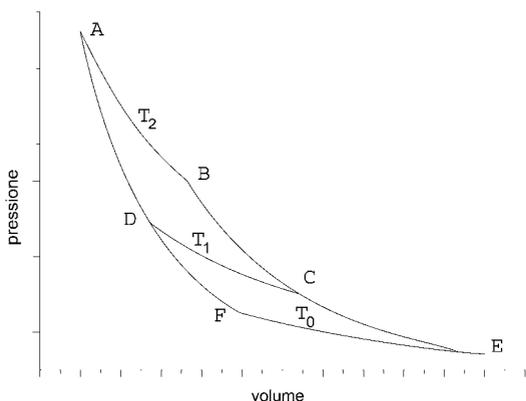


Figura 2.

Quando ci si propone di calcolare il rendimento globale del sistema, lo si considera equivalente a un’unica macchina di Carnot operante tra le due temperature estreme T_2 (lungo AB) e T_0 (lungo EF): infatti la combinazione dei due cicli corrisponde a percorrere l’isoterma T_1 due volte – la prima volta in compressione (CD) e la seconda in espansione (DC) – annullandone tutti gli effetti.

Per applicare questo ragionamento, peraltro, non è necessario che le due trasformazioni siano esattamente l’una inversa dell’altra: basta che la quantità di calore assorbita e ceduta all’andata e, rispettivamente, al ritorno, si compensino esattamente. È così, ad esempio, nel caso illustrato in Figura 3, dove si è posta semplicemente la

$$\text{condizione } \frac{V_C}{V_{D'}} = \frac{V_B}{V_A};$$

anche qui i due cicli associati, con le macchine “in cascata”, equivalgono a un unico ciclo di Carnot che si svolge tra le

temperature estreme T_2 e T_0 . Ed è una naturale estensione di questo modo di ragionare che porta a considerare nullo il contributo del calore assorbito dal (ma precedentemente ceduto al) rigeneratore del ciclo Stirling.

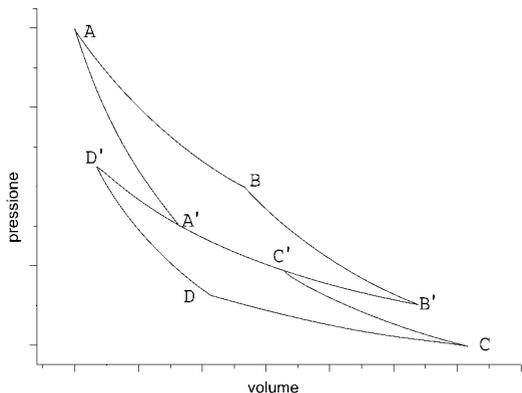


Figura 3.

Infine, si può considerare che – con l’usuale definizione di rendimento – l’eguaglianza tra i rendimenti di Stirling e Carnot (a parità di temperature) risulta molto vantaggiosa dal punto di vista didattico, perché il rendimento del ciclo di Stirling può essere calcolato senza far ricorso al calcolo esplicito di integrali⁶ e l’eguaglianza può essere derivata direttamente da principi generali, come la discussione in classe può utilmente mettere in risalto. Basta infatti considerare il motore Stirling come sistema termodinamico formato dal fluido motore e dal rigeneratore. Tale sistema motore scambia calore reversibilmente con due sole sorgenti e deve, dunque, avere il medesimo rendimento del motore di Carnot⁷.

Conclusione

La presentazione didattica degli argomenti fondamentali di termodinamica richiede di conciliare in un difficile equilibrio la chiarezza e semplicità dell’esposizione e l’attenzione a molte sottili distinzioni; non sempre i libri di testo riescono a produrre un risultato che eviti difficoltà e fraintendimenti allo studente. Nell’approfondire le questioni alla ricerca di soluzioni più soddisfacenti, è utile ricercare le ragioni che hanno portato alle formulazioni più diffuse, ritrovandone le radici anche nei testi del passato.

Bisogna comunque fare molta attenzione, perché quella che può sembrare una nuova strada più vantaggiosa per la didattica può anche celare insidie riposte e ricondurre talora a quelle stesse confusioni che si vorrebbero evitare.

Note

¹ FRANCO BOCCI. "Il teorema di Carnot e il rendimento delle macchine termiche", *LFNS*, **33**, 4 (ottobre-dicembre 2000), pp. 172-178.

² WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINE. *A Manual of the Steam Engine and Other Prime Movers*, Griffin Bohn and Co., London, 1861, p. 344.

"267. **Heat Engine of Maximum Efficiency.**- *Between given limits of temperature*, the efficiency of a thermodynamic engine is the greatest possible, when the whole reception of heat takes place at the higher limit, and the whole rejection of heat at the lower; that is to say, when the engine is an *elementary engine*; and the efficiency of the fluid in such an engine is independent of the nature of the fluid employed."

³ ENRICO FERMI. *Thermodynamics*, Dover Publications Inc., New York, 1956, p. 35. (Ed originale: Prentice-Hall, 1937).

"9. **The absolute thermodynamic temperature.** In the preceding section we described a reversible cyclic engine, the Carnot cycle, which performs an amount of work L during each of its cycles by absorbing a quantity of heat

Q_2 from a source at the temperature t_2 and surrendering a quantity of heat Q_1 to a source at the lower temperature t_1 . We shall say that such an engine works between the temperatures t_1 and t_2 ."

⁴ Oltre a quelli menzionati nell'articolo qui discusso, si possono elencare: Rankine. *cit.*, p. 354-371 (dove, tuttavia, il calcolo del rendimento ideale è svolto soltanto per il ciclo di Ericsson); Angelo Izar. *Termodinamica*, C. Tamburini, Milano, 1939, p. 32; Mark W. Zemansky. *Calore e Termodinamica*, Zanichelli, Bologna, 1970, p. 152 (si veda anche il problema 7.7 p. 170); Lino Mattarolo. *Termodinamica applicata*, CLEUP, Padova, 1977, pp. 201-203.

⁵ Il rendimento sarebbe, infatti, dato dall'espressione:

$$\eta = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c + n Q_x}$$

, il cui valore decresce all'aumentare di n .

⁶ Si veda, a questo proposito, Silvano Sgrignoli, Maria Luisa Viglietta. *Efficienza nell'uso dell'energia*, Zanichelli, Bologna, 1984, pp.13-15. Il calcolo è ripreso in: Ugo Amaldi. *La fisica per i licei scientifici*, Zanichelli, Bologna, 1998, v. II, pp. 179-180.

⁷ Questo ragionamento è stato integrato in una delle proposte di insegnamento del II Principio della Termodinamica, formulate dall'AIF al termine di un elaborato percorso di studio, svolto nell'ambito delle *Iniziative Orlandini* dal 1986 al 1988. Si veda: L. Viglietta. "Il II Principio della Termodinamica in un corso di fisica a livello di Scuola secondaria superiore: un approccio macroscopico", *LFNS*, **22**, 2 IR (aprile-giugno 1989), pp.16-18.

In ricordo di Salvatore Dragonetto

Conoscevo Salvatore Dragonetto, docente di Fisica nella Scuola Secondaria Superiore e Segretario della Sezione AIF di Napoli 1, da pochi anni e non posso dire di esserne stato intimo amico: pure la notizia della sua prematura scomparsa, dovuta a lunga ed inesorabile malattia, mi ha colto di sorpresa e mi ha addolorato.

Mi ha colto di sorpresa perché Salvatore Dragonetto, nonostante gli impedimenti che gli derivavano dal male, ha continuato ad essere presente ed impegnato in tutte quelle attività che riguardavano l'insegnamento della Fisica e la ricerca didattica.

Mi ha addolorato perché Salvatore, superando ogni tipo di inutile formalità, stabiliva facilmente con gli altri rapporti umani leali e schietti, sostenuto in ciò dalla sua innata simpatia; e questo ha fatto anche con me per quel breve periodo di tempo e in quelle poche occasioni in cui ci siamo frequentati.

Voglio solo ricordare una di queste occasioni: fu ad un Seminario AIF, svoltosi qualche anno fa a Rimini, dedicato alla definizione dei nuovi curricoli di Fisica (compito a cui naturalmente Salvatore non si era sottratto dichiarando anche la sua disponibilità a collaborare nei gruppi di lavoro ristretti che si sarebbero successivamente realizzati).

Quando i lavori furono terminati dissi a Salvatore che ero venuto in macchina e gli chiesi se volesse un passaggio a Napoli; rimase un attimo incerto perché aveva già il biglietto e la prenotazione ferroviaria. Poi mi disse "Va bene, Gigino, vengo con te così ti faccio compagnia!". Fu un viaggio piacevole e poco faticoso, trascorso a conoscerci meglio ed a esprimere le nostre idee. Potrei ricordare altri episodi, forse anche più significativi, ma voglio terminare con il ricordo di questo viaggio trascorso insieme e con l'immagine di Salvatore Dragonetto che parla con me di giovani e di Fisica.

Luigi Capuozzo
Segretario Sezione AIF di Napoli 2