

Meccanica. — *Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica.* Nota di CARLO CATTANEO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

Vari Autori⁽¹⁾ hanno mostrato, con procedimenti diversi, che la trasformazione di Lorentz può dedursi da postulati che sono comuni alla cinematica relativistica e alla cinematica classica senza l'intervento del postulato, più propriamente relativistico, dell'invarianza della velocità della luce nel vuoto, cui è riservato il compito di dirimere un'alternativa e di precisare il valore e il significato fisico di una certa costante universale.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) W. IGNATOWSKJ, « *Physicalische Zeitschrift* », 11, p. 972 (1910); M. PLANK, *Acht Vorlesungen über theoretische Physik, Leipzig*, p. 11 (1910); P. FRANK e H. ROTHE, « *Ann. d. Physik* », 24, p. 825 (1911); « *Physicalische Zeitschrift* », 13, p. 750 (1912); F. SEVERI, *Riduzione dei principii di relatività ai loro elementi logici e psicologici*, « *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei* » (1924); *Elementi logici e psicologici dei principii di relatività*, « *Scientia* » (1925); *Esame delle obiezioni di ordine generale contro la relatività del tempo*, « *Scientia* » (1925); Y. UENO e H. TAKENO, *On equivalent Observers*, « *Progress of Theor. Phys.* », 8, p. 291 (1952); Y. UENO, *On the equivalency for the observers in the special relativity*, « *Progress of Theor. Phys.* », 9, p. 74 (1953).

Si cfr. anche le seguenti pubblicazioni del prof. M. G. GALLI, ove la trasformazione di Lorentz viene discussa, sottilmente e con visione completa, sia da un punto di vista logico-deduttivo sia da un punto di vista sperimentale-induttivo: *Ottica relativistica generalizzata*,

Riprendo qui la questione indicando un procedimento dimostrativo che se in parte si accosta a quello di Ignatowskj credo ne elimini alcune manchevolezze, comuni del resto a tutte le deduzioni, più note o meno, della trasformazione di Lorentz.

I. POSTULATI FONDAMENTALI. — Enuncio, in una forma che ritengo abbastanza completa ma che sostanzialmente è quella tradizionale, i primi postulati della relatività ristretta, postulati che, limitatamente all'ambito cinematico, sono tutti comuni anche alla fisica classica.

I. EVENTO. UNIVERSO. — L'ente primitivo fondamentale della cinematica è l'*evento* E. Esistono infiniti eventi la cui totalità costituisce l'*universo* U.

II. RIFERIMENTO GALILEIANO. — Esiste uno spazio di riferimento S a tre dimensioni dotato delle seguenti proprietà:

a) *Vale in esso, per le figure in quiete, l'ordinaria geometria euclidea.* È evidentemente libera in S la scelta di un sistema di coordinate, in particolare di un'arbitraria terna cartesiana trirettangola *Oxyz*, atto a individuare i singoli punti di S.

b) *Possono associarsi ad S le nozioni (che si assumono come primitive) di contemporaneità (anche in posizioni diverse) e di durata temporale.* Ciò consente di associare ad S un *tempo* pantopico *t* di cui è disponibile soltanto l'origine e l'unità di misura.

c) *Lo spazio S, munito di una terna cartesiana Oxyz e di un tempo t, costituisce un riferimento $R \equiv (Oxyz, t)$ — che dicesi riferimento spazio-temporale galileiano — per U.* Ad ogni evento di U corrisponde pertanto in R una ben determinata quaterna di coordinate x, y, z, t (ciascuna suscettibile di variare tra $-\infty$ e $+\infty$) e viceversa.

d) *Lo spazio S è isotropo e omogeneo (l'omogeneità valendo sia in posizione sia nel tempo) rispetto a tutti i fenomeni fisici (in particolare cinematici).* Fisicamente ciò val quanto dire che un esperimento fisico eseguito in un laboratorio L che sia in quiete nello spazio S dà, *ceteris paribus*, un risultato indipendente dall'ubicazione e dall'orientamento di L in S, nonché dall'istante in cui l'esperimento ha inizio.

Il complesso dei postulati I–II permette di costruire in S tutta la cinematica, sia di un unico punto sia di un sistema, anche continuo, di punti. Esso permette in particolare di definire in S quei moti di insieme, detti moti traslatori uniformi, caratterizzati dal fatto che tutti i punti del sistema sono animati da una stessa velocità vettoriale, costante nel tempo. Naturalmente i postulati I–II non consentono, da soli, di costruire la cinematica dei moti relativi.

III. PRINCIPIO DI RELATIVITÀ. — *Esistono infiniti spazi tridimensionali, sovrapposti e mobili l'uno rispetto all'altro, tali che:*

« Ottica », V, 3–4 (1951); *Ottica e Cinematica*, « Ottica », 5, 6 (1953); dello stesso si cfr. anche una breve Nota critica in « Ottica », VI, 1–4 (1952).

Sono grato al prof. Galli al quale debbo la segnalazione del lavoro di Ignatowskj, che mi era sfuggito.

a) *Ciascuno di essi gode di tutte le proprietà II del riferimento S.*

b) *Essi sono caratterizzati dal fatto di muoversi l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio uniforme.* Fissato uno di essi S, ogni altro S' è individuato da un vettore $\mathbf{v}$ di S che rappresenta la velocità di traslazione di S' rispetto ad S. Essi costituiscono pertanto una totalità ∞^3 . Naturalmente un riferimento $R' \equiv (O' x' y' z', t')$ di S' è individuato rispetto a un riferimento $R \equiv (Oxyz, t)$ di S da un certo numero di parametri (sei) che tengano conto sia della velocità vettoriale $\mathbf{v}$ di S' rispetto ad S, sia della scelta delle terne in S e in S'.

c) *Essi sono tra loro fisicamente indistinguibili e quindi equivalenti di fronte alla formulazione di tutte le leggi fisiche* (in particolare cinematiche). Questo postulato, classicamente limitato all'ambito meccanico, viene esteso in relatività a tutti i fenomeni fisici. Comunque, nell'ambito cinematico, che è il solo che attualmente ci interessa, esso è comune alla fisica classica come alla relativistica.

d) *Ogni relazione cinematica che legghi due riferimenti galileiani R ed R' dipende con continuità dai parametri che individuano R' rispetto ad R (o viceversa). Ogni funzione dell'evento E che sia differenziabile in R (ove è espressa nelle variabili x, y, z, t) è differenziabile in R' (ove è espressa in x', y', z', t').* Questo ultimo postulato è in relazione col carattere oggettivo del concetto di evento e di fenomeno in genere.

2. CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO GALILEIANO. - Dall'assioma II c discende che, note le coordinate x, y, z, t di un evento in un riferimento galileiano R, risultano completamente determinate le sue coordinate x', y', z', t' in ogni altro riferimento R'. Ciò val quanto dire che x', y', z', t' sono funzioni univoche e invertibili di x, y, z, t

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(si è posto per brevità $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$; $x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z', x'_4 = t'$). Conformemente a III d riterremo le f_i e le loro inverse almeno di classe C_2 . Naturalmente le f_i devono dipendere ulteriormente, con continuità, dai parametri che in R individuano R'.

Le (1) comportano una corrispondenza biunivoca anche tra i differenziali delle variabili, cioè tra le componenti spazio-temporali di un fenomeno elementare nei due riferimenti

$$dx'_i = \sum_1^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Tale corrispondenza, per l'omogeneità di S (II d), deve essere indipendente dal luogo e dal tempo in S ($\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \text{cost.}$). Ciò val quanto dire che le (1) e le loro inverse sono *lineari*.

Senza menomare la generalità fisica scegliamo gli assi Oxyz in S con l'unica condizione che l'asse x riesca parallelo, ma non necessariamente con-

corde, alla velocità v di S' . Diremo v la componente algebrica (l'unica non nulla) di tal velocità secondo l'asse x . In S' poi, scelta a piacere un'origine dei tempi t' , si assumeranno come assi $O' x' y' z'$ le rette di S' che all'istante $t'=0$ sono sovrapposte agli assi $Oxyz$ (che si tratti effettivamente di rette è provato dalla linearità delle (1)). Scegliremo infine l'origine dei tempi in S nell'istante di S in cui O' coincide con O . Con tale scelta le trasformazioni (1) notoriamente si riducono (tornando alle notazioni primitive) alla forma (tralascio per brevità la dimostrazione ben nota):

$$(3) \quad x' = A_{11}(v) \cdot (x - vt) \quad , \quad y' = A_{22}(v) \cdot y \quad , \quad z' = A_{33}(v) \cdot z \quad , \\ t' = A_{41}(v) \cdot x + A_{44}(v) \cdot t$$

ove nei coefficienti A , tuttora incogniti, si è messa in evidenza la dipendenza dal parametro v , che individua S' in S .

Per differenziazione dalle (3)₁ (3)₄ si deduce, in forma ancora parzialmente indeterminata, la regola di composizione delle velocità secondo l'asse x :

$$(4) \quad u' = \frac{A_{11}(v)(u - v)}{A_{41}(v) \cdot u + A_{44}(v)}$$

ove con $u = dx/dt$ si è indicata la velocità algebrica rispetto ad S di un punto mobile sull'asse x e con $u' = dx'/dt'$ la velocità dello stesso punto rispetto a S' .

Delle funzioni incognite $A_{11}(v)$, $A_{22}(v)$, $A_{33}(v)$, $A_{44}(v)$, $A_{41}(v)$ fin da ora può dirsi:

1° Per $v = 0$ esse assumono i seguenti valori

$$(5) \quad A_{11}(0) = A_{22}(0) = A_{33}(0) = A_{44}(0) = 1 \quad , \quad A_{41}(0) = 0 \quad .$$

Infatti per $v = 0$ le (3) si devono ridurre alla trasformazione identica.

2° A_{11} , A_{22} , A_{33} , positive per $v = 0$, devono conservarsi tali in tutto il loro campo di definizione, perché non venga mai meno la invertibilità delle (3):

$$(6) \quad A_{11}(v) > 0 \quad , \quad A_{22}(v) > 0 \quad , \quad A_{33}(v) > 0 \quad .$$

3° A_{11} , A_{22} , A_{33} , A_{44} sono funzioni *pari*, A_{41} è funzione *dispari* di v :

$$(7) \quad A_{11}(-v) = A_{11}(v) \quad , \quad A_{22}(-v) = A_{22}(v) \quad , \\ A_{33}(-v) = A_{33}(v) \quad , \quad A_{44}(-v) = A_{44}(v) \quad , \quad A_{41}(-v) = -A_{41}(v) \quad .$$

Infatti in virtù della (3)₂ un segmento solidale a S' , di lunghezza l' , disposto parallelamente all'asse y' , appare in S , istante per istante, diretto come y e di lunghezza $l = l'/A_{22}(v)$. Cambiando v in $-v$, ossia invertendo il moto di S' rispetto ad S , il risultato deve essere il medesimo, a causa dell'isotropia di S (II d). Ne consegue la (7)₂. Per analogo motivo vale la (7)₃.

Del pari, stante la (3)₁, un segmento di lunghezza l' solidale a S' e disposto parallelamente a x' , in S appare, istante per istante, diretto come x e di lunghezza $l = l'/A_{11}(v)$. Poiché il risultato (contrazione o allungamento che sia) non può cambiare invertendo il moto di S' (a causa dell'isotropia di S) ne discende la (7)₁.

Finalmente consideriamo in S' un punto che si muova sull'asse x' con velocità algebrica u' . In S esso appare muoversi con la velocità u che si ricava dalla (4). Quest'ultima velocità, a causa dell'isotropia di S , deve semplicemente cambiare di segno se simultaneamente si inverte il moto di S' rispetto ad S e il moto del punto rispetto a S' . Ne consegue che la (4) deve continuare a sussistere mutandovi v in $-v$, u' in $-u'$, e u in $-u$; se ne trae

$$\frac{-A_{11}(-v) \cdot (u-v)}{-A_{41}(-v)u + A_{44}(-v)} = -\frac{A_{11}(v) \cdot (u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)}.$$

Tenuta presente la (7)₁, ne conseguono simultaneamente la (7)₄ e la (7)₅.

3. DIGRESSIONE SUL MOTO RECIPROCO: LEMMA DI RECIPROCIITÀ. - Dai postulati ammessi può dedursi una proprietà di reciprocità tra S ed S' che per il suo carattere intuitivo viene ordinariamente ammessa senza dimostrazione, ovvero viene assunta come postulato indipendente.

Sia v , come si è detto, la velocità algebrica di S' rispetto ad S e sia w la velocità algebrica di S rispetto ad S' ; quest'ultima si presenta come una funzione univoca di v (cfr. III b):

$$(8) \quad w = \varphi(v).$$

Sulla $\varphi(v)$ può dirsi:

1° È definita in un intervallo I dell'asse v , finito o infinito, simmetrico rispetto all'origine $v = 0$ (II d, isotropia di S) ed è ivi continua (III d).

2° Non dipende da S ma è la stessa per ogni riferimento galileiano (postulato di relatività, III c).

3° È funzione dispari. Infatti invertendo gli orientamenti degli assi x e x' (con che v e w si mutano in $-v$ e $-w$) la (8) dà $-w = \varphi(-v)$ e quindi, sempre per la (8),

$$(9) \quad \varphi(-v) = -\varphi(v).$$

4° È invertibile, poiché anche v è funzione univoca di w , e la funzione inversa φ^{-1} si identifica con la φ (postulato di relatività, III c). Se ne trae, data la continuità, che φ è funzione strettamente monotona in I e che per ogni v vale l'identità

$$(10) \quad \varphi[\varphi(v)] = v.$$

Questa equazione funzionale, tenuto conto del carattere monotono e dispari della φ , riduce la sua scelta alla coppia di funzioni

$$(11) \quad \varphi(v) = \pm v.$$

Se infatti, supposta φ decrescente, per un particolare valore $\bar{v} < 0$ fosse $\varphi(\bar{v}) > -\bar{v}$, da un lato ne seguirebbe, per la disparità di φ , $\varphi(-\bar{v}) < \bar{v}$; dall'altro, per la sua decrescenza, $\varphi[\varphi(\bar{v})] < \varphi(-\bar{v})$. Dalle due ultime disuguaglianze conseguirebbe $\varphi[\varphi(\bar{v})] < \bar{v}$, in contraddizione con la (10). In modo perfettamente analogo si dimostra assurda una disuguaglianza del tipo

$\varphi(\bar{v}) < -\bar{v}$ (per $\bar{v} < 0$) e il risultato resta valido anche nella ipotesi che φ sia crescente.

La scelta del segno nella (11), intuitivamente ovvia, può farsi al modo seguente. Sia S'' un terzo riferimento galileiano che si muova parallelamente all'asse x con velocità u rispetto ad S ed u' rispetto ad S' . In S'' intendiamo scelti gli assi e l'origine dei tempi in modo che per $t'' = 0$ essi si sovrappongano a quelli di S (e quindi, come potrebbe verificarsi, a quelli di S'). Tra u , u' , v sussiste la (4). Se ora cambiamo tra loro i compiti di S' e di S'' , u si muta in v , v in u ed u' , in virtù della (11), in $\pm u'$. La formula (4) dà allora:

$$(12) \quad \pm u' = \frac{A_{11}(u) \cdot (v - u)}{A_{41}(u) \cdot v + A_{44}(u)}.$$

Eliminando u' tra la (4) e la (12) si ricava la relazione

$$(13) \quad \frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)} u + \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \mp \frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)} v \mp \frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)}$$

valida per una scelta generica di u e v in I . Posto ivi $u = 0$ e tenute presenti le (7) si trae

$$(14) \quad \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \mp 1.$$

Ma ancora le (7)₁, (7)₄ mostrano che nelle (14), (13), (12), (11) soltanto il segno inferiore è accettabile. Resta così dimostrato il seguente

LEMMA DI RECIPROCITÀ. — *Se v è la velocità algebrica di S' rispetto ad S , la velocità algebrica di S rispetto ad S' vale $-v$.*

4. LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ. — Con la scelta corretta del segno la (14) dà

$$(15) \quad A_{44}(v) = A_{11}(v).$$

Tenuto conto della (15), la (13), adottati i segni inferiori e separate le variabili, si scrive

$$(16) \quad \frac{A_{11}(v)}{A_{41}(v)} v = \frac{A_{11}(u)}{A_{41}(u)} u$$

da cui si deduce

$$(17) \quad A_{41}(v) = -A_{11}(v) \frac{v}{c^2}$$

ove si è indicato con $-c^2$, ma senza riguardo al suo segno effettivo, tuttora incognito, il valore, necessariamente costante, del rapporto (16). Esso ha le dimensioni del quadrato di una velocità ed ha il significato di una costante universale. Le formule (3) si scrivono allora:

$$(18) \quad x' = A_{11}(v) \cdot (x - vt) \quad , \quad y' = A_{22}(v) \cdot y \quad , \quad z' = A_{33}(v) \cdot z \quad , \\ t' = A_{11}(v) \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

mentre la formula di composizione delle velocità non ha più altra indeterminazione che quella della costante c^2 :

$$(19) \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Anche la determinazione di A_{11} si fa facilmente. Eliminata t tra $(18)_1$ e $(18)_4$, si ottiene

$$(20) \quad x = \frac{x' + vt'}{A_{11}(v) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

D'altra parte la (18) medesima, scritta scambiando il compito di S e di S' (con che v si muta in $-v$ per il lemma di reciprocità) dà direttamente

$$(21) \quad x = A_{11}(-v) (x' + vt').$$

Tenuto presente il carattere pari e positivo di A_{11} (cfr. (6) e (7)) il confronto tra (20) e (21) dà senza incertezza

$$(22) \quad A_{11}(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Non resta che la determinazione di $A_{22}(v)$ e di $A_{33}(v)$ che è pure immediata. Invertito il compito di S e di S' (con che per il lemma di reciprocità v si muta in $-v$) le $(3)_2$ $(3)_3$ danno

$$(23) \quad y = A_{22}(-v) y' \quad z = A_{33}(-v) z'.$$

Tenuta presente la parità di A_{22} e di A_{33} , le (23), confrontate con le $(3)_2$ $(3)_3$ medesime provano essere

$$A_{22} = A_{33} = 1.$$

In definitiva le (3) assumono proprio l'aspetto della trasformazione speciale di Lorentz

$$(24) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & y' &= y, & z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Sono ben note le conseguenze formali delle (24) e della (19), in particolare l'esistenza di una velocità, reale o immaginaria, uguale a $\pm c$, che risulta invariante da un riferimento all'altro. Ma i postulati I-II-III, da soli, nulla dicono sul valore della costante universale c .

La separazione tra cinematica classica e cinematica relativistica comincia al momento in cui un ulteriore postulato permette di precisarne il valore. La fisica classica, in virtù del suo postulato del tempo assoluto ($t' = t$) pone senz'altro uguale a zero la costante $1/c^2$ con che le (24) si riducono alla trasformazione di Galileo, tutte le grandezze geometriche assumono carattere assoluto e la (19) diviene la regola classica di composizione $u' = u - v$, secondo la quale soltanto una velocità infinitamente grande risulta invariante al variare del riferimento. La relatività ristretta invece attribuisce a c un valore reale e finito, identificandola con la velocità della luce nel vuoto, che un postulato esplicito, ben giustificato del resto, dichiara invariante. L'eventualità di un valore immaginario per c non sembra avere un significato fisico.