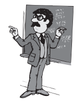

Silvano Sgrignoli
Bergamo,
sisgri@iol.it

L'energia cinetica relativistica e il suo limite classico

(Pervenuto il 23.2.2017, approvato il 26.5.2017)

ABSTRACT
It is easy to transform the usual expression for relativistic kinetic energy so that it clearly reduces to the classical kinetic energy for small velocities. This requires simple algebra, and the result could be useful in school teaching about this subject.

Quando si discute l'espressione relativistica dell'energia cinetica[1]:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \tag{1}$$

è naturale proporsi di verificare come, per piccoli valori di v, essa si riduca all'espressione classica $\frac{1}{2}mv^2$.

Nelle trattazioni di livello universitario, lo scopo è generalmente ottenuto sviluppando in serie di Taylor il fattore $\gamma - 1$: è così sul Landau-Lifchitz [1], sul Panofsky-Phillips [2], nella Fisica di Berkeley [3] e in altri testi [4, 5].

In effetti, posto $x = \beta^2 = v^2/c^2$ e sviluppando $\gamma - 1$ secondo le potenze di x, si ha:

$$\gamma - 1 = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots$$

e, considerando il solo primo termine, si arriva subito al risultato desiderato.

Una cosa analoga allo sviluppo in serie, anche se meno esplicita e non formale, si trova nel testo di Taylor-Wheeler [6], dove la questione è trattata in un riquadro e si afferma semplicemente che è lecito approssimare l'energia totale E nella forma:

$$E/m = 1 + (1/2)\mathrm{v}^2 + \text{correzioni.}$$ [2]

Per rendere più chiaro il discorso, tuttavia, Taylor e Wheeler mostrano anche un grafico nel quale è rappresentato l'andamento dell'energia cinetica al variare della velocità, secondo la teoria newtoniana e secondo la teoria relativistica (si vede che le due curve si confondono per bassi valori della velocità, minori di $0{,}3c$).

Nei testi per il liceo, è questa "giustificazione" grafica che è adottata con maggiore frequenza. La si trova, infatti, sul Romeni [7], sul Walker [8], sull'Halliday-Resnick-Walker [9] e un grafico del tutto analogo è presente nel Caforio-Ferilli [10]. In quest'ultimo testo però si afferma anche, senza dimostrazione, che per $v/c \ll 1$ si può approssimare γ come $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$.

Una strada diversa è seguita, invece, dall'Amaldi [11]. In questo testo l'approssimazione $\gamma \cong 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ è ricavata esplicitamente, ricorrendo a passaggi elementari (aggiungendo e togliendo opportunamente termini in β^4).

Riassumendo quanto visto finora, a parte le giustificazioni grafiche tutti i ragionamenti esaminati fanno ricorso a un'espressione *approssimata* (al second'ordine in β) del fattore $\gamma - 1$. Eppure non è necessario ricorrere a questa approssimazione, perché si può dare all'espressione di K una forma diversa, sempre esatta, ma che si riconosce direttamente ridursi all'espressione classica per $v \ll c$.

Riportiamo di seguito due strade per ottenere quanto detto; la prima espressione è tratta dal testo: *Oltre l'Universo meccanico* [12].

Sia $\delta = 1/\gamma$. Si ha, perciò: $\delta^2 = 1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$ e anche: $1 - \delta^2 = v^2/c^2$.
Esprimendo K in funzione di δ, possiamo scrivere:

$$K = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) mc^2.$$

Ma:

$$\frac{1-\delta}{\delta} = \frac{1-\delta}{\delta}\frac{1+\delta}{1+\delta} = \frac{1-\delta^2}{\delta(1+\delta)} = \frac{v^2/c^2}{\delta(1+\delta)},$$

perciò:

$$K = \frac{mv^2}{\delta(1+\delta)} \tag{2}$$

che è l'espressione cercata. Si vede, infatti, immediatamente, che – poiché, per piccoli valori di v, i valori tanto di γ che di δ sono molto prossimi a 1 – l'espressione di K si riduce a $\frac{1}{2}mv^2$ per $v \ll c$.

La seconda espressione è tratta da un articolo apparso su *The Physics Teacher* [13]. L'autore, però, vi giunge attraverso un percorso più complicato di quello presentato qui sotto che, invece, procede direttamente con facili passaggi algebrici.

Consideriamo direttamente il termine $\gamma - 1$:

$$\gamma - 1 = (\gamma - 1)\frac{\gamma+1}{\gamma+1} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 1}.$$

D'altro canto, si ha:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

e, quindi:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 1}mc^2 = \frac{mc^2}{\gamma+1}\frac{c^2 - c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{mv^2}{\gamma+1}\frac{c^2}{c^2 - v^2}.$$

ovvero:

$$\frac{\gamma^2}{\gamma+1}mv^2. \tag{3}$$

Come per l'espressione precedente, anche qui è immediato riconoscere che K si riduce a $\frac{1}{2}mv^2$ quando $v \ll c$. [3]

Considerazioni finali

Le espressioni dell'energia cinetica (2) e (3) qui ricavate, alternative alla (1) e ad essa equivalenti, sono di fatto poco conosciute. Si possono, però, ottenere con passaggi algebrici elementari e si ritiene che possano risultare utili nella scuola per mostrare facilmente che, quando $v \ll c$, l'espressione di K si riduce alla forma classica $\frac{1}{2}mv^2$.

Note

[1] m è la massa (a riposo), c la velocità della luce nel vuoto e, detta v la velocità del corpo, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

[2] Nel leggere questa espressione, si deve tener conto del fatto che Taylor e Wheeler esprimono l'energia E in unità di massa e indicano con la lettera v il rapporto tra la velocità del corpo e la velocità della luce (rapporto più comunemente indicato con la lettera β). Per ricondurre l'espressione alla forma più consueta, bisogna sostituire v con v/c ed E con E/c^2.

[3] Finora abbiamo parlato, genericamente, di *piccoli valori* della velocità. Per rendere il discorso più circostanziato, è forse opportuno fare qualche valutazione numerica; per questo, indichiamo con A il fattore che moltiplica mv^2 nella (2) e nella (3) e supponiamo, per esempio, che la velocità valga $v = 1$ km/s. Corrispondentemente, si ricava $A - \frac{1}{2} = 4{,}2 \times 10^{-12}$. Il calcolo può essere facilmente ripetuto, volendo, per altri valori di v.

Bibliografia

[1] L. Landau, E. Lifchitz. *Physique Théorique*, *Tome II*, *Théorie du Champ*, Éditions Mir, Mosca 1966, p. 36.

[2] W. K. H. Panofsky, M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading Mass. 1964, p. 314

[3] C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman. *La Fisica di Berkeley*, *1-Meccanica*, Zanichelli, Bologna 1970, pp. 420 e 427.

[4] L. Eyges. *The Classical Electromagnetic Field*, Dover Publications, New York 1980, p. 241.

[5] J. D. Cutnell, K. W. Johnson. *Fisica*, Zanichelli, Bologna 1994, p. 922 (nel testo si fa riferimento alla "serie binomiale", ma il discorso è del tutto equivalente allo sviluppo di Taylor).

[6] E. F. Taylor, J.A. Wheeler. *Spacetime Physics*, W. H. Freeman and Co., New York 1992, p. 205.

[7] C. Romeni. *Fisica e realtà*, vol. 3, Zanichelli, Bologna 2012, p. 1156.

[8] J. S. Walker. *Fisica*, *Modelli teorici e problem solving*, Vol. 3, Pearson, Milano – Torino 2016, p. 176.

[9] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. *Fondamenti di fisica*. *Fisica Moderna*, Ambrosiana, Milano 2009, p. 850.

[10] A. Caforio, A. Ferilli. *Fisica! Pensare l'Universo*, Edizione LAB, vol. 5, Le Monnier, Firenze 2015, p. 114 (il grafico riportato in questo testo mostra il quadrato della velocità in funzione dell'energia cinetica).

[11] U. Amaldi. *L'Amaldi per i licei scientifici.blu*, vol. 3, Zanichelli, Bologna 2012, p. 1113.

[12] R. P. Olenick, T. M. Apostol, D. L. Goodstein. *Oltre l'Universo meccanico*, Zanichelli, Bologna 1989, p. 363.

[13] P. J. Riggs. "A Comparison of Kinetic Energy and Momentum in Special Relativity and Classical Mechanics", *The Physics Teacher*, **64** (2016), 2 (February), p. 82.